

量子場の理論入門

前野昌弘

平成30年3月12日

目次

第 1 章	量子力学の復習と経路積分	1
1.1	シュレーディンガー方程式の復習	1
1.1.1	シュレーディンガー方程式の作り方	1
1.1.2	古典解析力学と量子力学の関係	2
1.2	量子力学的状態の表し方	3
1.2.1	状態=ベクトル空間	3
1.2.2	ブラとケットによる x -表示と p -表示	8
1.2.3	演算子のエルミート性と固有値	9
1.2.4	Hermite 多項式を使った表示	9
1.3	量子力学の演算子解法	11
1.3.1	調和振動子の演算子解法	11
1.3.2	Fock 表示と p -表示、 x -表示の関係	13
1.4	Schrödinger 表示と Heisenberg 表示	15
1.4.1	Schrödinger 表示での時間発展	15
1.4.2	Heisenberg 表示	15
1.4.3	自由粒子の例	16
1.4.4	Heisenberg 表示での調和振動子	20
1.5	経路積分による量子力学	21
1.5.1	経路積分による確率振幅の計算	21
1.5.2	具体例：自由粒子	23
第 2 章	相対論的な波動方程式から、場の理論へ	25
2.1	Klein-Gordon 方程式	25
2.1.1	Klein-Gordon 方程式を作る	25
2.1.2	Klein-Gordon 方程式の問題点	26
2.2	Dirac 方程式とその解	27
2.2.1	Dirac 方程式	27
2.2.2	Dirac 方程式の解	28
2.2.3	ローレンツ変換	30
2.2.4	内積と直交関係	33
2.2.5	負エネルギーの解釈—Dirac の空孔理論とその問題点	35
2.3	Klein-Gordon 方程式の解	36
2.3.1	平面波解	36
2.3.2	時空の一点から広がる解	37
2.4	Green 関数	38

第 3 章	第 2 量子化	41
3.1	「場」とは？	41
3.2	第 1 量子化から第 2 量子化へ	42
3.2.1	無限自由度の系へ	42
3.2.2	Schrödinger 場の状態と第 1 量子化の状態	45
3.3	Schrödinger 場と Klein-Gordon 場の正準量子化	47
3.3.1	Schrödinger 場の正準量子化—Bose 統計	47
3.3.2	Schrödinger 場の正準量子化—Fermi 統計	48
3.3.3	Klein-Gordon 場の正準量子化	48
3.3.4	Klein-Gordon 場の演算子 a, a^\dagger の意味	49
3.3.5	T 積	50
3.3.6	4 次元交換関係	51
3.3.7	Green 関数	52
3.4	場の理論の経路積分	54
3.4.1	経路積分での伝播関数の意味	54
3.4.2	フェルミ粒子の経路積分とグラスマン数の積分	56
3.4.3	経路積分の 2 点関数=粒子の伝播	60
3.5	Dirac 場の正準量子化	62
3.5.1	正準形式に移行する時の問題	62
第 4 章	場の相互作用	65
4.1	相互作用する場のとりあつかい	65
4.1.1	場の理論の Heisenberg 表示、Schrödinger 表示、相互作用表示	65
4.1.2	具体例— ϕ^3 相互作用	67
4.2	演算子形式での計算	68
4.2.1	正規積と T 積：Wick の定理	68
4.2.2	0 点関数：真空ダイアグラム	69
4.2.3	2 点関数	70
4.3	Feynman Rule	72
4.3.1	Feynman 図の数の数え方:座標表示	72
4.3.2	簡単な 2 点関数の計算	73
4.3.3	運動量表示での Feynman Rule	74
4.4	経路積分による計算	76
4.5	相互作用が力を伝えることの模型	76
第 5 章	電磁場と物質場の相互作用	81
5.1	ゲージ原理	81
5.1.1	Maxwell 方程式の特異性	81
5.1.2	電磁場の 4 次元表記	82
5.1.3	ゲージ変換	83
5.1.4	ゲージ変換と波動関数の位相	83
5.2	非相対論的な場と電磁場の相互作用	85
5.2.1	作用とゲージ不変性	85
5.2.2	正準交換関係	87
5.2.3	相互作用ハミルトニアン	88

5.3	相対論的な場と電磁場の相互作用	89
5.3.1	作用	89
5.4	電磁場のローレンツ共変な量子化	90
5.4.1	ゲージ固定の問題	90
5.4.2	補助場の導入	91
5.4.3	ゲージ場に対する Feynman Rule	94
5.4.4	Coulomb ゲージを取った場合の計算	95
5.4.5	相互作用	97
第 6 章	くりこみ	99
6.1	Feynman 図の発散	99
6.1.1	発散の評価	99
6.1.2	次元法	101
6.2	具体例： ϕ^4 理論	104
6.2.1	Counter-term	104
6.3	具体例 2：Schwinger Model	108
6.3.1	作用と古典的対称性	108
6.3.2	量子化とカイラル・アノマリー	109
6.4	経路積分によるアノマリーの計算	112
6.4.1	経路積分のメジャー	112

第1章 量子力学の復習と径路積分

1.1 シュレーディンガー方程式の復習

1.1.1 シュレーディンガー方程式の作り方

まず、そもそもシュレーディンガー方程式は、どのようにして得られたのかを考えよう。もともと量子力学における（実験的にも確かめられた）重要な式として、アインシュタインとド・ブロイの関係式

$$\text{エネルギー } E = h\nu, \quad \text{運動量 } p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.1)$$

がある。 ν は振動数、 λ は波長である。この式は粒子的描像と波動的描像をつなげる式になっている。「波」として、

$$\psi = Ae^{2\pi i\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)} \quad (1.2)$$

で表されるような複素波を考えると、

$$\text{エネルギー } E = h\nu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{運動量 } p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.3)$$

というふうに、エネルギーや運動量を微分演算子として表すことが可能になる。この置き換えを使って、古典力学においてエネルギーがハミルトニアン $H(x, p)$ で表されている場合、量子力学では

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi \quad (1.4)$$

のような方程式が成立するとする。これがシュレーディンガー方程式である。

シュレーディンガー方程式によって記述される波動関数 ψ に関しては、積分 $\int \psi^* \psi dx$ が保存量であることがよく知られている（物理的にはこれは確率の保存を意味している）。その証明は以下のように行う。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int \psi^* \psi dx \right) &= \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ &= \int \left(\left(\frac{1}{i\hbar} H\psi \right)^* \psi + \psi^* \left(\frac{1}{i\hbar} H\psi \right) \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int \left(-(H\psi)^* \psi + \psi^* (H\psi) \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

2行目では、 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ （およびこれの複素共役）が成立することを使っている。ハミルトニアンがエルミート性を持てば、 $\int (H\psi)^* \psi dx = \int \psi^* (H\psi) dx$ が言えるので、この式は0となる。

この証明において大事だったことは、ハミルトニアンのエルミート性と、シュレーディンガー方程式が時間に関して一階の方程式であったことである。

1.1.2 古典解析力学と量子力学の関係

ここで、このシュレーディンガー方程式の解と、古典的解析力学との関係を述べておこう。後で経路積分による量子化を考える時にも、この関係は有用である。

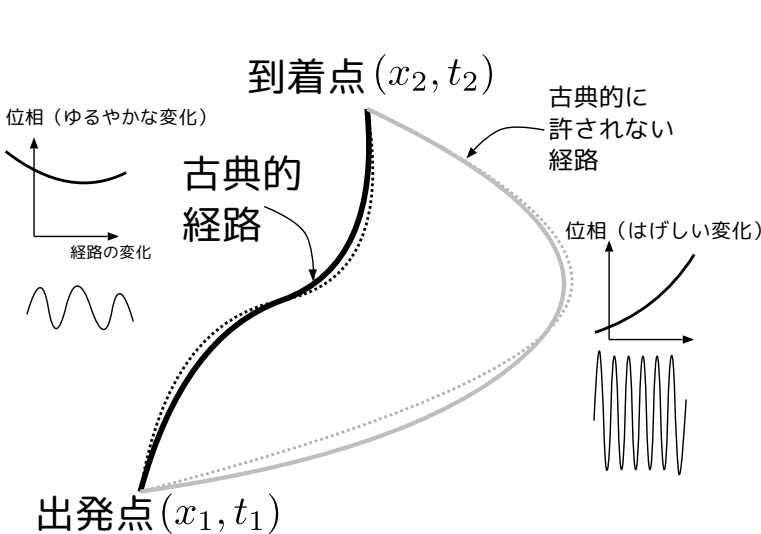
波動関数の形として、 $\exp\left[2\pi i\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right]$ を考えたが、先に考えた置き換えからすると、この式は $\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$ である。この波の微小時間、微小距離での進行は

$$\psi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p\Delta x - E\Delta t)\right] \psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p\frac{\Delta x}{\Delta t} - E\right)\Delta t\right] \psi(x, t) \quad (1.6)$$

となる。最後の式の位相に現れる $\left(p\frac{\Delta x}{\Delta t} - E\right)$ は古典的解析力学におけるラグランジアン $p\frac{dx}{dt} - H$ と同じものである。

解析力学ではラグランジアンを時間で積分した量（作用）が停留値を取る軌道が実現される（運動方程式の解となる）。古典力学では「それが解である」ということであって、それ以外の経路は単に捨てられる。しかし、量子力学では「運動方程式の解であるような経路（作用が停留値を取る経路）」以外も意味を持ってくる¹。

量子力学においては、一つの解を選ぶということはない。むしろ「どんな経路も同等」となる。そして、停留値を取るような経路が特別なものになるような「仕掛け」がある²。



今、ある時空点 (x_1, t_1) から (x_2, t_2) へ、いろんな経路をたどって波が到達したとする。 (x_2, t_2) において観測される波は、そのいろんな経路をたどった波の和である。経路によって、波はいろんな位相を取る。そしてそのいろんな位相の波の足し算が行われることになるが、この時足される波それぞれの位相差が大きすぎると、波が互いに消しあってしまう。位相が極値を取るというのが重要なのではなく、極値を取るところでは変化が小さい、ということが重要なのである。変化が小さい

ところの足し算は、位相が消し合うことなく残る。それに対して位相が大きく変化しているところの足し算は、足し合わされて消えてしまうのである。

つまり、いろんな経路を伝わって波がやってくるが、実際にその場所にやってきた波を作っているのは、位相が極値を取っているような波が大部分である、と考えることができる。そしてそのような経路というのはつまり、古典力学で運動が実現する（作用が極値になる）経路である。結局、波の位相 $\int\left(p\frac{dx}{dt} - H\right)dt$ の変化が緩やかとなる（停留する）ところが実際に波が進行していく路になるであろう。つまり、古典力学でのハミルトンの原理（「作用の値が極値をとるべし」）に対応するものは、量子力学では、「波の位相が極値をとるべし」である。

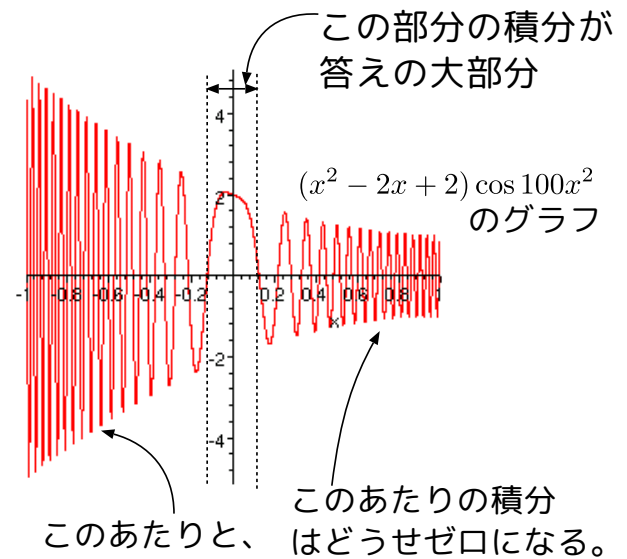
古典力学的立場では、我々は粒子がニュートンの運動方程式にしたがって運動していると考えていた。しかし、波動力学的立場では、進行していくのはたくさんの波の重なりあいである。

¹言葉の由来は後で述べるが、「運動方程式を満たす経路」のことを「on-shell」、それ以外を「off-shell」と表現する。

²この「どんな経路も同等」という考え方は、統計力学の等重率の原理につながるものがある。よって、量子力学と統計力学の間に面白い関連性が生まれる。これも後で述べよう。

たくさんの波の大多数は互いに消し合うが、古典力学で計算される経路を通る波は消されずに残る。これが、我々がこの世界で古典力学が成立している（そして、最小作用の原理という物理法則がある）と‘錯覚’した理由なのである³。

この波の重なる様子を具体的に考えるのは難しいので、だいたいのところどういう状況なのかを理解するために、簡単な積分の場合で変化のゆるやかな部分だけが生き残る例を示しておく。右のグラフは $(x^2 - 2x + 2) \cos 100x^2$ のグラフである。この関数は、 $x = 0$ 付近以外では非常に激しく振動している（位相が $100x^2$ という式であることを考えればわかる）。この積分を行うと、ほとんど $x = 0$ 付近だけの積分と同じになる。つまり、 $x = 0$ 付近以外の寄与は、結果にまったくといっていいほど影響されないのである。これと同様のことが、波動力学における波の重ね合わせでも起きている。ゆえに位相が極値となるような経路（古典力学的にはオイラー・ラグランジュ方程式の解となっているような経路）が主要な波の経路であると考えてよい。古典力学と量子力学はこのようにつながる。



1.2 量子力学的状態の表し方

1.2.1 状態＝ベクトル空間

量子力学の主役というと「波動関数」と思いがちだが、実は量子力学においては「状態」または「量子力学的状態」と呼ばれるものが主役となる。状態の表し方のもっとも一般的（初歩的？）なものが波動関数である。波動関数 $\psi(\vec{x}, t)$ は、その絶対値の自乗が粒子の存在確率を表す。ここでこの「状態」を一種のベクトルのようなものとして考える（数学においては足し算ができて定数倍ができるようなものはなんでもベクトルと呼ぶ）。波動関数がなぜベクトルと考えられるかがわかりにくいならば、関数 $\psi(\vec{x}, t)$ を

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} \psi(\vec{x}_1, t) \\ \psi(\vec{x}_2, t) \\ \psi(\vec{x}_3, t) \\ \vdots \\ \psi(\vec{x}_N, t) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

のような複素 N 成分の列ベクトルと考えてやればよい。ただしこの x_1, x_2, \dots, x_N は今考えている空間内の全ての場所（時空点）に 1 から順に番号を振っていったものとする。実際にはもちろん、 $N = \infty$ と考えなくてはならない⁴。つまり、 ψ は無限個の複素数成分を持つベクトルであると考えてよい。

³古典力学を一通り学習してのちに量子力学を学ぶので、「古典力学が基本であって、原子や分子のようなミクロな話をするときだけ量子力学が関係してくる」と思っている人が多いが、実際には量子力学こそが基本であり、たまたま量子力学的現象が顕著でないような場合に限りて古典力学を使ってもかまわない、というのが正しい理解である。

⁴念の為に補足しておく、実際には時空点の数は連続無限個、すなわち数え上げることが不可能な無限大であるので、このように 1 から順番に数を割り振ることはほんとうはできない。

なお、より厳密な立場で考えると、波動関数はどうせ規格化してからでない物理的内容は引き出せない、任意の複素数を C とした時、 ψ と $C\psi$ の物理的内容は全く同じだということになる。このため、 ψ はベクトルではあるが、「長さ」に意味のないベクトル（ベクトルを定数倍しても内容が変化しないベクトル）である⁵。

我々の世界はこのような「無限次元のベクトル」で表現されている。我々は目で見て、耳で聞いて、あるいは手で触れて「世界」を感じるが、それはこの「無限次元のベクトル」の無限個の成分のほんの一部を得ているに過ぎない。量子力学では観測結果と比べられるものは、波動関数ではなく、物理量を表す演算子の固有値や期待値である。演算子の固有値や期待値を求めるという「計算」は、量子力学的状態すなわち「無限成分を持つベクトル」から「物理量に対応する数」を取り出す操作なのである。

期待値を計算するために必要な概念について、述べよう。

無限次元の複素列ベクトルの Hermite 共役であるような行ベクトル

$$(\psi^*(\vec{x}_1, t), \psi^*(\vec{x}_2, t), \psi^*(\vec{x}_3, t), \dots, \psi^*(\vec{x}_N, t)) \quad (1.8)$$

を考え、この二つのベクトル内積を取る。この結果に一個の格子点の体積 ΔV をかけてから $N \rightarrow \infty$ の極限を取れば、

$$\Delta V \sum_{n=1}^N \psi^*(\vec{x}_n, t) \psi(\vec{x}_n, t) \rightarrow \int \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3x \quad (1.9)$$

という形になり、いわゆる波動関数のノルムになる。つまりいわゆる波動関数のノルムが1であるということは、複素無限次元ベクトルと考えた時のベクトルの長さが1であるということである。

なお、ここで ΔV をかけるという操作をしないと通常のベクトルとちゃんと対応しないことに注意。そういう意味では、

$$\left(\psi^*(\vec{x}_1, t)\sqrt{\Delta V}, \psi^*(\vec{x}_2, t)\sqrt{\Delta V}, \psi^*(\vec{x}_3, t)\sqrt{\Delta V}, \dots, \psi^*(\vec{x}_N, t)\sqrt{\Delta V} \right), \quad \begin{pmatrix} \psi(\vec{x}_1, t)\sqrt{\Delta V} \\ \psi(\vec{x}_2, t)\sqrt{\Delta V} \\ \psi(\vec{x}_3, t)\sqrt{\Delta V} \\ \vdots \\ \psi(\vec{x}_N, t)\sqrt{\Delta V} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

のように $\sqrt{\Delta V}$ をかけたものが通常のベクトルと対応すると考えておいた方がよい。 $\sqrt{\Delta V}$ は微小量なので、このベクトルは「微小な大きさの成分を持つ代わりに、無限個の成分を持っている。ゆえに長さは有限である」と考えればよい。

このような無限次元ベクトルを（普通のベクトルのように \vec{a} と書くのではなく） $|\psi\rangle$ （縦の列ベクトル）と $\langle\psi|$ （横の行ベクトル）のように象徴的に表すことにする。 $\langle\psi|$ は $|\psi\rangle$ のエルミート共役にあたるベクトルである。この二つはそれぞれ、「ケット・ベクトル」と「ブラ・ベクトル」と呼ばれる。この二つの内積を $\langle\psi|\psi\rangle$ のように書き、これで「ブラケット」が完成している、ということになる。

ここまででは単に表記を変えたに過ぎないが、実は抽象的に $|\psi\rangle$ と書いた場合、波動関数を $\psi(x)$ と書くのに比べ、その表現するものがより一般的になっている。ケットは量子力学的な状態を表すが、その状態をどのように表示するかを規定していない。3次元空間のベクトル \vec{A} を直交座標で表したり ($\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$)、極座標で表したり ($\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$) できるように、

⁵このような量は「レイ (ray)」と呼ばれることもある。ベクトルから長さの概念を引っこ抜いたものがレイであり、波動関数はレイで表現されると考えてもよい。

量子力学的状態もいろんな基底ベクトルを用いて表すことができる。3次元のベクトルの場合でも、特別な座標を選んで書くより、抽象的に \vec{A} などと書いておいた方が便利ことが多い。ブラやケットはそのような抽象的書き方に対応する。

それに対し、座標を決めた表示が便利な場合もある。3次元のベクトルの場合で、どのような表示が便利になるかを見ておこう。一般の3次元のベクトル \vec{A} は、 $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ のように分解して、 (A_x, A_y, A_z) のように3つの数で表すことができる。これは基底ベクトルを $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ と選んだということである。この基底は $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) となって好都合である。このような基底を正規直交基底と呼ぶ。「直交」とはその名の通り、 i, j が違うものどうしが直交する(内積が0になる)ことを表す。「正規」とは、同じものどうしの内積(長さの自乗)が1になることを表す。正規直交基底としては、ほかにも極座標の基底($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$) などがある(極座標の基底も直交する。ただ、場所によって同じ方向を向いていないことがおおきな違いである)。

つまり、あるベクトル \vec{A} は、 $A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ のようにも、 $A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$ のようにも表すことができる。この A_x を求めたいと思ったならば、 \vec{A} と \vec{e}_x の内積をとればよい($A_x = \vec{e}_x \cdot \vec{A}$)。つまり、

$$\vec{A} = \vec{e}_x(\vec{e}_x \cdot \vec{A}) + \vec{e}_y(\vec{e}_y \cdot \vec{A}) + \vec{e}_z(\vec{e}_z \cdot \vec{A}) \quad (1.11)$$

である。 \vec{A} の表し方が二つあったことを考えると、

$$A_x = A_r \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi \quad (1.12)$$

のような、二つの表示の間関係式を作ることができる。

以上のような3次元ベクトルにおける計算を、ブラとケットを使った計算で書いておくと、この表記の便利さがわかるであろう。今考えたベクトルと基底ベクトルを、 $|A\rangle, |e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle, |e_r\rangle, |e_\theta\rangle, |e_\phi\rangle$ と書いたとする。 $A_x = \vec{e}_x \cdot \vec{A}$ は、 $\langle e_x | A \rangle$ と書くことができる。この表記を使うならば、(1.11) は

$$|A\rangle = |e_x\rangle \langle e_x | A \rangle + |e_y\rangle \langle e_y | A \rangle + |e_z\rangle \langle e_z | A \rangle \quad (1.13)$$

と書ける。また(1.12)は

$$\langle e_x | A \rangle = \langle e_x | e_r \rangle \langle e_r | A \rangle + \langle e_x | e_\theta \rangle \langle e_\theta | A \rangle + \langle e_x | e_\phi \rangle \langle e_\phi | A \rangle \quad (1.14)$$

と書ける。これを見ると、

$$|e_x\rangle \langle e_x| + |e_y\rangle \langle e_y| + |e_z\rangle \langle e_z| = 1 \quad (1.15)$$

$$|e_r\rangle \langle e_r| + |e_\theta\rangle \langle e_\theta| + |e_\phi\rangle \langle e_\phi| = 1 \quad (1.16)$$

と考えればよいことがわかる。このように書けるのは、任意のベクトルがかならずこの3つの基底ベクトルの和で書けるからである。このような性質を「完全性」と呼ぶので、上のような

$$\sum_{a \text{ は全ての状態}} |a\rangle \langle a| = 1 \quad (1.17)$$

という式を「完全性の式」と呼ぶ。ブラとケットを使った表記だと、このように基底ベクトルの変換がわかりやすくなる。

量子力学的状態を表す基底も3次元のベクトルと同様に正規直交的に選ぶことが多い。

そこで、このような(実際には無限個の成分を持つ)ベクトルの“基底”となるようなベクトルを考える。すなわち、

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.18)$$

を満たすようなベクトルの集合 $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle\}$ を持つてくる。

3次元の基底ベクトルにいろいろな取り方があるように、波動関数の基底ベクトルにもいろいろな取り方がある。その一つは以下のようなものである。

$$|x_1\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |x_2\rangle \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |x_i\rangle \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |x_N\rangle \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

この基底ベクトルはある場所 \vec{x} での波動関数の値だけが0でないようなベクトルといえる。これは量子力学的には粒子が点 x に局在している状況を示す。この点での波動関数の値は ∞ である（ベクトルの成分は $\psi(x)\sqrt{\Delta V}$ であることに注意）。

この基底に対して \hat{x} (座標演算子) をかけてやると、波動関数が0でない場所の座標の値が

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad (1.19)$$

のように固有値として出るであろう（粒子がそこにしかいないのだから）。つまりこの基底は \hat{x} を対角化する表示になっており、 x -表示、または座標表示と呼ばれる。 \hat{x} を行列で表せば、

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_N \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

のような対角行列になっている。

$|x\rangle$ は、 \hat{x} が固有値 x を持つ状態であるが、 \hat{x} の異なる固有値を持つ状態は常に直交するので、 $\langle x|x'\rangle$ は $x = x'$ でない限り0となる（これは上の行列表示からも明らかだ）。適当に規格化して

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (1.21)$$

と選ぶ。

ここで、 $x = x'$ の時に右边を1にすることはできないことに注意。ここまでの行列での表示を見るとこの値は1になりそうだが、 x という変数が連続的に変化する変数である時はそうはいかない。行列での表現は、実際には連続的な x を離散的に書いてしまっているので、正しい表現ではないのである。「無限次元のベクトル」というイメージを持つためには便利だが、それにとられすぎてはいけない。

$x = x'$ でのみ有限の値を持って他の時に0であるような関数⁶だと、 x で積分すると0になってしまうのである。つまり、長さ0のベクトルになってしまう。

$$\int |x\rangle\langle x| = 1 \quad (1.22)$$

⁶グラフを書いてみれば、面積0のグラフになる。こういう関数は「測度0だ」と表現する。

という便利な式を使えない。これに右から $|x'\rangle$ をかけると、

$$\int |x\rangle\langle x|x'\rangle = |x'\rangle \quad (1.23)$$

となる。これから $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ となっていないなくてはならない。

ここでもう一つ注意。 $|x\rangle$ が「粒子が局在している状態を表現する」と聞いて、「なるほど、古典力学の粒子が x にいるという状況に対応するのが $|x\rangle$ なのだ」と思っはいけない。むしろ、 $|x\rangle$ は古典的には存在できない状態である。というのは不確定性関係があるので、 $\Delta x = 0$ であるこの状態は、いわば $\Delta p = \infty$ の状態となっている。つまり、無限に大きいエネルギーを投入しない限り、この状態を作ることはできない。

古典力学的な状態は、 Δx も Δp も「そこそこに」値のある状態である。

順序が逆になったが、(1.22) がどこから出てくるかを説明しよう。

3次元のベクトルが基底ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ を使って

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \quad (1.24)$$

と分解できるように、一般のケット・ベクトル $|\psi\rangle$ は、基底ベクトル $|x\rangle$ を使って

$$|\psi\rangle = \int |x\rangle\psi(x)d^3x \quad (1.25)$$

のように分解できるとしよう。この式の両辺に $\langle x|$ をかけることにより、

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \quad (1.26)$$

を得る。

これらの式から

$$|\psi\rangle = \int |x\rangle\langle x|\psi\rangle d^3x \quad (1.27)$$

ということが言える。つまり、上で仮定した「一般のケット・ベクトルは $|x\rangle$ で分解できる」ということが正しいならば、

$$\int d^3x |x\rangle\langle x| = 1 \quad (1.28)$$

となる。これが $|x\rangle$ の完全性の式である⁷。

つまり我々のなじみの波動関数 $\psi(x)$ は、もっと一般的な状態 $|\psi\rangle$ を座標表示という特殊な表示で表した場合の成分 $\langle x|\psi\rangle$ にあたるものなのである。3次元のベクトルを (A_x, A_y, A_z) と書くのは便利ではあるが本質的でない（むしろ極座標表示した方が便利なこともある）のと同様、量子力学的状態を波動関数 $\psi(x)$ で表すのも便利ではあるが本質的ではない。

今考えている対象は波動関数という無限次元のベクトルである。それにかかる演算子は無限行無限列の行列と考えることもできる。無限次元になると、有限次元のベクトルに対して行っていた計算のうちいくつかは成り立たなくなるので注意しなくてはならない。たとえば、おなじみの $[x, p] = i$ は、有限次元の行列では絶対に表現できない⁸。両辺のトレースをとると、

$$\begin{aligned} \text{tr}(xp - px) &= \text{tr}(i) \\ \text{tr}(xp) - \text{tr}(px) &= \text{tr}(i) \\ \text{tr}(xp) - \text{tr}(xp) &= \text{tr}(i) \end{aligned} \quad (1.29)$$

となって、左辺は0になるが右辺は0にならない。無限次元ではトレースの巡回対称性 $\text{tr}AB = \text{tr}BA$ が成立しないので、上の計算が成立せず、 $[x, p] = i$ でいられる。

⁷このあたりの計算は上の3次元ベクトルの例と全く平行である。

⁸このテキストでは $\hbar = 1, c = 1$ の単位系（自然単位系と呼ぶ）を取っているため、 $[x, p] = i\hbar$ の \hbar は書かない。

他にも、無限次元では左逆行列と右逆行列が一致しない。つまり、 $AB = I$ であっても $BA = I$ とは限らないのである。もっとも簡単な例は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

である。この A, B は上昇下降演算子 a, a^\dagger の一つの表現でもある。調和振動子に対して「エネルギーを上げてから下げる」という操作と「エネルギーを下げてから上げる」という操作は同一ではない（真空に対してこの操作を行うとどうなるかを思い浮かべてみよう）。

1.2.2 ブラとケットによる x -表示と p -表示

同様に、 \hat{p} の固有ベクトル $|p\rangle$ 、すなわち

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (1.31)$$

を満たすベクトルを基底ベクトルを選ぶことができる。この場合、状態 $|p\rangle$ は、粒子が特定の運動量 p を持っている状態と考えられる。特定の運動量を持っているので、座標は完全に不確定となる。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (1.32)$$

であることを使って、 $\langle x|\hat{p}|x'\rangle$ がどのようなものになるかを考えてみよう。

$$\begin{aligned} \langle x|[\hat{x}, \hat{p}]|x'\rangle &= i\langle x|x'\rangle \\ \langle x|\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}|x'\rangle &= i\delta(x - x') \\ (x - x')\langle x|\hat{p}|x'\rangle &= i\delta(x - x') \end{aligned} \quad (1.33)$$

ここで δ -関数に関する公式

$$x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \quad (1.34)$$

を思い出す⁹。これより、

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \quad (1.35)$$

あるいは

$$\langle x|\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x} \langle x| \quad (1.36)$$

であることがわかる。注意しておいて欲しいことは、

$$\hat{p}|x'\rangle = i \frac{\partial}{\partial x'} |x'\rangle \quad (1.37)$$

だということ。つまり、 $\hat{p}|x'\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x'} |x'\rangle$ ではない、ということである。後ろに $\delta(x - x')$ がある時、 $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x'}$ であることに注意しよう（よく間違える）。

⁹この公式は、両辺に任意の関数 $f(x)$ をかけて積分すれば証明できる。

これから

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x}\langle x|p\rangle \quad (1.38)$$

となる。この微分方程式を解くと、

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx} \quad (1.39)$$

となることがわかる¹⁰。

これを使って、 p -表示と x -表示を互いに変換することができる。すなわち、

$$\langle p|\psi\rangle = \int dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx} \langle x|\psi\rangle \quad (1.40)$$

逆変換は、

$$\langle x|\psi\rangle = \int dp \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle = \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx} \langle p|\psi\rangle \quad (1.41)$$

となる。これらは Fourier 変換そのものである。

問題： $\langle x|\Psi\rangle = \delta(x)$ とする時、 $\langle p|\Psi\rangle$ を求めよ。

1.2.3 演算子のエルミート性と固有値

演算子 A が任意の状態ベクトル $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle$ に対して

$$\langle \Phi|A|\Psi\rangle = (\langle \Psi|A|\Phi\rangle)^* \quad (1.42)$$

を満たすとき、 A はエルミートであると言う。あるいは、 A のエルミート共役 A^\dagger を

$$(\langle \Psi|A|\Phi\rangle)^* = \langle \Phi|A^\dagger|\Psi\rangle \quad (1.43)$$

と定義するならば、 A がエルミートであるということは $A = A^\dagger$ と同じことである。上の定義は $\langle \Phi|A|\Psi\rangle$ を行列 A の (Φ, Ψ) 成分だと思えば、行列がエルミート行列であるということと同じになる。

エルミートな演算子には、いくつかの性質がある。まず、固有値があるとしたらそれは常に実数である。

また、固有値の違うベクトルどうしは常に直交する。

問題： エルミートな演算子 A にたいし、 $A|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$ となる $|\Psi\rangle$ と、 $A|\Phi\rangle = b|\Phi\rangle$ で表せる $|\Psi\rangle$ があったとする。 $a \neq b$ ならば $\langle \Psi|\Phi\rangle = 0$ であることを証明せよ。

1.2.4 Hermite 多項式を使った表示

x -表示、 p -表示以外にも、正規直交系となるような関数系は存在する。Hermite 多項式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn} \quad (1.44)$$

¹⁰係数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ は、 $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ と、 $\int dx |x\rangle \langle x| = 1$ が両立することから決まる。

という直交関係を持っているから、

$$\langle x|H_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (1.45)$$

となるようなケット $|H_n\rangle$ を定義すれば、

$$\langle H_m|H_n\rangle = \int dx \langle H_m|x\rangle \langle x|H_n\rangle = \delta_{mn} \quad (1.46)$$

となる。つまり $|H_n\rangle$ は正規直交系である。Hermite 多項式系は完全だから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |H_n\rangle \langle H_n| = 1 \quad (1.47)$$

も成立する。

そもそも Hermite 多項式をどのように導出したかを考えてみると、この状態 $|H_n\rangle$ が、 $m = 1, \omega = 1$ の調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{x}^2 \quad (1.48)$$

の固有状態であることがわかる。すなわち、

$$H|H_n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|H_n\rangle \quad (1.49)$$

となる。これは、

$$\begin{aligned} \langle x|H|H_n\rangle &= \langle x|\left(\frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{x}^2\right)|H_n\rangle \\ &= \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2\right)\langle x|H_n\rangle \end{aligned} \quad (1.50)$$

をまじめに計算すれば示すことができる。しかし計算方法としては次の節で行う方法の方が簡便であり、優れている。

x -表示、 p -表示はそれぞれ \hat{x}, \hat{p} を対角化する表示であったが、この $|H_n\rangle$ 表示は調和振動子のハミルトニアン（エネルギー）を対角化する表示である。

同様に水素原子のハミルトニアンを対角化するような表示は球面調和関数と Laguerre 関数を使って作ることができる。この場合、エネルギーを対角化しただけでは、状態を完全に分類できない。同じエネルギーを持つ状態がいくつもある（縮退がある）からである（これは2次元以上の調和振動子の場合でも同様）。そのため、角運動量などを使ってさらに状態を分類する。

1.3 量子力学の演算子解法

1.3.1 調和振動子の演算子解法

1次元の調和振動子の量子力学を演算子的手法を使って解くことを考える。ハミルトニアンは(1.48)を使う。前節でわかったように、いろいろな演算子の固有状態を使って状態を表せるのだから、演算子の固有状態を求めていく方法を考えたい。そこで必要となるのは、「固有値を変える演算子は何か？」ということである。

以下ではハミルトニアンの固有値について考える。

演算子として、

$$[a, H] = ca \quad (1.51)$$

$$[a^\dagger, H] = -ca^\dagger \quad (1.52)$$

を満たすもの考える。ただし、 c は実で正の定数とする。上が満たされれば、その \dagger を取ることにより下も満たされる¹¹。このような演算子があると、ハミルトニアンの固有状態を、以下のようにして構築できる。

まず、エネルギー E の状態を $|E\rangle$ とおく。これに a^\dagger をかけた状態のエネルギー固有値を計算してみよう。

$$\begin{aligned} Ha^\dagger|E\rangle &= (Ha^\dagger - a^\dagger H + a^\dagger H)|E\rangle \\ &= (ca^\dagger + a^\dagger E)|E\rangle \\ &= (c + E)a^\dagger|E\rangle \end{aligned} \quad (1.53)$$

となり、エネルギーは c だけ大きくなる。逆にエネルギー E の状態を $|E\rangle$ として、これに a をかけた状態のエネルギーを求めると、

$$\begin{aligned} Ha|E\rangle &= (Ha - aH + aH)|E\rangle \\ &= (-ca + aE)|E\rangle \\ &= (-c + E)a|E\rangle \end{aligned} \quad (1.54)$$

となってエネルギーが c だけ減る。エネルギー最低の状態を $|0\rangle$ と書くことにすると、 $a|0\rangle = 0$ であることがわかる（でない $|0\rangle$ がエネルギー最低という条件に反する。また、エネルギー最低の状態が存在しないのは物理的に不合理である）。

具体的な例として、1次元の調和振動子の場合でこのような演算子を構築してみよう。

ここで一番簡単な候補として、

$$a = N(\hat{x} + A\hat{p}) \quad (1.55)$$

と仮定しよう（ N, A は定数）。

$$[\hat{p}, \hat{H}] = -i\hat{x}, \quad [\hat{x}, \hat{H}] = i\hat{p} \quad (1.56)$$

であるから、

$$[a, \hat{H}] = iN(-A\hat{x} + \hat{p}) \quad (1.57)$$

この式の右辺が $c(N(\hat{x} + A\hat{p}))$ であるから、

$$c = -iA, cA = i \quad (1.58)$$

¹¹ハミルトニアンがエルミートであることと、 $([A, B])^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ に注意。

が連立する。これを解くと、 $A^2 = -1$ となるので、 $A = \pm i$ となり、それぞれに応じて $c = \pm 1$ となる。 c は正の定数とおいたので、 $A = i, c = 1$ が正解である。この段階で、

$$a = N(\hat{x} + i\hat{p}) \quad (1.59)$$

$$a^\dagger = N^*(\hat{x} - i\hat{p}) \quad (1.60)$$

である。全体の規格化定数 N は決まらないので、

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (1.61)$$

のように、 a, a^\dagger の交換関係が簡単になるように決めよう。

$$[a, a^\dagger] = 2NN^* \quad (1.62)$$

であるから、 $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と選ぶ（まだ N の位相に関しては自由に選べるが、ここでは正の実数としておこう）。

結局

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \quad (1.63)$$

となった。

ハミルトニアンは a, a^\dagger を使って、

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (1.64)$$

と書き表すことができる。最後の $\frac{1}{2}$ はいわゆる零点振動の項であり、一般には無視されることが多い。

これですべての状態は

$$(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.65)$$

で展開することができる。 n が違えばエネルギー固有値が違うので直交する。

問題：

$$\langle 0 | a^m (a^\dagger)^n | 0 \rangle = n! \delta_{mn} \quad (1.66)$$

となることを証明せよ。

これで規格化された状態

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.67)$$

を作ることができた。一般の状態はこれら $|n\rangle$ の線形結合で表せる。状態 $|n\rangle$ ではられる空間を Fock 空間と呼ぶ。Fock 空間 (または Fock 表示) は、 x -表示や p -表示とはまた別の、状態を表す方法であると言える。

ある量子力学的状態を調べるには、このようにエネルギーの上げ下げを行う演算子を作り、その最低状態を定義してそこから“エネルギーを上げていった”結果得られたものとすべての状態を考えていく、という方法を取ると便利である。

1.3.2 Fock 表示と p -表示、 x -表示の関係

Fock 表示の真空 $|0\rangle$ を x -表示で表してみよう。消滅演算子の定義から、 x -表示での消滅演算子は

$$a = -i\sqrt{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (1.68)$$

と書ける。これから、 x -表示での真空の表示 $\langle x|0\rangle$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\langle x|0\rangle = 0 \quad (1.69)$$

という微分方程式を満たす。この式の解は

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (1.70)$$

となる。前の係数は規格化条件 $\langle 0|0\rangle = \int dx \langle 0|x\rangle \langle x|0\rangle = 1$ から位相を除いて決まる。位相を 0 にしたのは convention である。

問題： 係数を決定する計算を具体的に実行せよ。

他の状態もこれに生成演算子をかけていけば計算できる。

Fock 表示の計算でよく使われるのが coherent 表示というもので、これは演算子 a の固有状態として定義される。すなわち、

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (1.71)$$

(z は複素数) である。このような状態は、

$$|z\rangle = N(z)e^{za^\dagger}|0\rangle \quad (1.72)$$

のようにすれば作ることができる ($N(z)$ は z を含む c -数)。

a はエルミート演算子ではないので、「エルミート演算子の固有値の違う状態は直交する」という定理の影響を受けず、この状態は直交しない。実際計算してみると、

$$\begin{aligned} \langle z|z'\rangle &= N^*(z)\langle 0|e^{z^*a}|z'\rangle \\ &= N^*(z)\langle 0|e^{z^*z'}|z'\rangle \\ &= N^*(z)e^{z^*z'}\langle 0|N(z')e^{z'a^\dagger}|0\rangle \\ &= N^*(z)N(z')e^{z^*z'} \end{aligned} \quad (1.73)$$

となる。

しかし、完全性 $\int d^2z|z\rangle\langle z| = 1$ を満たすようにすることはできる。

たとえば $\int d^2z|z\rangle\langle z| = 1$ に右から $(a^\dagger)^n|0\rangle$ をかけてみると、

$$\begin{aligned} \int d^2z|z\rangle\langle z|(a^\dagger)^n|0\rangle &= (a^\dagger)^n|0\rangle \\ \int d^2z|z\rangle N^*(z)\langle 0|e^{z^*a}(z^*)^n|0\rangle &= (a^\dagger)^n|0\rangle \\ \int d^2z N(z)e^{za^\dagger}|0\rangle N^*(z)(z^*)^n &= (a^\dagger)^n|0\rangle \end{aligned} \quad (1.74)$$

ここで、 $z = re^{i\theta}$ とかけることに注意する。 z の 2次元積分は $\int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta$ と書き直せ、 $\int_0^{2\pi} d\theta z^n (z^*)^m = 2\pi r^{2n} \delta_{mn}$ である。ここで $N(z)$ は実は θ を含まない実な関数であったと仮

定する¹²。よって以後は $N(r)$ と書く。すると、角度積分の結果、 z と z^* のべきが等しい部分だけが残る。すなわち、 e^{za^\dagger} に含まれる $\frac{1}{n!} z^n (a^\dagger)^n$ の部分だけが出てきて、

$$2\pi \int_0^\infty dr N(r) N(r) \frac{1}{n!} r^{2n+1} (a^\dagger)^n |0\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.75)$$

となる。よって後は、

$$\int_0^\infty dr (N(r))^2 r^{2n+1} = \frac{n!}{2\pi} \quad (1.76)$$

を任意の非負の n に対して成立させるような関数 $N(r)$ を見つければよい。定積分の公式

$$\int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-x^2} = \frac{n!}{2} \quad (1.77)$$

を考える¹³と、

$$N(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad (1.78)$$

とすればよい。結局、

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2 + za^\dagger} |0\rangle \quad (1.79)$$

と書けることになる。

逆に、 x -表示の状態 $|x\rangle$ を Fock 表示を使って表してみよう。(1.63) から、

$$\hat{x} = \sqrt{2} (a + a^\dagger) \quad (1.80)$$

なので、

$$e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + \sqrt{2}a^\dagger x} |0\rangle \quad (1.81)$$

という状態を考えると、

$$ae^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + \sqrt{2}a^\dagger x} |0\rangle = (-a^\dagger + \sqrt{2}x) e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + \sqrt{2}a^\dagger x} |0\rangle \quad (1.82)$$

となる。すなわち、この状態は演算子 \hat{x} の固有状態である。規格化を考えて

$$|x\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + \sqrt{2}a^\dagger x - \frac{1}{2}x^2} |0\rangle \quad (1.83)$$

が x -表示の状態になる。

同様に演算子 \hat{p} の固有状態を作ることもできて、

$$|p\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}(a^\dagger)^2 + i\sqrt{2}a^\dagger p - \frac{1}{2}p^2} |0\rangle \quad (1.84)$$

である。

問題： p の固有状態が (1.84) であることを確かめよ。また、(1.83) を Fourier 変換すると (1.84) が出ることを確かめよ。

¹²このような仮定を置かなくても $N(z)N^*(z)$ は実数となるのだから、 θ を含まないはずである。

¹³この公式は、まず ($\alpha > 0$ の時) $\int_0^\infty dx x e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}$ を証明して、 α で次々に微分していけば証明できる。

1.4 Schrödinger 表示と Heisenberg 表示

1.4.1 Schrödinger 表示での時間発展

Schrödinger 方程式をすなおにブラケット表示で書くと

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \quad (1.85)$$

となる。これを見ると、状態 $|\psi(t)\rangle$ は時間 t に依存している。一方、座標演算子 \hat{x} や運動量演算子 \hat{p} は時間に依存していない。(1.85) を解くと、「形式的な解」として、

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle \quad (1.86)$$

となる。すなわち、 $e^{-iH\delta t}$ をかけることにより、 δt ずつ時間が経過していくことになる。ただし、これはあくまで「形式的な解」であるから、「これで解けた！」と安心してはいけない（演算子である H の \exp がちゃんと計算できる保証はどこにもない）。

なお、演算子の \exp は、

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \quad (1.87)$$

で定義される。このような「テイラー展開」がちゃんと収束するかどうかは、単純にはわからない。

調和振動子の場合など、シュレーディンガー方程式が解ける場合であると、 H を対角化しているの、たとえば $a^\dagger|0\rangle$ という状態にたいしては $H \rightarrow \frac{3}{2}$ とおきかえることができ、 $a^\dagger|0\rangle$ の時間発展は $e^{-i\frac{3}{2}t}a^\dagger|0\rangle$ のように書ける。一般的な状態は

$$\lambda_0 e^{-i\frac{1}{2}t}|0\rangle + \lambda_1 e^{-i\frac{3}{2}t}a^\dagger|0\rangle + \lambda_2 e^{-i\frac{5}{2}t}(a^\dagger)^2|0\rangle + \dots \quad (1.88)$$

のように時間発展する（係数 λ_n は定数である）。

1.4.2 Heisenberg 表示

逆に考えると、

$$|\psi\rangle \equiv e^{i\hat{H}t}|\psi(t)\rangle \quad (1.89)$$

によって $|\psi\rangle$ という状態（これは $|\psi(t=0)\rangle$ に等しい）を定義すると、この状態は時間に依存しない。物理的に観測できるのはある演算子の期待値 $\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ だが、これを $|\psi\rangle(t$ なし) を使って書き直すならば、

$$\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle \quad (1.90)$$

となる。よって、状態 $|\psi(t)\rangle$ を使うことをやめて $|\psi\rangle$ を使う替りに演算子の方も \hat{A} をやめて $\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}$ を使うことにすれば、物理的に観測できる内容については、全く同じ結果を出すことになる。演算子が 2 個以上入っている場合も、

$$\langle\psi(t)|\hat{A}\hat{B}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\underbrace{e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}}_{\hat{A}(t)}\underbrace{e^{i\hat{H}t}\hat{B}e^{-i\hat{H}t}}_{\hat{B}(t)}|\psi\rangle \quad (1.91)$$

と置き換えていけばよい。

$|\psi(t)\rangle$ を使う表示を Schödinger 表示、 $|\psi\rangle$ を使う表示を Heisenberg 表示という。Heisenberg 表示においては、座標演算子は

$$\hat{x}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{x} e^{-i\hat{H}t} \quad (1.92)$$

という形になり、時間に依存する。この式の両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = i(\hat{H} \hat{x}(t) - \hat{x}(t) \hat{H}) = i[\hat{H}, \hat{x}(t)] \quad (1.93)$$

となる。運動量演算子も同様であるので、一般の力学量を表す演算子 $A(\hat{p}, \hat{x})$ に対し、

$$\frac{d}{dt} A(\hat{p}, \hat{x}) = i[\hat{H}, A(\hat{p}, \hat{x})] \quad (1.94)$$

という式が成立する。これを Heisenberg 方程式といい、古典力学での運動方程式に対応する。特に、 A に \hat{p}, \hat{x} を入れると、

$$\frac{d}{dt} \hat{p} = i[\hat{H}, \hat{p}] = -\frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial x} \quad (1.95)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = i[\hat{H}, \hat{x}] = \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial p} \quad (1.96)$$

となって、これはちょうど正準方程式になっている¹⁴。

より一般的には、公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (1.97)$$

があるので、

$$e^{iHt} B e^{-iHt} = B + [iH, B] t + \frac{1}{2} [iH, [iH, B]] t^2 + \frac{1}{3!} [iH, [iH, [iH, B]]] t^3 + \dots \quad (1.98)$$

と考えると、これは $e^{iHt} B e^{-iHt}$ を t の関数としてテーラー展開している形になる ($[iH, *]$ が $\frac{d}{dt}$ と同じ役割を果たすことに注意)。

1.4.3 自由粒子の例

例として、自由粒子の場合で、Heisenberg 表示と Schrödinger 表示を見てみよう。Schrödinger 表示では状態は方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m} |\psi(t)\rangle \quad (1.99)$$

を満たす。この式を p -表示で解くと、ハミルトニアンが数 $\frac{p^2}{2m}$ になるので簡単に解けて、

$$\langle p | \psi(t) \rangle = C e^{-i \frac{p^2}{2m} t} \quad (1.100)$$

となる。すなわち、解は運動量固有値 p で分類される。ケットで書くと解は

$$|p, t\rangle_S = |p\rangle e^{-i \frac{p^2}{2m} t} \quad (1.101)$$

¹⁴ここでの $\frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial p}$ のような微分は、あたかも H が単なる数 x や p の関数だと思って微分して、微分し終わった後で x, p にそれぞれ演算子 \hat{x}, \hat{p} を代入するもの。「演算子演算子で微分する」という計算は定義されていない(できない)。

と書ける。この解は ${}_S\langle p, t | p', t \rangle_S = \delta(p - p')$ と規格化されている (位相定数は 1 に選んだ)。一般解はこの線形結合であり、

$$|\Psi, t\rangle = \int dp f(p) |p\rangle e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (1.102)$$

となる。規格化は

$$\langle \Psi, t | \Psi, t \rangle = \int dp dp' \langle p, t | p', t \rangle f^*(p) f(p') = \int dp |f(p)|^2 = 1 \quad (1.103)$$

のようにされているとしよう¹⁵。

時刻 $t = 0$ で場所 $x = 0$ 付近に粒子が局在しているとする。この状態を

$$\langle x | \alpha; x = 0, t = 0 \rangle = \frac{1}{(\pi\alpha)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2} \quad (1.104)$$

と書こう。まず p 表示を求めておくと、

$$\begin{aligned} \langle p | \alpha; x = 0, t = 0 \rangle &= \frac{1}{(\pi\alpha)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ipx} e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2} \\ &= \frac{1}{(\pi\alpha)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} e^{-\frac{1}{2\alpha}(x+i\alpha p)^2} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} \end{aligned} \quad (1.105)$$

実際の物理的現象としては、粒子の存在確率は広がっていくはずである。Schrödinger 表示ではこの状態が時間が立つことによって変化していく。Heisenberg 表示では時間がたっても状態は変化しない。もちろんこれは「Heisenberg 表示ではいつまでも粒子が局在している」ということを意味するのではない (表示が変わったからといって、物理が変わるはずがない!)。Heisenberg 表示では場所を表す演算子の方が時間発展することで粒子が広がっていくという過程が表されているのである。

Schrödinger 表示で時刻 Δt 後の状態を求めよう。 p -表示で行えば簡単で、 H という演算子が (p -表示では) $\frac{p^2}{2m}$ という固有値に置き換わることを使って、

$$\langle p | e^{-iH\Delta t} | \alpha; x = 0, t = 0 \rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \quad (1.106)$$

となる。これを x -表示に戻すと、

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-iH\Delta t} | \alpha; x = 0, t = 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int dp e^{ipx} e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int dp e^{-\frac{\alpha+i\frac{\Delta t}{m}}{2} \left(p - \frac{i\frac{\Delta t}{m}}{\alpha+i\frac{\Delta t}{m}}x\right)^2} e^{-\frac{1}{\alpha+i\frac{\Delta t}{m}}\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{\alpha+i\frac{\Delta t}{m}}} e^{-\frac{1}{\alpha+i\frac{\Delta t}{m}}\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \quad (1.107)$$

のように計算される (p に関する2次式を完全平方してから、ガウス積分の公式 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$ を、 a が複素数であっても使えるとして拡張して用いた。

¹⁵(1.101) のような平面波の場合、 $f(p') = \delta(p' - p)$ のように選んだことに対応しているから、(1.103) のように規格化することはできない。

粒子が x にいる確率密度はこの絶対値の自乗である $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \frac{\Delta t^2}{m^2}}} e^{-\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \frac{\Delta t^2}{m^2}} \frac{x^2}{2}}$ となり、広がっていくことが確認できた。

Heisenberg 表示では、今考えている状態は時間変化しない。しかし、位置演算子の方が時間発展する。そのため、時刻 t において状態が (1.104) の状態にあっても、それは粒子が局在していることを示さない。実際、 $x(t)^2$ の期待値を計算してみると、

$$\begin{aligned}
\langle x(t)^2 \rangle &= \langle \alpha; x=0, t=0 | e^{i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \hat{x}^2 e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} | \alpha; x=0, t=0 \rangle \\
&= \int dp \langle \alpha; x=0, t=0 | p \rangle e^{i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \langle p | \hat{x}^2 e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} | \alpha; x=0, t=0 \rangle \\
&= \int dp \langle \alpha; x=0, t=0 | p \rangle e^{i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \left(i \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \langle p | \alpha; x=0, t=0 \rangle \\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int dp e^{-\left(\frac{\alpha}{2} - i\frac{\Delta t}{2m}\right)p^2} \left(i \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 e^{-\left(\frac{\alpha}{2} + i\frac{\Delta t}{2m}\right)p^2} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int dp e^{-\left(\frac{\alpha}{2} - i\frac{\Delta t}{2m}\right)p^2} \left(-\left(\alpha + i\frac{\Delta t}{m}\right)^2 p^2 + \left(\alpha + i\frac{\Delta t}{m}\right) \right) e^{-\left(\frac{\alpha}{2} + i\frac{\Delta t}{2m}\right)p^2} \\
&= \left(-\left(\alpha + i\frac{\Delta t}{m}\right)^2 \times \frac{1}{2\alpha} + \left(\alpha + i\frac{\Delta t}{m}\right) \right) \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta t^2}{2m\alpha}
\end{aligned} \tag{1.108}$$

となる。これは Schrödinger 表示での計算から予想されるものと一致する。当然、具体的な物理的意味のある量については、表示によって答えが変わるなどということはある。

よりややこしい計算の時は、Heisenberg 表示と Schrödinger 表示の中間にあたる相互作用表示というものを使う場合もある（後で説明する）。

ここで、minimal packet の形で初期状態を与えて、時間経過によって波動関数がどのように変化していくかを考えたが、実際にはいろんな初期状態について計算する必要がある。そのような場合に便利なものとして、Green 関数または伝播関数と呼ばれる量を計算しておくといよい。今初期状態が $|\psi(t_0)\rangle$ で与えられたとするならば、時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ の x -表示での表現は

$$\langle x | \psi(t) \rangle = \int dx' \langle x | e^{-iH(t-t_0)} | x' \rangle \langle x' | \psi(t_0) \rangle \tag{1.109}$$

と与えられるであろう。この積分の中にある

$$G(x, t; x', t_0) = \langle x | e^{-iH(t-t_0)} | x' \rangle \tag{1.110}$$

を伝播関数または Green 関数と呼ぶ。時刻 t_0 に場所 x' にいた粒子が時刻 t に場所 x に移動している確率振幅密度のようなものである。この伝播関数を計算する方法としてよく使われているのが、次に説明する経路積分である。

経路積分の話に入る前に、Green 関数が満たすべき微分方程式を書き下しておく。

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + H \right) e^{-iH(t-t_0)} = 0 \tag{1.111}$$

であるから、

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + H \right) G(x, t; x', t_0) = 0 \tag{1.112}$$

となりそうだが、そうではない。実はこの計算を行う時に、因果律 $t > t_0$ を仮定している（つまり、 t は t_0 より未来側にあることを暗黙の了解としている）ゆえに、この式には（explicit に書かなかったが）階段関数 $\theta(t - t_0)$ が掛け算されているのである。よって、

$$\begin{aligned} & \left(-i\frac{\partial}{\partial t} + H\right) [\theta(t - t_0)e^{-iH(t-t_0)}] \\ &= -i\frac{d\theta(t - t_0)}{dt}e^{-iH(t-t_0)} + \theta(t - t_0) \left(-i\frac{\partial}{\partial t} + H\right) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= -i\delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (1.113)$$

となる。階段関数 $\theta(x)$ の微分 $\frac{d\theta(x)}{dx}$ がデルタ関数 $\delta(x)$ であることを使った。

$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$ と合わせて、

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} + H\right) G(x, t; x', t_0) &= -i\delta(t - t_0)\delta(x - x') \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + iH\right) G(x, t; x', t_0) &= \delta(t - t_0)\delta(x - x') \end{aligned} \quad (1.114)$$

となる。

Green 関数の定義

一般に、ある微分演算子 \mathcal{D} があって、その微分演算子を掛けると答が δ 関数となるもの、つまり、

$$\mathcal{D}G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.115)$$

を（演算子 \mathcal{D} に対する）「Green 関数」と呼ぶ。

上の $G(x, t; x', t_0)$ は微分演算子 $\frac{\partial}{\partial t} + iH$ に対する Green 関数である。
Green 関数が求まっていると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Phi(\vec{x}) &= \rho(\vec{x}) \\ \Phi(\vec{x}) &= \int d\vec{x}' G(\vec{x}, \vec{x}')\rho(\vec{x}') \end{aligned} \quad (1.116)$$

というふうにして非同次微分方程式を解くことができる（これが正しいことは、両辺に \mathcal{D} をかけて確かめればよい）。いわば、「 G を掛けて積分する」という操作を、 \mathcal{D} の逆演算 \mathcal{D}^{-1} として使うことができるのである。

もっともよく知られている Green 関数はラプラシアン Δ に対する Green 関数

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.117)$$

である。これを使ってポアソン方程式 $\Delta V(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ を解く。 Δ^{-1} を「 $-\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$ をかけて積分する」という操作だと思えばよいのだから、

$$V(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.118)$$

となる。つまり、電荷 q の作る静電場のポテンシャルが $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ であることを示している。いわば、 $\frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{4\pi r}$ ということになる（この式はあくまでイメージを表現したもので、この通りの関係が成立するわけではないので注意！）。

微分は一意的に定まるが、積分は（初期条件や境界条件を定めないと）一つに決まらない。Green 関数は本質的には積分なので初期条件や境界条件なしには一意に決まらないことに注意しよう。たとえば $\frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{4\pi r}$ としていいのは、（物理の常套手段である）「無限遠では0になる」という境界条件がある場合だけである。

1.4.4 Heisenberg 表示での調和振動子

調和振動子の問題を Heisenberg 表示で解いてみる。まず a, a^\dagger が

$$a(t) = e^{iHt} a e^{-iHt}, a^\dagger(t) = e^{iHt} a^\dagger e^{-iHt} \quad (1.119)$$

のように時間発展する。 $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ であり、

$$[iH, a] = [ia^\dagger a, a] = -ia \quad (1.120)$$

であることを使うと、 $[iH,]$ が定数 $-i$ に置き換わると考えて、

$$\begin{aligned} e^{iHt} a e^{-iHt} &= a + [iH, a] t + \frac{1}{2} [iH, [iH, a]] t^2 + \frac{1}{3!} [iH, [iH, [iH, a]]] t^3 + \dots \\ &= a + a(-it) + \frac{1}{2} a(-it)^2 + \frac{1}{3!} a(-it)^3 + \dots \\ &= a e^{-it} \end{aligned} \quad (1.121)$$

のように $a(t)$ が求まる。同様に $a^\dagger(t) = a^\dagger e^{it}$ である。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a(t) + a^\dagger(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a e^{-it} + a^\dagger e^{it}) \\ &= \frac{1}{2} ((x + ip)e^{-it} + (x - ip)e^{it}) \\ &= x \cos t + p \sin t \end{aligned} \quad (1.122)$$

という式が出る。時刻 $t = 0$ では Heisenberg 表示の座標 $x(t)$ と Schrödinger 表示の座標 x は一致する。時間が経つと、Heisenberg 表示の座標は「振動」していくことになる¹⁶。

同様に $p(t) = p \cos t - x \sin t$ となる。

これから $\frac{d}{dt} x(t) = p(t)$, $\frac{d}{dt} p(t) = -x(t)$ が確認できる。確かに Heisenberg 方程式が古典的な運動方程式に一致している。

¹⁶しかし、Heisenberg 表示であろうと Schrödinger 表示であろうと、 x を局在させれば p の方は決まらないのであるから、 $x(t) = x \cos t + p \sin t$ という式を見て「古典力学と同じになった」などと思っては、もちろんいけない。

1.5 経路積分による量子力学

1.5.1 経路積分による確率振幅の計算

Green 関数を求めることで量子力学的状態を系統的に求めていくことができることを前節で述べた。ここではその Green 関数（伝播関数）を求める、もう一つの方法を説明しよう。

伝播関数は初期状態 (q_i, t_i) 、終状態 (q_f, t_f) とすると、

$$\langle q_f, t_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | q_i, t_i \rangle \quad (1.123)$$

である。伝播関数を表現する方法はいろいろあるが、ここでは Schrödinger 表示で表現することにする。

$|q_i, t_i\rangle$ の意味は、「時刻 t_i での演算子 \hat{q} の固有値が q_i の固有状態」である。すなわち、

$$\hat{q}|q_i, t_i\rangle = q_i|q_i, t_i\rangle \quad (1.124)$$

ということである¹⁷。

初期状態 $|q_i, t_i\rangle$ は「時刻 t_i において粒子が q_i という点に局在している」という状態である。これが、ハミルトニアン H にしたがって時間発展し、時刻 t_f においては $e^{-iH(t_f-t_i)}|q_i, t_i\rangle$ という状態になる。その中に、 $|q_f, t_f\rangle$ すなわち、「時刻 t_f において粒子が q_f という点に局在している」という状態がどの程度含まれているかを、 $\langle q_f, t_f |$ を前からかけることによって評価する。

自由粒子のような簡単な模型の場合、この関数の計算も容易であるが、複雑な理論ではけっこうめんどろになる。そのため、この関数を上手に計算する方法をいろいろ知っておかなくてはいけない。その一つの方法が経路積分 (path integral) である。ここでは、上の式を書き直すことで経路積分を導出する。

この式を経路積分に書き直すには、まず時間を微小区間 δt ごとに分割し、

$$e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} = \prod_{I=1}^N e^{-i\hat{H}\delta t} \quad (\delta t = \frac{t_f-t_i}{N}) \quad (1.125)$$

とおく。

$$\begin{array}{ccccccc} e^{-i\hat{H}\delta t} & e^{-i\hat{H}\delta t} & e^{-i\hat{H}\delta t} & \dots & e^{-i\hat{H}\delta t} & e^{-i\hat{H}\delta t} & e^{-i\hat{H}\delta t} & e^{-i\hat{H}\delta t} \\ | & | & | & & | & | & | & | \\ t_f & \delta t & \delta t & & \delta t & \delta t & \delta t & \delta t & t_i \end{array}$$

つまり、時刻を $t_i, t_i + \delta t, t_i + 2\delta t, \dots, t_f - \delta t, t_f$ というふうに、合計 $N + 1$ 個の点に離散化したわけである。

そして、その 1 節ごとに、

$$\int dq_I |q_I\rangle \langle q_I| = 1 \quad (1.126)$$

¹⁷Heisenberg 表示で考える場合は、状態が時間発展しないから計算すべきものは $\langle q_f | \Big|_{t_f} |q_i\rangle \Big|_{t_i}$ となる。この状態 $|q_i\rangle \Big|_{t_i}$ は、「時刻 t_i における座標演算子 $\hat{q}(t_i)$ の固有状態」を表す。時刻が違えば $\hat{q}(t)$ が違うので、違う時刻の $\hat{q}(t)$ にたいする固有状態も違う状態となる。これが、「Heisenberg 表示では状態は時間に依存しない」にもかかわらず、 $\Big|_{t_i}$ のような時刻指定がついている理由である。

という完全系をはさむ。この $|q_I\rangle$ は

$$\hat{q}|q_I\rangle = q_I|q_I\rangle \quad (1.127)$$

を満足する固有状態である。 q_I の添字 I は時間順序を示すが、 q_I それぞれは単なる積分のダミー変数である（量子的な演算子ではなく、数である）。

この 1 を $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の前後にはさんでいくと

$$\begin{aligned} & \int dq_{N-1} \cdots dq_I \cdots dq_2 dq_1 \langle q_f | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \\ & \quad \times \langle q_{I+2} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{I+1} \rangle \langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \langle q_I | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{I-1} \rangle \cdots \\ & \quad \times \langle q_3 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_i \rangle \end{aligned} \quad (1.128)$$

となる。 $q_0 = q_i$ と $q_N = q_f$ については固定されているので積分はない。ここで

$$\langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \quad (1.129)$$

を計算することを考える¹⁸。

\hat{H} の中には演算子 \hat{p}, \hat{q} が入っているはずであるが、このうち \hat{q} は、 $|q_I\rangle$ または $\langle q_{I+1}|$ にあてれば固有値 q_I または q_{I+1} に変わる。ここでは \hat{q} が \hat{p} より右側にあると仮定しよう。この場合、 \hat{H} 中の \hat{q} は全て q_I に変わる¹⁹。残った \hat{p} を処理するため、運動量演算子 $\hat{p}(t_i + I\delta t)$ の固有状態 $|p_I\rangle$ を使って、

$$\int dp_I |p_I\rangle \langle p_I| \quad (1.130)$$

を $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の前にはさむ。すると、 \hat{H} 内の \hat{p} は固有値 p_I になり、 \hat{H} は結局、 $H(p_I, q_I)$ という数に置き換わる。よって (1.129) は、

$$\int dp_I \langle q_{I+1} | p_I \rangle e^{-iH(p_I, q_I)\delta t} \langle p_I | q_I \rangle \quad (1.131)$$

となるが、(1.39) から、 $\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq}$ となることを使えば、

$$\frac{1}{2\pi} \int dp_I e^{i\left(p_I \frac{q_{I+1} - q_I}{\delta t} - iH(p_I, q_{I+1})\right)\delta t} \quad (1.132)$$

のような形の数になる。 $\delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると、 $\frac{q_I - q_{I+1}}{\delta t} = \frac{dq}{dt}$ となることを考えると、求めるべき確率振幅は

$$\langle q_f, t_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | q_i, t_i \rangle = \int Dp Dq e^{i \int (p \frac{dq}{dt} - H)(t_f - t_i)} \quad (1.133)$$

という形になる。ここで

$$Dp Dq = \prod_{I=1}^N \frac{dp_I dq_I}{2\pi} \quad (1.134)$$

は $2N$ 重積分である。 N はいずれも ∞ になるので、無限回の積分を行わなくては行かない。この積分は $q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f$ となるような境界条件をつけて行うとする。

¹⁸Heisenberg 表示で考えているなら、この $e^{-i\hat{H}\delta t}$ の挿入は要らないことになる。しかし、 $\langle q_{I+1}|$ と $|q_I\rangle$ の関係が単純ではないので、その部分を考慮して考えると、結局同じ計算になる。

¹⁹ \hat{p} と \hat{q} が対称な形に入っている時は $\hat{q} \rightarrow \frac{q_I + q_{I+1}}{2}$ と置き換えればよいことが証明できるが、ここでは省略する。

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ のような場合で考えてみると

$$\int DpDqe^{i\int\left(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-V(q)\right)} = \int DpDqe^{i\int\left(-\frac{(p-m\dot{q})^2}{2m}+\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right)} \quad (1.135)$$

p 積分は他と分離しているので先に実行でき、この答えが \mathcal{N} だったとすれば、

$$\mathcal{N} \int Dqe^{i\int\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right)} \quad (1.136)$$

となる。結局、 \exp の肩に $i \times$ (作用) をのせて積分すれば確率振幅が得られるということがわかる。²⁰

このことの意味を古典力学との対応から考えてみる。古典力学においては作用が停留値を取るところが運動方程式の解であった。経路積分を行う時、 I が激しく変化している場所は e^{iI} が速く振動しているということであるから、積分した時の寄与が小さい。積分にもっとも強く効くのは I の変化が小さいところ、すなわち I が停留値を取る付近だということになる。つまりこの積分の結果にもっとも寄与するのは古典的運動方程式の解付近であると言える。

量子力学の特徴として、二つの古典的経路がありえる時、あたかもその両方の経路を通ってきた波が干渉するかのとき現象が起ったが、それも経路積分の立場では両方の経路を対等に積分する必要があるということから理解できる。量子力学から（その近似として）古典力学が導ける理由は、「古典力学的に許される運動」が「ありとあらゆる経路のうち、作用が極値となっているような経路」で表現されるからであった（そうでない経路は重ね合わせによって消されてしまう）。

1.5.2 具体例：自由粒子

自由粒子の確率振幅は経路積分を使わなくても、既に計算したのと同様の方法で容易にわかる。まず p -表示では

$$\langle p_f | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_f-t_i)} | p_i \rangle = e^{-i\frac{(p_f)^2}{2m}(t_f-t_i)} \delta(p_f - p_i) \quad (1.137)$$

となる。 x -表示に持っていくと、

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(x_f-x_i)} e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_f-t_i)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-i\frac{t_f-t_i}{2m} \left(p - \frac{m}{t_f-t_i}(x_f-x_i)\right)^2} e^{-i\frac{m}{2(t_f-t_i)}(x_f-x_i)^2} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_f-t_i)}} e^{-i\frac{m}{2(t_f-t_i)}(x_f-x_i)^2} \end{aligned} \quad (1.138)$$

のように計算できる。

定義通りの経路積分で計算してみよう。 $x(t)$ を、 $x_i, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N, x_f$ のように全部で $N+2$ 個の点に分ける（積分すべきなのは x_i, x_f を除いた N 個である）。 $\dot{x} = \frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t}$ ($\delta t = \frac{t_f - t_i}{N+1}$) と置くことにより、

$$e^{i\int\frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt} \rightarrow \prod_{j=0}^N e^{\frac{im}{2} \left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\delta t}\right)^2 \delta t} \quad (1.139)$$

²⁰ より一般的な場合、これは必ずしも正しくない。 p 積分の結果が定数にならない場合などが有り得る。

となる。ただし、 $x_0 = x_i, x_{N+1} = x_f$ である。これに $\int dx_1 dx_2 \cdots dx_N$ をかけて積分してやればよい。ここで公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ia(x-x_1)^2 + ib(x-x_2)^2} = \sqrt{\frac{i\pi}{a+b}} e^{i\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2} \quad (1.140)$$

を使う。

まず x_1 の積分を考えると、

$$\int dx_1 e^{i\frac{m}{2\delta t}((x_i-x_1)^2 - (x_1-x_2)^2)} = \sqrt{\frac{i\pi\delta t}{m}} e^{-i\frac{m}{4\delta t}(x_i-x_2)^2} \quad (1.141)$$

という形になる。よって x_2 に関する積分は

$$\int dx_2 e^{i\frac{m}{2\delta t}(\frac{1}{2}(x_i-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2)} = \sqrt{\frac{4\pi\delta t}{3m}} e^{i\frac{m}{6\delta t}(x_i-x_3)^2} \quad (1.142)$$

x_3 に関する積分は

$$\int dx_3 e^{i\frac{m}{2\delta t}(\frac{1}{3}(x_i-x_3)^2 + (x_3-x_4)^2)} = \sqrt{\frac{6\pi\delta t}{4m}} e^{i\frac{m}{8\delta t}(x_i-x_4)^2} \quad (1.143)$$

以上の計算から、 x_n の積分では数因子 $\sqrt{\frac{i2n\pi\delta t}{(n+1)m}}$ が現れる。1 から N まで全部積分すると

$$\sqrt{\frac{i2\pi\delta t}{2m}} \times \sqrt{\frac{i2 \cdot 2\pi\delta t}{3m}} \times \sqrt{\frac{i2 \cdot 3\pi\delta t}{4m}} \cdots \times \sqrt{\frac{i2N\pi\delta t}{(N+1)m}} = \left(\sqrt{\frac{i2\pi\delta t}{m}}\right)^N \sqrt{\frac{1}{N+1}} \quad (1.144)$$

という因子が出ることになる。

積分結果の方は、 x_n の積分が終わった時点で、 $e^{i\frac{m}{2(n+1)\delta t}(x_i-x_{n+1})^2}$ となっていることが予想される。結局全積分が終わった時の答えは

$$\langle x_f | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle = \mathcal{N} \left(\sqrt{\frac{i2\pi\delta t}{m}}\right)^N \sqrt{\frac{1}{N+1}} e^{i\frac{m}{2(N+1)\delta t}(x_i-x_f)^2} \quad (1.145)$$

となる。ただし \mathcal{N} は規格化定数で、 p 積分の時点で出てくる数である。 p 積分一回ごとに因子 $\sqrt{\frac{m}{2\pi i}}$ が出るので、 $N+1$ 回の積分があることを考えると $\mathcal{N} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i}}\right)^{N+1}$ となる。 $(N+1)\delta t = t_f - t_i$ であることを使えば

$$\langle x_f | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_f-t_i)}} e^{i\frac{m}{2(t_f-t_i)}(x_i-x_f)^2} \quad (1.146)$$

となって、ハミルトン形式の答えと一致する²¹。

²¹ 同じ答えを出すならば経路積分を使う意味などないのではないかと思うかもしれないが、より複雑な計算を行う時には、経路積分の考え方が役に立つ。

第2章 相対論的な波動方程式から、場の理論へ

2.1 Klein-Gordon 方程式

2.1.1 Klein-Gordon 方程式を作る

古典的なエネルギー・運動量の関係 $E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V$ を翻訳した結果がシュレーディンガー方程式であった。同様に相対論的な方程式を作ることを考えてみる。相対論においてはエネルギーは運動量の第0成分となり、エネルギーと運動量の関係は $E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4$ となる。記述を簡便にするために、以後は $c = 1, \hbar = 1$ となる単位（自然単位系）を使って式を書く。すると $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$ であって、 $E = i\frac{\partial}{\partial t}, \vec{p} = -i\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ であるから、

$$\left(\underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{e^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}}_{-|\vec{p}|^2} \right) \phi = m^2 \phi \quad (2.1)$$

という式が出そうである。この式を Klein-Gordon 方程式と呼ぶ¹。この式は時間に関して二階の微分を含んでおり、それゆえシュレーディンガー方程式と大きく性質が違ふ。解は

$$\phi = Ae^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \quad (\text{ただし、} E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2) \quad (2.2)$$

という形になり、シュレーディンガー方程式と同じに見えるが、 E の値が $\pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ となり、マイナスのエネルギーに対応する解も許すという点が大きく異なる。後でくわしく説明するが「マイナスエネルギーは非物理的なので」とか言ってこの負エネルギー解を単に捨ててしまったりすると、逆にいろいろ困ったことが起こる。この負エネルギー問題は相対論的に量子力学を考えようとする限り、不可避な困難なのである。

相対論的表現であることを明白にするには、 $t = x^0$ とおいて、時間座標を第0成分として扱って、

$$-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = m^2 \phi \quad (2.3)$$

のように書く。ただし $\eta^{\mu\nu}$ は $\eta^{00} = 1, \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$ で、それ以外はすべて0であるようなテンソルである（Minkowski 計量テンソルと呼ばれる）。

エネルギーも $E = p^0$ として考える。 $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$ という条件は、

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \quad (2.4)$$

と書ける。 $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ という置き換えが行われていると思えば、 $E = i\partial_t, \vec{p} = -i\vec{\partial}$ が一つの式で書ける。また、波動方程式の解は、

$$\phi = Ae^{-ip_\mu x^\mu} \quad (2.5)$$

¹実はシュレーディンガーはシュレーディンガー方程式より前にこの式をたててみたのだが、これを使って水素原子の問題を解くと、正しい答えが出なかったので破棄している。水素原子の問題を相対論的に考えて正しく解くには、後で出てくる Dirac 方程式を使わなくてはならない。

と書ける。

ここで注意すべきことは、二階微分方程式であるということは、初期値として ϕ と $\partial_t \phi$ の両方を与えないと問題が解けないということでもある。シュレーディンガー方程式の場合は、ある時刻の ψ を与えれば問題は解けていた。

2.1.2 Klein-Gordon 方程式の問題点

シュレーディンガー方程式を満たす ψ の場合保存量が $\int \psi^* \psi dx$ であったが、Klein-Gordon 方程式の場合の保存量は $i \int (\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi)$ である²。これが保存することを確認しよう。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(i \int (\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi) \right) dx &= i \int (\partial_t (\partial_t \phi^* \phi) - \partial_t (\phi^* \partial_t \phi)) dx \\
 &= i \int \left((\partial_t)^2 \phi^* \phi + \partial_t \phi^* \partial_t \phi - \partial_t \phi^* \partial_t \phi - \phi^* (\partial_t)^2 \phi \right) dx \\
 &= i \int \left(((\partial_t)^2 \phi^*) \phi - \phi^* ((\partial_t)^2 \phi) \right) dx \tag{2.6} \\
 &= i \int \left((((\partial_x)^2 - m^2) \phi^*) \phi - \phi^* (((\partial_x)^2 - m^2) \phi) \right) dx \\
 &= i \int \left(((\partial_x)^2 \phi^*) \phi - \phi^* ((\partial_x)^2 \phi) \right) dx
 \end{aligned}$$

ここで下から2行目では Klein-Gordon 方程式を使っている。部分積分で表面項が消えたとすれば、この式の第1項と第2項は消し合うので、この式は0となる。

このように Klein-Gordon 方程式の場合も保存量が見つかるが、逆にシュレーディンガー方程式の場合に保存量となる $\int \psi^* \psi dx$ にあたる、 $\int \phi^* \phi dx$ は一般に保存しない（時間の一階微分は方程式から決まらないから、これが保存するよう願うことは無意味である）。

$\int \psi^* \psi dx$ が保存することはすなわち、全確率が保存することであった。では相対論的量子力学では、確率が保存しなくなってしまうのであろうか？

「では、 $(i \int (\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi)) dx$ を確率だと解釈すればいいではないか」と思うかもしれないが、これはうまくいかない。なぜならこの量はプラスにもマイナスにもなり得る量なのである。 $\int \psi^* \psi dx$ は必ず0以上であったので確率と解釈できたが、そうはいかないということになる。

この計算では部分積分の表面項を無視したが、無視しなければどんな式が出るのかを書いておこう。

$$\begin{aligned}
 & i \int \left(((\partial_x)^2 \phi^*) \phi - \phi^* ((\partial_x)^2 \phi) \right) dx \\
 &= i \int (\partial_x ((\partial_x \phi^*) \phi) - \partial_x \phi^* \partial_x \phi - \partial_x (\phi^* (\partial_x \phi)) + \partial_x \phi^* \partial_x \phi) dx \tag{2.7} \\
 &= i \int (\partial_x ((\partial_x \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_x \phi))) dx
 \end{aligned}$$

まとめると

$$i \int \partial_t (\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi) = i \int (\partial_x ((\partial_x \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_x \phi))) dx \tag{2.8}$$

であるが、この計算では部分積分を行っていないのだから、この式は任意の積分範囲で成立することとなり、積分をはずしてもよい。つまり、

$$i \partial_t (\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi) = i \partial_x ((\partial_x \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_x \phi)) \tag{2.9}$$

²このような保存量はどのように求めたらいいかというと、Noether の定理という一般的法則を使うとよい。これについては後で述べる。

ということが言える。密度 ρ で流れ密度 \vec{j} の時の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j} \quad (2.10)$$

と比較すると、

$$\rho = i(\partial_t \phi^* \phi - \phi^* \partial_t \phi) \quad (2.11)$$

$$j_x = i(\phi^* (\partial_x \phi) - (\partial_x \phi^*) \phi) \quad (2.12)$$

という関係になっていることがわかる。

$$J_\mu = i(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi) \quad (2.13)$$

とすれば、 $J_0 = \rho$, $J_1 = -j_x$, $J_2 = -j_y$, $J_3 = -j_z$ である (ρ と j_x では微分の位置が逆なのでマイナス符号をつけておいた)。これは $J^0 = \rho$, $J^1 = j_x$, $J^2 = j_y$, $J^3 = j_z$ ということであり、連続式が

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.14)$$

とまとまる。つまり、 J^0 がなんであれ (何と解釈すべきかは後で述べる)、保存する量であり、その流れ密度に対応する量が J^i である。

2.2 Dirac 方程式とその解

2.2.1 Dirac 方程式

ここまでの話からわかるように、一階の微分方程式で表せて、 $\int \psi^* \psi dx$ がちゃんと保存量になるような相対論的な方程式を作ることは難しい。Dirac は変数であるところの ψ を 4 成分の列ベクトルにするという離れ業でこの難しいことを成功させた。ここではまず結果を述べ、それが確かに相対論的方程式となっていることを確認していく。

Dirac 方程式は

$$(i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{ab} - m\delta_{ab}) \psi_b = 0 \quad (2.15)$$

と表せる (行列の足 a, b は省かれることが多い)。 ψ は複素 4 成分の量で、スピノルと呼ばれる。 γ^μ は 4×4 の行列であり、

$$(\gamma^\mu)_{ab} (\gamma^\nu)_{bc} + (\gamma^\nu)_{ab} (\gamma^\mu)_{bc} = 2\eta^{\mu\nu} \delta_{ac} \quad (2.16)$$

という反交換関係を満たす行列である。

この反交換関係を行列表示で書くと

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

となる。 $\{A, B\} = AB + BA$ という記号を使っている。

つまり γ は $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^1 \gamma^1 = -1$ となるような行列で、 μ, ν が等しくない時は $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$ となる。

Dirac 方程式が Klein-Gordon 方程式を含んでいることは、前から行列 $(i\partial_\nu (\gamma^\nu)_{ca} + m\delta_{ca})$ をかけてやると、

$$\begin{aligned} (i\partial_\nu (\gamma^\nu)_{ca} + m\delta_{ca}) (i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{ab} - m\delta_{ab}) \psi_b &= 0 \\ (-\partial_\nu \partial_\mu (\gamma^\nu)_{ca} (\gamma^\mu)_{ab} + im\partial_\mu (\gamma^\mu)_{cb} - im\partial_\nu (\gamma^\nu)_{cb} - m^2 \delta_{cb}) \psi_b &= 0 \\ (-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \delta_{cb} \psi_b &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

となることからわかる。ここで、微分の対称性から、

$$\partial_\nu \partial_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \partial_\nu \partial_\mu \frac{\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}}{2} \quad (2.19)$$

となることを使っている。

そもそも Dirac は、Klein-Gordon 方程式から出発して微分を1階の方程式が作れないか、という議論から Dirac 方程式を作った。いわば $-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2$ の「平方根」にあたる演算子として、 $(i\partial_\mu (\gamma^\mu)_{ab} - m\delta_{ab})$ を作ったのである。そのような演算子を作るには、どうしても行列を登場させざるを得ず、結果として波動関数にあたる ψ も4成分の量となった（この γ -行列は 4×4 以上の行列でなくてはならない）。

$$a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} a_\mu b_\nu + \frac{1}{2} a_\mu b_\nu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.20)$$

という公式が使えるので覚えておこう。今後このように γ 行列と4元ベクトルの内積の形の行列がよく出てくる。これらを $\not{\phi} = a_\mu \gamma^\mu$ と書く。この表示を使って書いた Dirac 方程式は、

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2.21)$$

と書ける。

通常、 γ^0 を Hermite 行列、 γ^i を反 Hermite 行列と選ぶ。このようにすると、 $\gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0$ なので、 $\gamma^0 \gamma^i = (\gamma^i)^\dagger \gamma^0$ と書ける。すなわち、 γ^i は γ^0 と交換させることによって、 \dagger が取れる（あるいは付く）。

ここで、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

という表示を使う（ σ は Pauli 行列。ここでの1や0は 2×2 の単位行列や零行列である）。この行列が反交換関係を満たすことは実際に計算すれば確認できる。

この場合、

$$\gamma^\mu k_\mu = \begin{pmatrix} k_0 & -k_i \sigma_i \\ k_i \sigma_i & -k_0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

である。特に粒子が静止している時 ($k^i = 0$)、Dirac 方程式の前にかかる行列は

$$\gamma^\mu k_\mu - m = \begin{pmatrix} k_0 - m & 0 \\ 0 & -k_0 - m \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

となることに注意せよ。この場合、上の2成分は $k_0 = m$ (正エネルギー解)、下の2成分は $k_0 = -m$ (負エネルギー解) ということになる。正エネルギーに限ってもまだ2成分あることになるが、これはスピンのアップダウンに対応している。

2.2.2 Dirac 方程式の解

Dirac 方程式の解として、

$$\psi(x) = u(k_i, s) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}, \quad \psi(x) = v(k_i, s) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.25)$$

をとる。ここで $\omega = \sqrt{k_i^2 + m^2}$ である。 u は正エネルギー解、 v は負エネルギー解である。 $u_\alpha(k_i, s), v_\beta(k_i, s)$ はあわせて4成分の量であるから、各々について $s = 1, -1$ の2成分がある。 s はスピンの2成分を区別する足である。Dirac 方程式に代入すると

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u(k_i, s) = 0, \quad (\gamma^\mu k_\mu + m)v(k_i, s) = 0 \quad (2.26)$$

となる。ただし、上の式、および以下しばらくでは、 $k^0 = \omega$ であり、常に k^0 は正である。

この表示から、

$$u(k_i, s) = (\gamma^\mu k_\mu + m) \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(k_i, s) = (\gamma^\mu k_\mu - m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_s \\ b_s \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

と選ぼう。ここで $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}$ は長さ $a_s^* a_s + b_s^* b_s$ が 1 となる 2 成分の列ベクトルで、ラベル s によって表現される二つの状態とする。 s が違うものは直交すると選ぶ。一番簡単なのは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と選ぶことである。

これが (2.26) を満たしていることは、

$$(\gamma^\mu k_\mu + m)(\gamma^\mu k_\mu - m) = (\gamma^\mu k_\mu - m)(\gamma^\mu k_\mu + m) = k^2 - m^2 = 0 \quad (2.28)$$

からわかる。

このように選ぶと、静止状態 ($k_i = 0, k_0 = m$) では

$$u(0, s) = 2m \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0, s) = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_s \\ b_s \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

となり、静止状態でも (2.26) を満たす形となっている。

以上からわかるように、Dirac 方程式でも負エネルギーの問題は出てくる。Klein-Gordon 方程式の場合、時間に関して二階（つまりエネルギー p^0 の自乗の形）の方程式であったために負エネルギーが出てきた。Dirac 方程式は時間に関して一階（ p^0 の一次）ではあるが、波動関数にあたる ψ が 4 成分ある関係上、その値がプラスの場合とマイナスの場合が出てきてしまい、やはりマイナスエネルギーの問題は避けられない。ただ、確率密度に対応するものとして、 $\psi^* \psi$ を考えることはよさそうである。ただし、この $\psi^* \psi$ は実際には $\psi^\dagger \psi$ と書くべきで、その実体は、

$$(\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

のような行列の内積である。

$\rho = \psi^\dagger \psi$ とした時に流れ密度 \vec{j} に対応するのはどんな量なのかを計算しておこう。Dirac 方程式に前から γ^0 をかけると、

$$\gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = i\partial_t \psi + (i\gamma^0 \gamma^k \partial_k - m\gamma^0)\psi \quad (2.31)$$

となることから、

$$\partial_t \psi = -(\gamma^0 \gamma^k \partial_k + im\gamma^0)\psi \quad (2.32)$$

となることを使う。

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= (\partial_t \psi^\dagger) \psi + \psi^\dagger \partial_t \psi \\ &= -\left((\gamma^0 \gamma^k \partial_k + im\gamma^0) \psi \right)^\dagger \psi - \psi^\dagger (\gamma^0 \gamma^k \partial_k + im\gamma^0) \psi \\ &= -\partial_k \psi^\dagger (\gamma^k)^\dagger (\gamma^0)^\dagger \psi - \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \partial_k \psi \\ &= -\partial_k \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi - \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \partial_k \psi \\ &= -\partial_k (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi) \end{aligned} \quad (2.33)$$

これから、流れ密度は $J^k = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi$ である。

$$J^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \quad (2.34)$$

なので、まとめて、

$$J^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \quad (2.35)$$

と書くことができる。以後、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ という表記を使う。これを使えば、

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.36)$$

である。

実は当たり前のことなのであるが、保存する密度 ρ は4元ベクトル J^μ の第0成分である。ということはすなわち、

$$(x')^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (2.37)$$

$$(x')^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad (2.38)$$

のように座標がローレンツ変換 ($\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$) すると

$$(J')^1 = \gamma(J^1 - \beta J^0) \quad (2.39)$$

$$(J')^0 = \gamma(J^0 - \beta J^1) \quad (2.40)$$

のような形で J^0 の成分も変化するということである。つまり密度はスカラーではない。密度が (ローレンツ不変な何か) ÷ (体積) のように定義されているとすると、体積がローレンツ不変でないのだから、密度がローレンツ不変な量として定義されるはずはなく、このような結果が出たことは必然であったと言える。

2.2.3 ローレンツ変換

では、 J^μ が正しくベクトルとして変換するためには、Dirac 場 ψ はいったいどのような変換を受ければいいのか、それを考えてみよう。そのため、ここで「無限小のローレンツ変換」を定義する。そもそもローレンツ変換は $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ が不変に保たれるような一次変換であった。そこでその変換を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.41)$$

として、定数係数 $\omega^{\mu\nu}$ を微小量だと考える。すると、 $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ が不変であるという条件は

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu} (dx^\mu + \omega^{\mu\mu'} dx_{\mu'}) (dx^\nu + \omega^{\nu\nu'} dx_{\nu'}) \\ \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \eta_{\mu\nu} \omega^{\mu\mu'} dx_{\mu'} dx^\nu + \eta_{\mu\nu} dx^\mu \omega^{\nu\nu'} dx_{\nu'} \\ 0 &= \eta_{\mu\nu} (\omega^{\mu\mu'} + \omega^{\nu\nu'}) dx_{\mu'} dx_{\nu'} \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる。ゆえに、 $\omega^{\mu\mu'} = -\omega^{\mu'\mu}$ であればよい。このような条件を満たす $\omega^{\mu\nu}$ の独立な成分は6つであり、ローレンツ変換の6つの独立な成分 (3次元回転+3つの方向への boost³) とちょうど同じ数であるから、この $\omega^{\mu\nu}$ でローレンツ変換はつきている。

³ $x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$ の形のローレンツ変換は boost と呼ばれる。これは x 方向、 y 方向、 z 方向の3つがある。

たとえば、 ω^{12} によって作られるローレンツ変換は

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow x'^1 = x^1 + \omega^{12}x_2 = x^1 - \omega^{12}x^2 \\ x^2 &\rightarrow x'^2 = x^2 + \omega^{21}x_1 = x^2 + \omega^{12}x^1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

である。これはつまり行列 $-iL_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ によって生成される変換である。微小な

パラメータ ω^{12} によって

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (1 - i\omega^{12}L_z) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

と変換されるならば、有限のパラメータ θ によって、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \exp[-i\theta L_z] \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

という変換が行われる。ここで行列計算をまじめに行うと、

$$\exp[-i\theta L_z] = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

となり、これは確かに回転の行列である (ω^{23}, ω^{31} による変換も同様)。 ω^{01} による変換は、

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow x'^0 = x^0 + \omega^{01}x_1 = x^0 - \omega^{01}x^1 \\ x^1 &\rightarrow x'^1 = x^1 + \omega^{10}x_0 = x^1 - \omega^{01}x^0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

であるから、行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ による変換である。同様に \exp して考えると

$$\begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

である。これは、 $\cosh \theta = \gamma, \sinh \theta = \beta\gamma$ と置き換えれば、ローレンツ変換そのものである (この置き換えはちゃんと $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ を満たしている)。

さて、 $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ に戻る。これをローレンツ変換した時、

$$\psi \rightarrow \psi' = (1 + \omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu})\psi \quad (2.49)$$

と変換されるとする。\$S_{\mu\nu}\$ は \$4 \times 4\$ の行列で、その詳細は今から定める。この変換により、

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger \left(1 + \omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}^\dagger\right) \quad (2.50)$$

となるから、\$J^\mu\$ の変換は

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger \left(1 + \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^\dagger\right) \gamma^0 \gamma^\mu \left(1 + \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\right) \psi \quad (2.51)$$

となる。\$\omega^{\alpha\beta}\$ の一次までで整理すると、

$$\begin{aligned} & \psi^\dagger \left(1 + \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^\dagger\right) \gamma^0 \gamma^\mu \left(1 + \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}\right) \psi \\ = & \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi + \psi^\dagger \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi + \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \psi \\ = & \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi + \omega^{\alpha\beta} \psi^\dagger \left(S_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0 \gamma^\mu S_{\alpha\beta}\right) \psi \end{aligned} \quad (2.52)$$

\$J^\mu\$ がベクトルであるためには、これが \$J^\mu + \omega^{\mu\nu} J_\nu\$ という形にまとまって欲しい。そのためには、

$$S_{\alpha\beta}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0 \gamma^\mu S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^0 \left(\delta_\alpha^\mu \gamma_\beta - \delta_\beta^\mu \gamma_\alpha\right) \quad (2.53)$$

という形になればよい。このような行列 \$S_{\alpha\beta}\$ は、\$\gamma^\mu\$ の性質を使うと探すことができ、答は

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (2.54)$$

である。検算しよう。まず、\$\gamma^\mu\$ は \$\gamma^0\$ を通すと \$\dagger\$ が取れるという性質があったので、

$$-\frac{1}{8} [\gamma_\alpha^\dagger, \gamma_\beta^\dagger] \gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = -\frac{1}{8} \gamma^0 ([\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \gamma^\mu - \gamma^\mu [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]) \quad (2.55)$$

となる。上で、\$S^\dagger\$ を計算するとき、\$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]^\dagger = -[\gamma_\alpha^\dagger, \gamma_\beta^\dagger]\$ としていることに注意（\$\dagger\$ は交換関係の符号を変える）。

ここで、

$$\begin{aligned} & [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \gamma^\mu - \gamma^\mu [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \\ = & \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu - \gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha \\ = & \gamma_\alpha \{\gamma_\beta, \gamma^\mu\} - \gamma_\beta \{\gamma_\alpha, \gamma^\mu\} - \{\gamma^\mu, \gamma_\alpha\} \gamma_\beta + \{\gamma^\mu, \gamma_\beta\} \gamma_\alpha \\ = & 4\gamma_\alpha \delta_\beta^\mu - 4\gamma_\beta \delta_\alpha^\mu \end{aligned} \quad (2.56)$$

となることから、(2.53) が証明された。

なお、ローレンツ変換を

$$\psi \rightarrow \psi' = \left(1 + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}\right) \psi \quad (2.57)$$

とにおいて、

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (2.58)$$

とする教科書が多い。

一つの例で、この変換がどのようなものかを見ておこう。

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{1}{4i} [\gamma_1, \gamma_2] \\ &= \frac{1}{4i} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4i} \left[\begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ なので、

$$S_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

となる。ゆえに、 ω^{12} のみが0でない時のスピノルのローレンツ変換は

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\omega^{12} \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \right) \psi \quad (2.61)$$

であり、有限角度の場合は、

$$\psi' = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta} & & & \\ & e^{\frac{i}{2}\theta} & & \\ & & e^{-\frac{i}{2}\theta} & \\ & & & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix} \psi \quad (2.62)$$

となる。これからわかるように、スピノルは座標系の回転に対して、ベクトルの場合の半分の角度回転する。顕著な例として $\theta = 2\pi$ であっても元に戻らず、符号が反転する。実際に測定可能な量は $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ のような ψ の2次の量であるから、測定可能な量については 2π 回転して元に戻るといふ「健全な性質」を持っている。

2.2.4 内積と直交関係

ここで u の内積を計算してみる。

$$\begin{aligned} \bar{u}(k_i, s)u(k_i, s') &= \begin{pmatrix} a_s^* & b_s^* & 0 & 0 \end{pmatrix} (\gamma^{\dagger\mu}k_\mu + m)\gamma^0(\gamma^\mu k_\mu + m) \begin{pmatrix} a_{s'} \\ b_{s'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_s^* & b_s^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0(\gamma^\mu k_\mu + m)^2 \begin{pmatrix} a_{s'} \\ b_{s'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_s^* & b_s^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0(k^2 + m^2 + 2m\gamma^\mu k_\mu) \begin{pmatrix} a_{s'} \\ b_{s'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

となるが、 $\begin{pmatrix} a_s^* & b_s^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{s'} \\ b_{s'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ではさむ計算をすると、 4×4 行列を 2×2 行列4つに分けて

考えた場合の左上部分だけが残る。ここに要素がない γ^i に比例する部分は消え、 γ^0 および単位行列に関してはここは1である。さらに $k^2 = m^2$ を使って整理すると、上の式の計算結果は $2m(m + k_0)\delta_{ss'}$ となる。ここで規格化定数 $\frac{1}{\sqrt{m + k_0}}$ を u に付け加えてやると、

$$u(k_i, s) = \frac{1}{\sqrt{(m + k_0)}} (\gamma^\mu k_\mu + m) \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

と書き直せて、その内積は

$$\bar{u}(k_i, s)u(k_i, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (2.65)$$

となる。同様に v の内積を (規格化定数を付け加えた後に) 計算すると、

$$v(k_i, s) = \frac{1}{\sqrt{k_0 - m}}(\gamma^\mu k_\mu - m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_s \\ b_s \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

と置いたとき ($k_0 > m$ に注意)、

$$\bar{v}v = -2m\delta_{ss'} \quad (2.67)$$

である。また、 u, v の内積 $\bar{u}v, \bar{v}u$ は 0 となる。

この4つの成分 u_s, v_s は完全系をなす。すなわち、任意のスピノルの運動量 k の成分 $\Psi(k)$ は

$$\Psi(k) = \sum_s (\Psi_{1s}(k)u(k, s) + \Psi_{2s}(k)v(k, s)) \quad (2.68)$$

と書ける。展開係数は $\Psi_{1s} = \frac{1}{2m}\bar{u}(k, s)\Psi$, $\Psi_{2s} = -\frac{1}{2m}\bar{v}(k, s)\Psi$ で求められる。これを代入すると

$$\Psi = \frac{1}{2m} \sum_s (u(k, s)\bar{u}(k, s)\Psi - v(k, s)\bar{v}(k, s)\Psi) \quad (2.69)$$

となるので、

$$\frac{1}{2m} \sum_s (u_s\bar{u}_s - v_s\bar{v}_s) = 1 \quad (2.70)$$

と置いてよいことがわかる (u, v の完全性の式)。

任意のスピノルから、 u 成分のみを取り出す演算子を u 成分への射影演算子と言う。この演算子は定義から、

$$\frac{1}{2m} \sum_s u_s\bar{u}_s = \frac{1}{4m(m+k_0)}(\gamma^\mu k_\mu + m)\frac{1+\gamma^0}{2}(\gamma^\mu k_\mu + m)\gamma^0 \quad (2.71)$$

とかける。ここで真中に出てくる行列 $\frac{1+\gamma^0}{2}$ は、

$$\sum_s \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (a_s^* \ b_s^* \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

からくる。ここで、 $(\not{k} + m)(\not{k} - m) = 0$ から、

$$(\not{k} + m)(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(\not{k} - m + 2m) = 2m(\not{k} + m) \quad (2.73)$$

$$(\not{k} + m)\gamma^0(\not{k} + m) = (\not{k} + m)(k_0\gamma^0 - k_i\gamma^i + m)\gamma^0 = (\not{k} + m)(2k_0\gamma^0 - k_\mu\gamma^\mu + m)\gamma^0 = 2k_0(\not{k} + m) \quad (2.74)$$

という公式が出せるので、これを使うと、

$$\frac{1}{2m} \sum_s u_s\bar{u}_s = \frac{1}{4m(m+k_0)}(\gamma^\mu k_\mu + m)(2m + 2k_0) = \frac{1}{2m}(\gamma^\mu k_\mu + m) \quad (2.75)$$

のように計算できる。同様に、 v 成分への射影演算子は

$$-\frac{1}{2m} \sum_s v_s \bar{v}_s = -\frac{1}{2m} (\gamma^\mu k_\mu - m) \quad (2.76)$$

である。まとめると $\sum_s u_s \bar{u}_s = \not{k} + m$, $\sum_s v_s \bar{v}_s = \not{k} - m$ となる。

偶数次元では、 $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \dots$ と全ての γ 行列をかけた行列が重要な役割を果たす。4次元では $i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5$ (i をかけるのはエルミート行列にするため) と表す。 γ_5 は他の全ての γ 行列と反交換し、 $(\gamma_5)^2 = 1$ である。質量が0のDirac方程式 $i\not{\partial}\psi = 0$ を考えると、 γ_5 の性質のため、 ψ が γ_5 の固有状態であれば、その固有値は時間的に変化しない。

そのため、質量0のディラック方程式の解は $\gamma_5 = 1$ という固有値を持つ成分 (左巻成分) と $\gamma_5 = -1$ という固有値を持つ成分 (右巻成分) に別れる。この一方だけの成分を持つフェルミオンをワイル・フェルミオンと呼ぶ。

2.2.5 負エネルギーの解釈—Diracの空孔理論とその問題点

Diracは負エネルギーの解釈を、以下のようにして行った。

「もし負エネルギーが存在するとすれば観測される粒子がどんどん負エネルギーに落ち込んでしまう」というのが負エネルギー解の問題点であった。そこで、負エネルギーに落ち込むことを阻止するメカニズムがあれば問題はない。Diracはこの方程式は電子などのフェルミ統計に従う粒子を記述していると考えた。フェルミ統計に従う粒子は、同じ状態に二つ以上はいることはできない (パウリの排他律)。そこで「負エネルギーの状態にはすでに粒子が入っていて、これ以上はいることはできない」と考えれば、観測される粒子が負エネルギーに落ち込まないことの説明がつく。その代わりに、我々が「真空」と観測する状態は実は「負エネルギー電子が充満した状態」だということになる (これを「Diracの海」と呼ぶ)。

Diracはさらに、このDiracの海に隙間 (すなわち、充填されていない状態) があると、それは負エネルギーの欠損であるから、正エネルギー状態と観測されることに気づいた。つまり、この「穴」も立派な粒子として観測されることになる。ただし、この穴は通常粒子とは逆の電荷を持っていることになる。

以上のようにして、この理論は電子に対して、電荷が逆符号 (つまりプラス) で、質量などは同じであるような粒子 (陽電子) が存在することを予言する。Diracの予言の後すぐ、実際に宇宙線の中に陽電子がみつき、この解釈はある程度の成功をおさめた。

しかし、現代的な解釈としては「Diracの海」のように考えない。そもそも、この解釈には、いくつか疑問がある。一つには無限個の負エネルギー電子で空間が満たされているとしたら、その電子が作る電磁場はどこにあるのか (実際にはもちろんない) ということである。もう一つは、この解釈はフェルミ粒子でないとうまくいかない。ボース粒子に対してはどう考えればよいのか、よくわからない。

以上のことから、Dirac方程式、およびこの方程式に現れる ψ に対する解釈として、これをシュレーディンガー方程式の ψ と同列に、「1粒子の波動関数」として扱うことには無理がある。むしろ、電子の集団を記述していると考えた方がいいのではないか、という考え方が生まれた。これが「場の理論」の考え方である。場の理論の考え方については次の章でくわしく述べることにして、以下ではKlein-Gordon方程式の解の性質をもう少し調べておくことにする。

2.3 Klein-Gordon 方程式の解

2.3.1 平面波解

Klein-Gordon 方程式を解くために、 $\phi(x)$ をフーリエ変換する。

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \phi(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \quad (2.77)$$

ここでの $\phi(x)$ は4次元の x (つまり、 x, y, z, t) の関数であり、 $\phi(p)$ も4次元の $p(p^0, p^1, p^2, p^3)$ の関数である。それぞれの積分範囲は $(-\infty, \infty)$ であって、何の制限もない。これを Klein-Gordon 方程式に代入すれば、

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p (-\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2) \phi(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = 0 \quad (2.78)$$

となるので、 $\phi(p)$ は $\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = 0$ である時のみ0ではない。つまり、 $p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ あるいは $p^0 = -\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ の時のみ、 $\phi(p) \neq 0$ である。そこで、 $\omega = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ として、

$$\phi(p) = A(\vec{p}) \delta(p^0 - \omega) + B(-\vec{p}) \delta(p^0 + \omega) \quad (2.79)$$

とすれば、これが解である。これを元の式に代入すると、

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{p} (A(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + B(\vec{p}) e^{i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (2.80)$$

となる (p^0 積分が終わった後)。慣例として、

$$A(\vec{p}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{p}), \quad B(\vec{p}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\omega}} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (2.81)$$

と書く。これを使うと、

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(-\vec{p}) e^{i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (2.82)$$

となる。こうしておいて、 b^\dagger の項の方だけ、 $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ と置き換える (積分範囲は全空間なので、これをやっても大丈夫)。すると、

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{p}) e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (2.83)$$

となる。このように書いておくと、このエルミート共役は

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (b(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p}) e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (2.84)$$

と書くことができる。 $e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ (またはこの複素共役) が Klein-Gordon 方程式の平面波解である。

2.3.2 時空の一点から広がる解

今求めたのは一般解であるので、適当な初期値を与えた場合の解を出す。ここで気をつけなくてはならないのは、Klein-Gordon 方程式は二階微分の方程式であるから、初期として $\phi(\vec{x}, t = 0)$ を与えただけではだめで、 $\partial_t \phi(\vec{x}, t = 0)$ も与えなくては解が決まらない。

初期条件としてできるだけ簡単なものをとということで、まず

$$\phi(\vec{x}, t = 0) = 0 \quad (2.85)$$

を与える。こう与えても、すべての $\phi(\vec{x}, t)$ が 0 になつたりはしない。この条件は、

$$\phi(\vec{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(-\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) = 0 \quad (2.86)$$

という式になるから、

$$a(\vec{p}) + b^\dagger(-\vec{p}) = 0 \quad (2.87)$$

ということになる ($a(\vec{p}) = b^\dagger(-\vec{p}) = 0$ ではないことに注意)。前に、負エネルギー解を勝手に消去してはいけない、と書いたが、負エネルギー解すなわち b^\dagger の項がないと、この段階ですべての $\phi(x)$ が 0 になってしまうことがわかる。

次に、一階微分にも条件をつけるが、さすがに $\partial_t \phi(\vec{x}, 0) = 0$ としたら、すべての $\phi(\vec{x}, t) = 0$ となってしまうので、

$$\partial_t \phi(\vec{x}, t = 0) = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.88)$$

とする。つまり原点 ($\vec{x} = 0$) でだけ、 ϕ が時間変化しているとするのである。この条件は

$$\partial_t \phi(\vec{x}, 0) = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(a(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - b^\dagger(-\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.89)$$

という式になる。

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \delta^3(\vec{x}) \quad (2.90)$$

であることを考えると、

$$\begin{aligned} \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(a(\vec{p}) - b^\dagger(-\vec{p}) \right) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \\ a(\vec{p}) - b^\dagger(-\vec{p}) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

ということがわかる。ゆえに、

$$a(\vec{p}) = -b^\dagger(\vec{p}) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \quad (2.92)$$

が解であることがわかる。代入すると、

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega} \left(e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} - e^{i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (2.93)$$

となることがわかる。

この積分の実行はめんどろなので省略して答えを書くと、

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(t) \delta(x^2) - \frac{m^2}{4\pi} \epsilon(t) \begin{cases} \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} & x \text{ が時間的} \\ 0 & x \text{ が空間的} \end{cases} \quad (2.94)$$

となる。 x が時間的とは $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ ということである（空間的はこの逆）。空間的な時はつまり $ct < |x|$ ということ。この時この解が0になるということは、原点から発した波が光円錐の外側には出ないということ、つまり光速以下の速度でしか伝播しないことを示している。相対論的な計算をしている以上、このような性質（「相対論的因果律」と呼ぶ）を持っていてはいけない。相対論的因果律を満たすような形で解を作ることができたのは、負エネルギー解の存在を許したからである。このような意味でも相対論的な波動方程式に負エネルギー解は不可欠である。

2.4 Green 関数

ある微分演算子 \mathcal{D} を含む微分方程式 $\mathcal{D}\phi(x) = 0$ がある時、 $\mathcal{D}G(x) = \delta(x)$ となる関数 $G(x)$ を \mathcal{D} に対する Green 関数と呼ぶ。このような関数を求めておくと後の計算に便利であるということは、前にも述べた。

Klein-Gordon 方程式は $(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi = 0$ であるが、実際の応用においては、

$$(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi(x) = J(x) \quad (2.95)$$

という形の方程式を解くことが多い。 $J(x)$ を源 (source) と呼ぶ。 ϕ で表される何かの粒子が、 $J(x)$ によって作られるという考え方である。 ϕ が電磁場（つまり光子）であったとすれば、 $J(x)$ は電荷や電流などになる。

この形の方程式の解は、Klein-Gordon 方程式に対する Green 関数

$$(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)G(x) = \delta^4(x) \quad (2.96)$$

を使って、

$$\phi(x) = \int d^4y G(x-y)J(y) \quad (2.97)$$

という形に書くことができる。この式の両辺に $(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)$ をかけると、

$$(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi(x) = \int d^4y (-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)G(x-y)J(y) = \int d^4y \delta^4(x-y)J(y) = J(x) \quad (2.98)$$

となる。

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p G(p) e^{-ipx} \quad (2.99)$$

とおき、上の式の Fourier 成分を取れば（つまり $\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ipx}$ をかけて積分を実行すれば、）、

$$(p^2 - m^2)G(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \quad (2.100)$$

となる。よって、

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ipx} \quad (2.101)$$

と書ける。

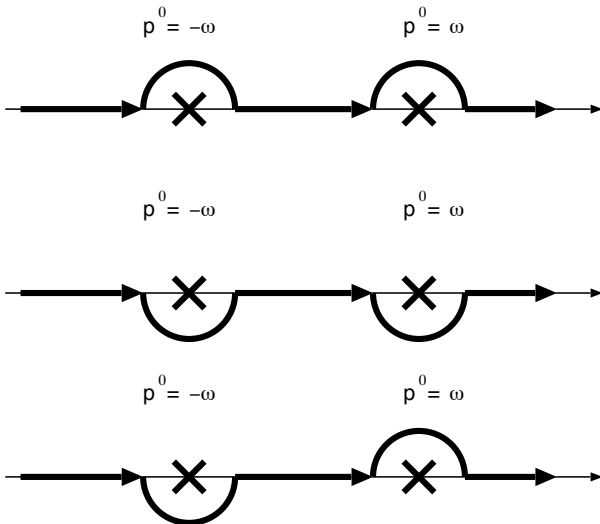
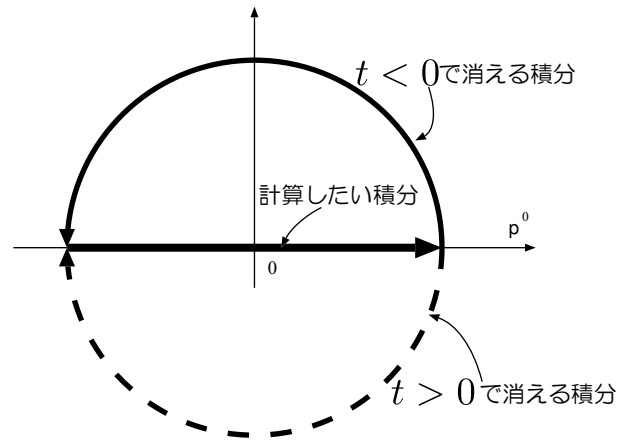
ただし、この答えは単に形式的に書いただけのもので、実際の計算には注意が必要となる。実際にこれを p^0 について積分しようと試みると、被積分関数は Klein-Gordon 場の場合 $p^0 = \pm\sqrt{|p|^2 + m^2}$ の 2 個所に極があり、 $-\infty < p^0 < \infty$ の積分をするためには、これらの極をどのように避けるかを指定しなくてはならない。この避け方は Green 関数の定義式からは決まらない。なんらかの境界条件を置くことが必要である。

積分を複素積分をつかって評価すると、 $e^{-ip^0 x^0} = e^{-ip^0 t}$ という因子を含んでいるので、 $t > 0$ であれば $\text{Im}(p^0) \rightarrow -\infty$ の方向、 $t < 0$ であれば $\text{Im}(p^0) \rightarrow \infty$ の方向に極限を取れば、半円の積分の部分を落とすことができる。実際に欲しい積分は $\int_{-\infty}^{\infty} dp^0$ 、つまり図の水平線の部分であるから、半円部分の積分が 0 になるようにすれば、複素積分の結果がすなわち欲しい部分の積分となる。

複素周回積分のありがたい性質として、積分路の内側に一位の極がなければ答えが 0 になるというものがある。今考えている積分の場合、

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p^0 - \omega} - \frac{1}{p^0 + \omega} \right) \tag{2.102}$$

と書けるので、 $p^0 = \omega$ と $p^0 = -\omega$ の 2 カ所に極がある。そして、実軸状を素直に積分してしまうと、この極を踏んでしまうことになる。そこで、積分路を少し曲げることにする（後でこの曲がり方が 0 になるような極限を取る）。



れる) のは第 3 の積分路である。この場合、 $t > 0$ であれば (下の半円を使うので) $p^0 = \omega$ の極の寄与が生き残る。 $t < 0$ であれば (上の半円を使うので) $p^0 = -\omega$ の極の寄与が生き残る。この場合「正エネルギーの波は未来に伝播し、負エネルギーの波は過去に伝播せよ」という境界条件を使っていることになる。この Green 関数は「Feynman 伝播関数」と呼ばれる。

ここで、 $t > 0$ の場合の p^0 積分を実行しよう、この場合は下半円を使った積分路で積分するので、 $p^0 = \omega - i\epsilon$ の極からの寄与を拾う。留数定理

$$\oint_{z=a \text{ の周りを反時計回り}} dz \frac{f(z)}{z - a} = 2\pi i f(a) \tag{2.103}$$

たとえば、左の図の一番上のように、上側に極をよける積分としてこの積分を定義したとする。すると、 $t < 0$ の時の積分路 (上の半円を使う) の中には極がない。よってこの積分路を採用した場合、 $t < 0$ では答えが 0 になるような境界条件を満たす Green 関数ができる。このような Green 関数を「遅延 Green 関数」と呼ぶ。

第 2 の積分路の場合は逆に $t > 0$ の時に積分結果が 0 になる。この場合を「先進 Green 関数」と呼ぶ。

遅延 Green 関数は「波が source から未来に向かって伝播しなさい」という境界条件を使っているから、これが物理的に正しいように思えるかもしれないが、実は物理的に正しい (よく使わ

を使えば、積分の結果は、

$$G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega x^0 + i\vec{p}\vec{x}} \quad (2.104)$$

となる。この時は積分が極の周りを時計回りに回るので、積分の時に現れる係数は $2\pi i$ ではなく $-2\pi i$ となる。

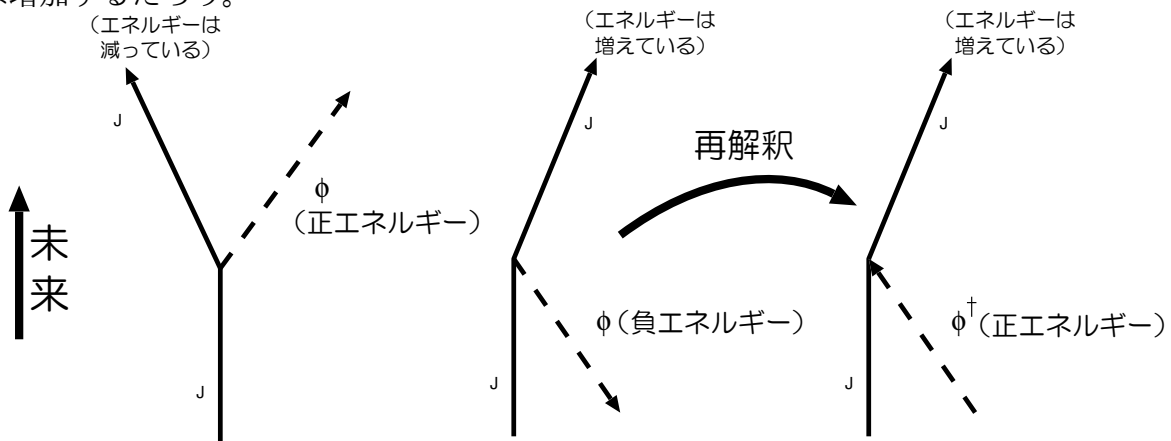
$t < 0$ の場合も同様に計算できる。今度は反時計回りに回るので出る係数は $2\pi i$ である。ただし、(2.102) にある、極の前につく符号が反対なので、マイナス符号が2回出ることになって、

$$G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega} e^{i\omega x^0 - i\vec{p}\vec{x}} \quad (2.105)$$

となる。 $t = x^0$ の正負によって、この二つのどちらかを取るようになる。

source $J(x)$ から出た負エネルギーを持った波が過去に向かって進行するというのはどういう意味だろうか。そもそも「波が過去に進行する」という文章自体が意味がない（「進行」というのは「時間が経つと場所が変わる」という意味のはずであり、未来方向でしかあり得ない）。

ここで、 $J(x)$ で表される物理的実体（たとえば電荷）と、 $\phi(x)$ で表される物理的実体（たとえば電磁場）の間にエネルギー保存則が成立していたとしよう（普通に物理を作れば成立しているはずだ）。負のエネルギーを持っている $\phi(x)$ が $J(x)$ から出て行けば、 $J(x)$ のエネルギーは増加するだろう。



この「負エネルギーを持った ϕ が過去に向かって出て行った」という現象を「正エネルギーを持った ϕ^\dagger が過去から入ってきた」と再解釈して、負エネルギーがどこにも現れないようにしよう、というのが「再解釈原理」で、現在はこのような負エネルギー解の存在する意味を考える。

Feynman 伝播関数がこのような境界条件を取っている理由は、負エネルギーの解にこのような再解釈を加えることができる条件だからである。

この再解釈で果たしてちゃんとうまくいくのかどうかは、ここまでの話だけ聞いて安易に納得してはいけない。「source $J(x)$ が粒子を吸ったり吐いたりする」というプロセスをちゃんと記述できるような理論ができて、それが矛盾なくこの世界の物理を記述できるということが確認できないと、いくら「こう解釈する」と考えたところで、意味はないのである。

そのようなプロセスをちゃんと記述するために、「場の理論」が必要なのである。

第3章 第2量子化

3.1 「場」とは？

電場、磁場、重力場など、「場 (field)」という概念が物理にはよく現れる。単純に言えば場とは「空間の各点各点に定義された力学変数のあつまり」である。たとえば電場 $\vec{E}(\vec{x}, t)$ は宇宙の全ての点 (全ての \vec{x}) に一個ずつ (ベクトルなので成分で数えると3成分ずつ) $\vec{E}(\vec{x}, t)$ が存在していて、時間が経つと (t が変化すると) 変化していく。真空中の電磁場であれば

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{x}, t) &= \mu_0 \left(\vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

という4つの式に従って時間発展する (正確に言えば、上の二つの式は時間発展の式ではない)。

この式を ($\rho = \vec{j} = 0$ の場合で) 少しがんばって書き直すと、

$$\left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad \left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.2)$$

という式になる。これは電場や磁場が、 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ という速度で伝播することを示している。

「電荷が電場を作り、電流が磁場を作る」と電磁気学では説明するが、その電場や磁場は、電荷や電流があるから存在するというよりは、最初から (真空中でも) 空間の各点に存在し、電荷や電流はその「場」に変化を与えようと思った方がよい (正電荷があるところは電位が盛り上がり、負電荷があるところは電位が盛り下がる)。

「場の理論」とは、空間の各点各点にあり、互いに関係しあっている無限個の (!) 力学的自由度について考える理論である。特にこれを量子力学的に考えるものを「量子場の理論」と呼ぶ。

ところで、「光のエネルギーが $h\nu$ の整数倍」ということが量子力学の始まりであった。こうなる理由を「電磁場が量子化されるから」という道筋で説明しておこう。

z 方向に進行する電磁波の場合、電場の x 成分 E_x の満たす方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = 0 \quad (3.3)$$

この E_x をフーリエ変換して

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int dk_x dk_y dk_z E_x(k_x, k_y, k_z, t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (3.4)$$

としよう。これを方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int dk_x dk_y dk_z E_x(k_x, k_y, k_z, t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \right) &= 0 \\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int dk_x dk_y dk_z \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (k_z)^2 \right) E_x(k_x, k_y, k_z, t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

これはつまり、

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (k_z)^2\right) E_x(k_x, k_y, k_z, t) = 0 \quad (3.6)$$

あるいは、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(k_x, k_y, k_z, t) = -c^2(k_z)^2 E_x(k_x, k_y, k_z, t) \quad (3.7)$$

ということであり、調和振動子の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t) \quad (3.8)$$

と比べると、 $\omega = ck_z$ とすれば、 $E_x(k_x, k_y, k_z, t)$ が $x(t)$ に対応していることになる。つまり、電場をフーリエ展開した各成分が一個一個、調和振動子に対応していることになるのである。

粒子の量子力学で「座標 x 、運動量 p を演算子と考える」という方法でシュレーディンガー方程式を作ったように、電磁場にたいしても「電場 \vec{E} 、磁場 \vec{H} を演算子と考える¹」という方法で「電磁場の量子論」を作ることができるが、上に述べたように方程式が同じ形をしているので、結果も同様になる。ただ電磁場の方が (k_x, k_y, k_z) の関数である分だけ「数が多い」だけのことである。

光のエネルギーが $\hbar\omega$ を単位として量子化されたのは、光(電磁場)が無数個の調和振動子のあつまりでできているからであると考えることができる。光に限らず、電子などその他の物質についても、空間に分布した物質場を調和振動子の集まりと考えて量子化することができる。これを「量子場の理論」と呼び、現代の素粒子論、物性理論などの基礎となる考え方である。

3.2 第1量子化から第2量子化へ

3.2.1 無限自由度の系へ

場の量子化を“第2量子化”と呼ぶことがある。これは「量子力学の波動関数 ψ をもう一度量子化する」という意味合いをこめた言葉だが、実は正しくない。場の量子化と量子力学の違いは、単に扱う自由度が違うだけで「2回量子化する」というわけではない。しかし、そのように“見える”のは確かである。

古典的に「質点の力学」を考えている時、位置 $x_i(t)$ 、運動量 $p_i(t)$ (i は複数個の座標または複数個の粒子がある場合に座標と粒子を区別するための添字) は「力学変数」である。そして、量子力学ではこの x_i, p_i が「量子化」され、演算子 \hat{x}_i, \hat{p}_i になる (さらに x 表示を取れば $\hat{x}_i \rightarrow x_i$ 、

$\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ となる)。

古典的質点の力学では、

ラグランジアンを考える たとえば、 $L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2$

運動量を定義する たとえば、 $p = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} = m\frac{dx}{dt}$

ハミルトニアンを作る たとえば、 $H = p\frac{dx}{dt} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$

¹実際には電場や磁場より、ベクトルポテンシャル \vec{A} と静電ポテンシャル ϕ を基本に考えることが多い。

正準方程式を立てる たとえば、 $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

という手順で問題を解いた。

量子力学では「ハミルトニアンを作る」までは同じで、その続きが、

正準交換関係を仮定する $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \delta_{ij}$

シュレーディンガー方程式を立てる たとえば、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi = \left(\frac{1}{2m} (\hat{p})^2 + \frac{1}{2} k (\hat{x})^2 \right) \psi$$

となるところが違う。

古典的な場の理論では力学変数は（たとえば） $\phi(\vec{x}, t)$ のように空間の各点各点に分布した「場」である。この式において \vec{x} は力学変数ではなく、たくさんある場 ϕ を区別するための「ラベル」、「番地」または「背番号」でしかない。

場の理論では空間の各点各点に「場」という力学変数を考えるので、自由度が無量大となる。そのような各点各点の力学変数を量子化するのが場の量子化である。

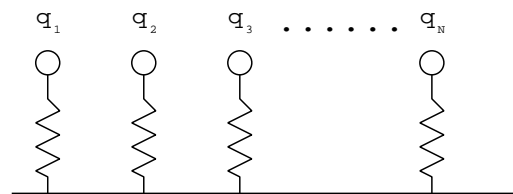
実際に量子力学の自由度を大きくしていくことで場の理論を出してみよう。まず1個の1次元調和振動子から出発する。作用は

$$\int dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right) \tag{3.9}$$

である（質量は1とした）。

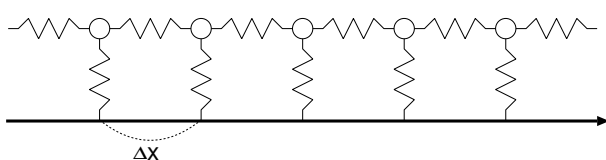
次に右の図のように、調和振動子を N 個持つてくる。

この場合、ただ単に数を N 個に増やしたただけであって、それぞれは互いに相互作用することなく運動するのだから、N 個の調和振動子の作用は1個の調和振動子の作用の単なる和で表すことができる。すなわち、このような系に対する作用は一個一個の調和振動子の作用の和として表され、



$$\sum_{i=1}^N \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q_i^2 \right) \tag{3.10}$$

のように書ける。



しかしこれでは、独立な N 個を考えるだけなので、あまり面白くない。物理的現象として、一点での振動が隣に伝わっていくような現象（近接相互作用）も入れてやりたい。そこで、この振動子と振動子の間にもばねをつけ左の図のようにしたモデルを考えてみる。このようにすることによって、振動の伝播（波動）が起こる。この

モデルの作用は、付け加えたバネのエネルギーを考慮に入れて、

$$\sum_{i=1}^N \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q_i^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 (q_{i+1} - q_i)^2 \right) \tag{3.11}$$

となる。ただしここで、 $q_{N+1} = q_1$ と考えよ。すなわち、振動子はリング状にならんでいるという境界条件を用いた。

このモデルの力学的自由度は N であるが、ここで、 N が無限大になるような極限を考えれば、場の理論の最も簡単なモデルとなる。今考えているのは空間的には1次元で、しかもその空間に関して周期境界条件を置いている。空間の長さを L とし、 $\Delta x = \frac{L}{N}$, $x_i = \Delta x \times i$ と置く。積分と和の置き換えの式

$$\int_0^L dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta x \quad (3.12)$$

を使うことを考えて、 $q_i = \phi(x_i)\sqrt{\Delta x}$ と置き、さらに作用の最後の引き算のある項が

$$(q_{i+1} - q_i) = (\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i))\sqrt{\Delta x} = \frac{\partial \phi(x_i)}{\partial x} (\Delta x)^{\frac{3}{2}} \quad (3.13)$$

のように微分に置き換えられることを使うと、作用は

$$\sum_{i=1}^N \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}(x_i)^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \phi(x_i)^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 \Delta x^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) \Delta x \quad (3.14)$$

となる。

ここで理論を連続的なものにするため、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取る。これにより和が積分に変わるが、この時 Ω を定数としたのでは最後の項は0になってしまう。しかし、 Ω^2 がバネ定数であることを考えると、 $\Delta x \rightarrow 0$ となればバネ定数は大きくなるべきである(短いばねほど伸ばしにくい)。よって、まず $\Omega = \frac{k}{\Delta x}$ と置いてから極限をとる。こうすれば有限な極限が得られる。

すると作用は

$$\frac{1}{2} \int dt \int dx \left(\dot{\phi}^2 - k^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \omega^2 \phi^2 \right) \quad (3.15)$$

という形となる。

$k = 1, \omega = m$ とおくと、これは Klein-Gordon 場と呼ばれる場の作用であり、質量 m の相対論的な粒子を表す場である。なぜなら、非相対論的な場合、エネルギー E と運動量 \vec{p} は

$$E = \frac{1}{2m} (p_i)^2 \quad (3.16)$$

であり、これを $E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, p_i \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と置き換えると Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \psi \quad (3.17)$$

になる。同様に相対論的なエネルギーと運動量の関係は $e^2 - (p_i)^2 = m^2$ であるから、これに同様の置き換えを行えば、

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \phi = m^2 \phi \quad (3.18)$$

となるからである。実際、上の作用から導かれる運動方程式を Klein-Gordon 方程式と呼ぶ。この方程式の平面波解は

$$\phi = C e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} + C^* e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{x}} \quad (\omega = \sqrt{k^2 + m^2}) \quad (3.19)$$

とおける。ここで $k = 1$ としたのは、このモデルで波の伝わる速さを 1 (光速) と置いたことに等しい。

量子力学では、座標 q に対して運動量 p を考え、座標と運動量の間

$$[q(t), p(t)] = i \tag{3.20}$$

という正準交換関係を設定する。Klein-Gordon 場の場合は、座標に対応するのは各点各点の $\phi(x)$ であるから、 $\phi(x)$ に対する運動量 $\pi(x)$ を $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ から求めると $\dot{\phi}(x)$ となり、その交換関係は

$$[\phi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta(x - x') \tag{3.21}$$

のようになる。 δ -関数を使った表示となる以外は、量子力学と同じである。

3.2.2 Schrödinger 場の状態と第1量子化の状態

量子力学 ↔ 一体問題
場の理論 ↔ 多体問題

という捉え方もある。この節では多体問題としての場の理論の捉え方から場の理論を構築してみる。具体的には、Schrödinger 方程式を満たす粒子の多体問題を考え、それを場の理論の形で定式化できることを示そう。Schrödinger 方程式を満たす波動関数の空間 (たとえば $|x\rangle$ で表せる) は粒子1個の取り得る状態の空間である。粒子が2個存在している状態はどのように表せばよいだろうか。単純に考えると、二つの空間の直積を取ればよい。すなわち2体状態として、 $|x_1\rangle_1 \otimes |x_2\rangle_2$ のように添字で区別した二つの空間を持ってくるわけである。しかし実際には、この二つの粒子が同一粒子であれば、2粒子を区別できないので、 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle_1 \otimes |x_2\rangle_2 \pm |x_2\rangle_1 \otimes |x_1\rangle_2)$ のように対称化 (または反対称化) しておかなくてはならない。3粒子、4粒子…の場合も同様に考えられる。場の理論の状態はこれらの状態全てを含むようなものでなくてはならない。

簡単のため、自由場で考え、かつ運動量表示を使おう。場の理論では

	第1量子化のケットで表すと	エネルギー
真空状態	?	0
1粒子状態	$ p\rangle$	$\frac{p^2}{2m}$
2粒子状態	$\sum_{\text{対称}} p_1\rangle \otimes p_2\rangle$	$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}$
3粒子状態	$\sum_{\text{対称}} p_1\rangle \otimes p_2\rangle \otimes p_3\rangle$	$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m}$
⋮	⋮	⋮

のようなあらゆる状態をいっぺんに考えていかなくてはならない。上の $\sum_{\text{対称}}$ は添字について対称な組み合わせ全ての和を表す (ここでは bose 粒子を考えた)。

第1量子化の“状態”を表すには、(運動量表示ならば) 運動量 p 一つで足りた。しかし第2量子化の“状態”を表すには、複数個の運動量 $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ (しかも、 N は任意の非負の整数) が必要になる。第2量子化の状態はそれだけ広い空間が必要となるわけである。

ここで、量子力学での調和振動子のエネルギー状態の並び (基底状態、第1励起状態、第2励起状態…) が上の (真空、1粒子、2粒子…) という並びとよく似ていることに着目する。

違いは、調和振動子にあたるものが1種類ではなく、いろんな運動量に対応したいろんなエネルギーの調和振動子がある、ということである。そこで、量子力学での調和振動子のハミルトニアン $H = \omega a^\dagger a$ を拡張して、 $\mathcal{H} = \int dp \omega(p) a^\dagger(p) a(p)$ なるハミルトニアンを考え、

$$[a(p), a(p')] = [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0, \quad [a(p), a^\dagger(p')] = \delta(p - p') \quad (3.22)$$

のような交換関係を設定すれば、

	第1量子化のケットで表すと	エネルギー	第2量子化のケットで表すと
真空状態	?	0	$ 0\rangle$
1粒子状態	$ p\rangle$	$\frac{p^2}{2m}$	$a^\dagger(p) 0\rangle$
2粒子状態	$\sum_{\text{対称}} p_1\rangle \otimes p_2\rangle$	$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}$	$a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2) 0\rangle$
3粒子状態	$\sum_{\text{対称}} p_1\rangle \otimes p_2\rangle \otimes p_3\rangle$	$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m}$	$a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_3) 0\rangle$
⋮	⋮	⋮	⋮

のように統一的に場の状態を表すことができる（第1量子化のケットと第2量子化のケットに同じ記号を使っているが、混同しないように）。 $\omega(p)$ は運動量 p を持つ1粒子のエネルギーで、この場合は $\frac{p^2}{2m}$ である。

実際に、 \mathcal{H} を表の一番右の状態にかけると、固有値として表の真ん中に書かれたエネルギーが現れる。そのことは、 \mathcal{H} と $a^\dagger(p)$ の交換関係を計算すると、

$$\begin{aligned} \left[a^\dagger(p), \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') a(p') \right] &= \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') [a^\dagger(p), a(p')] \\ &= - \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') \delta(p - p') \\ &= -\omega(p) a^\dagger(p) \end{aligned} \quad (3.23)$$

となることからわかる。つまり、 $a^\dagger(p)$ は \mathcal{H} の固有値を $\omega(p)$ だけ上昇させるわけである。

以上の考え方は、結局「場」というものを（ p というラベルで分類された）無限種類調和振動子の集まりと考えていることになる。そういう意味では、最初に述べた無限自由度の系への一般化という考え方は、正しく第2量子化への道になっていたことになる。

ここで、第2量子化のハミルトニアン $\mathcal{H} = \int dp \omega(p) a^\dagger(p) a(p)$ について、さらに考えてみよう。この $\omega(p)$ は第1量子化のハミルトニアン $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ の固有値である。それが p で積分されているということは、ありとあらゆる状態（ $|p\rangle$ ）での H の固有値が第2量子化のハミルトニアンとして現れている。ここで第1量子化での状態が

$$|\psi\rangle = \int dp |p\rangle \psi(p) \quad (3.24)$$

のように $|p\rangle$ で展開可能であったことを思い出す。この状態に対する H の期待値は

$$\int dp dp' \psi^*(p') \langle p' | \frac{\hat{p}^2}{2m} | p \rangle \psi(p) = \int dp \frac{p^2}{2m} \psi^*(p) \psi(p) \quad (3.25)$$

となるが、この式は $\psi(p) \rightarrow a(p)$ 、 $\psi^*(p) \rightarrow a^\dagger(p)$ と置き換えれば \mathcal{H} と同じである。

そこで一つの考え方として、「第1量子化の波動関数の各成分を第2量子化の生成/消滅演算子と置き換える」という方法で第1量子化→第2量子化と進むことができる。これが「場の量子化」を「第2量子化」と呼ぶ理由である。

3.3 Schrödinger 場と Klein-Gordon 場の正準量子化

3.3.1 Schrödinger 場の正準量子化—Bose 統計

では、場の理論を組み立てるために、まず「場の作用」から出発しよう。作用からハミルトニアンを経由して、Poisson 括弧から交換関係への置き換えを使って量子化を行うことを正準量子化と呼ぶ。ここでは、

$$L = \int d^3x \psi^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi, \quad H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.26)$$

のような作用を考えてみる。これから導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \right) &= \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \left(-i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi^* = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

すなわち、Schrödinger 方程式そのものである²。

これからハミルトニアンを求めると、

$$\mathcal{H} = \int d^3x \psi^* H \psi \quad (3.28)$$

となる。つまり、場の理論のエネルギーは、第一量子化のエネルギーの期待値となっている。

以上を運動量表示で書き直すと、実は前節で書いたハミルトニアンや状態が再現されている。実際にやってみよう。ハミルトニアンを運動量表示に直すと、

$$\mathcal{H} = \int d^3p \psi^*(p) \frac{p^2}{2m} \psi(p) \quad (3.29)$$

これからわかるように、 $\psi(p) \leftrightarrow a(p)$, $\psi^*(p) \leftrightarrow a^\dagger(p)$ という対応関係をつければよい。つまり、第 1 量子化では波動関数だった ψ が、ここでは演算子として扱われている。これは一見奇妙に見えるかもしれないが、最初に述べたように、第 2 量子化というのはそもそも「場」の量子化であったのだから、場の一個一個の成分は力学変数である。量子化とは力学変数を演算子で置き換えることなのであるから、場の量子化の場合、 ψ が演算子となるのは当然である。

さて実際に今使ったラグランジアンから考えると、 $\psi(p)$ に対応する運動量は $i\psi^*(p)$ である。よって正準交換関係は

$$[\psi(p), i\psi^*(p')] = i\delta(p - p') \quad (3.30)$$

と置くべきであろう。この式の両辺を i で割れば、確かに生成消滅演算子の満たすべき

$$[a(p), a^\dagger(p')] = \delta(p - p') \quad (3.31)$$

に一致する。

調和振動子での a がエネルギー量子を一個消す演算子であったように、 $a(p)$ は粒子 (運動量 \vec{p} を持つ) を一個消す、という作用を持つ演算子である。Schrödinger 場の場合、消滅演算子 a は ψ に、生成演算子 a^\dagger は ψ^* に入っていた (というより、 $a(p), a^\dagger(p)$ が運動量表示、 ψ, ψ^* が座標表示で、同じもの)。演算子 $\psi(t, \vec{x})$ は、時刻 t において場所 \vec{x} にいる粒子を消す演算子、演算子 $\psi^*(t, \vec{x})$ は、時刻 t において場所 \vec{x} に粒子を作る演算子であると解釈できる。

$|0\rangle$ は粒子がない状態であるから、状態 $\psi^*(t, \vec{x})|0\rangle$ は、時刻 t において、粒子が場所 \vec{x} に局在している状態、と考えることができる。

²ここで、 ψ^* で微分するとき ψ を微分しないことを妙に思うひともいるかもしれない。これは $\psi = R + iI$ のように実部 R と虚部 I に分けたとして、 $\frac{\partial}{\partial \psi^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial R} + i \frac{\partial}{\partial I} \right)$ のように定義しているからだと思ってほしい。

3.3.2 Schrödinger 場の正準量子化—Fermi 統計

前節は Schrödinger 場を考えたが、そこで暗黙のうちに Bose 統計を満たすような場合を考えた。たとえば 2 粒子状態を考えた時、

$$a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)|0\rangle = a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_1)|0\rangle \quad (3.32)$$

となる (a^\dagger 同士は交換するとしたので)。これは 2 体の波動関数 $\psi(p_1, p_2)$ が対称であるということになる。Fermi 統計の場合はこれではいけないので、むしろ交換関係ではなく反交換関係

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (3.33)$$

を用いて、

$$\{a(p), a(p')\} = \{a^\dagger(p), a^\dagger(p')\} = 0, \quad \{a(p), a^\dagger(p')\} = \delta(p - p') \quad (3.34)$$

のような量子化を行わなくてはならない。

この場合、 $a^\dagger(p)a^\dagger(p) = 0$ となるので、「同じ状態に 2 個の粒子が入れない」というパウリの排他律も自動的に満たしている。

このように交換関係で量子化した場合でも、 $a(p), a^\dagger(p)$ が消滅または生成演算子と解釈できることは同じで、

$$\begin{aligned} \left[a^\dagger(p), \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') a(p') \right] &= - \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') \{a^\dagger(p), a(p')\} \\ &= - \int dp' \omega(p') a^\dagger(p') \delta(p - p') \\ &= -\omega(p) a^\dagger(p) \end{aligned} \quad (3.35)$$

となることから明らかである³。

ところで fermionic な場の場合、Euler-Lagrange 方程式を導く時やハミルトニアンを作る時の微分を左から微分するか、右から微分するかをちゃんと定義しておかないと符号を間違えることがままある。たとえば $H = pq - L$ と定義しているのならば、 p で微分する時は左から、 q, \dot{q} で微分する時は右から、というふうに約束しておく、正準方程式が $\dot{p} = -\frac{\partial_R H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial_L H}{\partial p}$ のように bosonic な場合と同じように書ける。

3.3.3 Klein-Gordon 場の正準量子化

Schrödinger 方程式は非相対論的な方程式であるから、Schrödinger 場は非相対論的な場である。そこで相対論的な方程式である Klein-Gordon 方程式に対応する Klein-Gordon 場の場合はどのようになるか、ここで示しておく。

ここでは 4 次元にして、

$$L = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - m^2 \phi^2 \right) \quad (3.36)$$

を考え、このラグランジアンで表せる系の正準量子化を行ってみる。空間計量 $\eta^{\mu\nu}$ は、時間成分を正に、空間成分を負に取っている。交換関係は (3.21) と同じである。この作用からハミルトニアンを作ると、

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\pi \frac{\partial\phi}{\partial x^0} - L \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

³公式 $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ を使った。 $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ とともに覚えておくとよい。

となる。

このような演算子をそのまま扱うのは難しいので、

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \phi(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.38)$$

のように Fourier 変換して考える。運動方程式

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (3.39)$$

にこの展開を代入して運動量 \vec{p} の成分をとると、

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \phi(\vec{p}, t) = -(|\vec{p}|^2 + m^2) \phi(\vec{p}, t) \quad (3.40)$$

となり、 $\phi(\vec{p}, t)$ は振動数 $\pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ を持つ調和振動子と考えることができる。 $\omega = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ とおき、振動数 $+\omega, -\omega$ の二つの成分があることを考えて、

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p}) e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad (3.41)$$

のように展開係数 a, a^\dagger で展開する。今、 ϕ が実であるように a と a^\dagger に互いに Hermite 共役であれという関係をつけたが、 ϕ が複素場であればこれは必要ない。 $\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$ という変な因子がついているが、これは後で出て来る a, a^\dagger の交換関係が簡単になるようにしただけである。

ここで運動量を計算する。

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} \phi(\vec{x}, t) = -i \times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[a(\vec{p}) e^{-i\omega t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger(\vec{p}) e^{i\omega t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad (3.42)$$

これと交換関係 (3.21) とから、

$$\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}') \right] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.43)$$

がわかる。

3.3.4 Klein-Gordon 場の演算子 a, a^\dagger の意味

ϕ, π の展開式から逆に $a(\vec{p})$ を求めると、

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \int d^3\vec{x} \left[\phi(x) + \frac{i}{\omega} \pi(x) \right] e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.44)$$

となる。この式は (1.63) と非常に似ている (違いは、Fourier 成分が取り出されていること)。実はハミルトニアン H の形も $a(\vec{p})$ を使って表すと

$$H = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} \omega \left(a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + \frac{1}{2} \right) \quad (3.45)$$

と、ほぼ同様の形となる。Klein-Gordon 場が調和振動子無限個の集まりであることがここからもわかるのである。

Klein-Gordon 場の場合は ϕ に両方とも入っている。では $\phi(t, \vec{x})$ という演算子は何か—この演算子は $a(\vec{p})$ と $a^\dagger(\vec{p})$ 演算子を両方含んでいる。よってその場所 \vec{x} のその時刻 t において、粒子

を作ると同時に消す、という作用をしていることになる。場の量子化がされているので、 $\phi(x)$ 自体が演算子であることに注意せよ。すなわち、 $\phi(x)$ そのものを粒子がそこにいる確率のように考えることは正しくない。最初、 n 個の粒子のある状態 $|\psi_n\rangle$ にあったとする。これに $\phi(x)$ をかけると、 $\phi(x)$ は場所 x において粒子を消すか作るかするので、

$$\phi(x)|\psi_n\rangle = C_1|\psi_{n+1}\rangle + C_2|\psi_{n-1}\rangle \quad (3.46)$$

のように状態が遷移する (この式はあくまで記号的に表したもので、厳密ではない)。

つまり ϕ は粒子数を $n \rightarrow n+1, n \rightarrow n-1$ のように変化させる。これは粒子をそこで吸収したり吐き出したりしているということを意味する。すなわち、演算子 ϕ をはさむことは、その位置で粒子を観測する (または発生させる)、と考えてもよい。観測された場合は粒子は観測器に吸収されてなくなったと考えるのである。⁴ よって、ある状態 $|\psi_n\rangle$ において、場所 x に粒子が観測できる確率は

$$|C_2|^2 = |\langle\psi_{n-1}|\phi(x)|\psi_n\rangle|^2 \quad (3.47)$$

のように表せる (各々の $|\psi\rangle$ は規格化されているものとする)。

3.3.5 T 積

ある時空点 y で粒子を発生させ、ある時空点 x で粒子を消すという過程を考え、その確率振幅を求めるとしたら、Schrödinger 場の場合は

$$\langle 0|\psi(x)\psi^*(y)|0\rangle \quad (3.48)$$

Klein-Gordon 場の場合は

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \quad (3.49)$$

のような量を考えればよい⁵。

上のような過程で、特に x の方が y より未来にあるべし、という因果的条件を置くならば、

$$\langle 0|T(\psi(x)\psi^*(y))|0\rangle, \quad \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle \quad (3.50)$$

のような量を考えればよい。ここで記号 T は時間順序積 (Time-ordered product) を意味し、

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)(\phi(x)\phi(y)) + \theta(y^0 - x^0)(\phi(y)\phi(x)) \quad (3.51)$$

である。ただし、場 ϕ が Fermi 場である時には、

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)(\phi(x)\phi(y)) - \theta(y^0 - x^0)(\phi(y)\phi(x)) \quad (3.52)$$

のように定義するものとする。

この量 (3.50) は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^0} - H(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}})\right) \langle 0|T(\psi(x)\psi^*(y))|0\rangle = i\delta^4(x-y) \quad (3.53)$$

$$(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2) \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = i\delta^4(x-y) \quad (3.54)$$

⁴ここでの観測は、いわゆる観測問題における観測とは別である。波束の収縮などを考えているのではないので、その点注意。

⁵このようにすれば $\phi(y)$ は必ず粒子を作る (真空から粒子を消すことはできないから)。また $\phi(x)$ は必ず粒子を消す (でない真空に戻らないから)。

を満たす。

これを証明するためには、まず $\left(i\frac{\partial}{\partial x^0} - H(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}})\right)\psi(x) = 0, (\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi(x) = 0$ であることに着目する。よってこれらの演算子が、全て場 ψ または ϕ にかかるならば与式は 0 となる。しかし、T 積の中には $\theta(x^0 - y^0)$ が含まれている。この式が微分される部分は 0 とならずに残るのである。

Schrödinger 場の場合、 $i\frac{\partial}{\partial x^0}$ が θ 関数にかかる部分だけを計算すればよく、

$$i\langle 0|\frac{d}{dx^0}\theta(x^0 - y^0)\psi(x)\psi^*(y) + \frac{d}{dx^0}\theta(y^0 - x^0)\psi^*(y)\psi(x)|0\rangle = i\delta(x^0 - y^0)\langle 0|[\psi(x), \psi^*(y)]|0\rangle \quad (3.55)$$

となって、同時刻交換関係を使うことにより、右辺は $i\delta^4(x - y)$ となる。Fermi 場でも同様となる。

Klein-Gordon 場の場合も、微分演算子のうち $-(\partial_0)^2$ が θ 関数にひっかかる部分だけを計算すればよい。

計算すべき量は

$$-\langle 0|\left((\partial_0)^2\theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + 2\partial_0\theta(x^0 - y^0)\partial_0\phi(x)\phi(y) + (\partial_0)^2\theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) + 2\partial_0\theta(y^0 - x^0)\phi(y)\partial_0\phi(x)\right)|0\rangle \quad (3.56)$$

となる。ここで公式

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x) \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dx}\delta(x)f(x) = -\delta(x)\frac{d}{dx}f(x) \quad (\text{ただしこの式は、} f(0) = 0 \text{ の時のみ使える}) \quad (3.58)$$

を使って計算すると、

$$\langle 0|\left(\delta(x^0 - y^0)[\phi(y), \partial_0\phi(x)]\right)|0\rangle \quad (3.59)$$

と計算できる。 $\delta(x^0 - y^0)$ があるため、 x, y は同時刻の場合だけを考えればよい。よって交換関係の部分は $i\delta(x^3 - y^3)$ となるので、結局この式の計算結果は $i\delta^4(x - y)$ となるのである。

微分演算子 \mathcal{D} を含む微分方程式 $\mathcal{D}\phi = 0$ がある時、 $\mathcal{D}G(x, y) = \delta(x - y)$ を満たす 2 点関数 $G(x, y)$ をこの微分演算子に関する Green 関数と呼ぶ。

この式の表す意味は、T 積の真空期待値が $\left(-i\frac{\partial}{\partial x^0} + H(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}})\right)$ や $(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)$ のような演算子に対する Green 関数の i 倍になっているということで、場の伝播を考える際に重要である。

3.3.6 4 次元交換関係

同時刻でない場合の交換関係を 4 次元交換関係と呼ぶ。

Klein-Gordon 場の場合、実際に $[\phi(x), \phi(y)]$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{q} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left[a(\vec{p})e^{-i\omega_p x^0 + i\vec{p}\vec{x}} + a^\dagger(\vec{p})e^{i\omega_p x^0 - i\vec{p}\vec{x}}, a(\vec{q})e^{-i\omega_q y^0 + i\vec{q}\vec{y}} + a^\dagger(\vec{q})e^{i\omega_q y^0 - i\vec{q}\vec{y}} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{q} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \left(e^{-i\omega_p x^0 + i\omega_q y^0 + i\vec{p}\vec{x} - i\vec{q}\vec{y}} e^{i\omega_p x^0 - i\omega_q y^0 - i\vec{p}\vec{x} + i\vec{q}\vec{y}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} - e^{i\omega_p(x^0 - y^0) - i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。この式を $i\Delta(x-y)$ と書き、 $\Delta(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(x^0-y^0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{i\omega_p(x^0-y^0)-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \right)$ のことを不変デルタ関数と呼ぶ。

不変デルタ関数は名前の通り、ローレンツ変換に対して不変であり、相対論的な因果律を満たしている。すなわち、 $x-y$ が空間的ベクトルであれば0になる。そのことを証明するには、 $x^0 = y^0$ の時に0になることを示せば十分である ($x-y$ が空間的ベクトルであれば、適当にローレンツ変換することで必ず $x^0 - y^0 = 0$ にできる)。

上の式に $x^0 - y^0 = 0$ を代入すると

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega_p} \left(e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \right) \quad (3.61)$$

となり、第1項と第2項は $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ と積分変数を置き換えれば逆符号で同じものであるから相殺する。

Schrödinger 場の場合にも4次元交換関係は計算できるが、ローレンツ不変ではないので、 $x-y$ が空間的であっても答は0にならない。

3.3.7 Green 関数

Schrödinger 場の作用は

$$K(x, y) = \delta(x-y) \left(i \frac{\partial}{\partial y^0} - H\left(-i \frac{\partial}{\partial \vec{y}}\right) \right) \quad (3.62)$$

という演算子を使えば、

$$I = \int d^4x d^4y \psi^*(x) K(x, y) \psi(y) \quad (3.63)$$

と書ける。同様に、Klein-Gordon 場の作用は部分積分を一回することにより、

$$I = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \left(-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2 \right) \phi(x) \quad (3.64)$$

となるので。この中にはさまった演算子を記号 $\square_x \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ を使って書き、

$$K(x, y) \equiv \delta(x-y) \left(-\square_y - m^2 \right) \quad (3.65)$$

と演算子 K を定義すれば⁶、作用を

$$I = \frac{1}{2} \int dx \int dy \phi(x) K(x, y) \phi(y) \quad (3.66)$$

と表すことができる。二つの場の間に K をはさんで積分した形になっている。

以下の式で定義される K の逆演算子 K^{-1} を求めてみよう。

$$\int dy K(x, y) K^{-1}(y, z) = \delta(x-z) \quad (3.67)$$

これも Green 関数の定義である。

$K^{-1}(x, y)$ は x, y の並進に関して不変であるはずなので、 $K^{-1}(x, 0)$ を求めれば十分である。

⁶演算子 K は無限行無限列の行列のように考える。行列の行が x 、行列の列が y でラベルされている。

Schrödinger 場の場合、定義式より、

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)^2 \right) K^{-1}(x, 0) = \delta^4(x) \quad (3.68)$$

である。

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p K^{-1}(p) e^{-ipx} \quad (3.69)$$

とおき、上の式の Fourier 成分を取れば、

$$\left(p_0 - \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2 \right) K^{-1}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \quad (3.70)$$

となる。よって、

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p_0 - \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2} e^{-ipx} \quad (3.71)$$

と書ける。

Klein-Gordon 場の場合、定義式により、

$$-(\square_x + m^2) K^{-1}(x, 0) = \delta(x) \quad (3.72)$$

である。

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p K^{-1}(p) e^{-ipx} \quad (3.73)$$

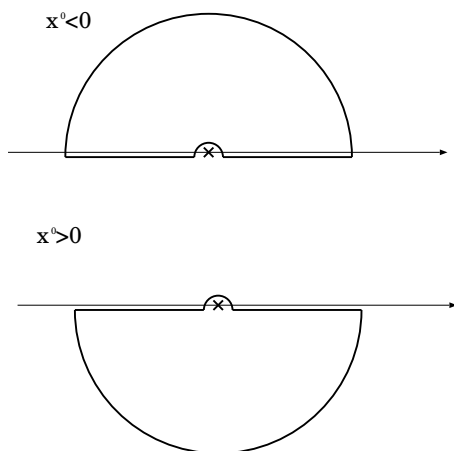
とおき、上の式の Fourier 成分を取れば、

$$(p^2 - m^2) K^{-1}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \quad (3.74)$$

となる。よって、

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ipx} \quad (3.75)$$

と書ける。



ただし、この答えは単に形式的に書いただけのもので、実際の計算には注意が必要となる。実際にこれを p^0 について積分しようと試みると、被積分関数は Schrödinger 場の場合 $p^0 = \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2$ のところに、Klein-Gordon 場の場合 $p^0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ の 2 個所に極があり、 $-\infty < p^0 < \infty$ の積分をするためには、これらの極をどのように避けるかを指定しなくてはならない。この避け方は Green 関数の定義式からは決まらない。なんらかの境界条件を置くことが必要である。ここでは、T 積の真空期待値として求めた Green 関数と一致するようにする方法を書く。

Schrödinger 場の場合、T 積の真空期待値 $\langle 0|T(\psi^*(x)\psi(y))|0\rangle$ は、 $x^0 - y^0 > 0$ の時 $\langle 0|\psi^*(x)\psi(y)|0\rangle$ となり 0 となる (ψ は消滅演算子だから)。そこで、この境界条件を満たすにはどうすればよいかを考える。

積分を複素積分をつかって評価するとすると、 e^{-ipx} という因子を含んでいるので、 $x^0 > 0$ であれば $\text{Im}(p^0) \rightarrow -\infty$ の方向、 $x^0 < 0$ であれば $\text{Im}(p^0) \rightarrow \infty$ の方向に極限を取れば、半円の積分の部分を下ろすことができる。

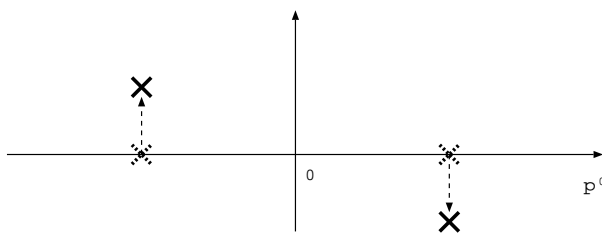
よって、境界条件を満たすようにするには、極を上によけるようにすればよい。こうすると、 $x^0 < 0$ の時は外周は上を回ることになるので、極が積分路の外に出て、周回積分の結果は0となる。逆に $x^0 > 0$ の時は極を拾う積分をすることになり、非0の答えが出る。このようによけることは、分母に小さな虚数 $i\epsilon$ を足すことに対応している。すなわち、

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p_0 - \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \quad (3.76)$$

のようにして計算し、後で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取るものと約束する。実際に計算すると結果は

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \theta(x^0) \int d^3p e^{-i\frac{|\vec{p}|^2}{2m}t + i\vec{p}\vec{x}} \quad (3.77)$$

となる。階段関数が挿入されることに注意せよ。



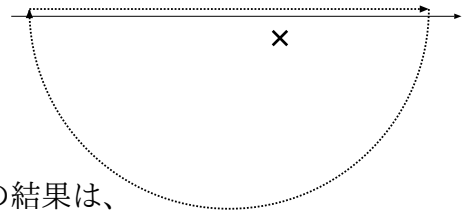
Klein-Gordon 場の場合も、同様に $\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ のように分母の m^2 を $m^2 - i\epsilon$ と置き換えると T 積で求めた Green 関数と同じになることが知られている。このような虚数部のつけくわえは、左図のように極を移動させることに対応する。

このような積分をした場合がちょうど T 積の真空期待値と一致する。 $x^0 > 0$ の場合で計算を試みよう。

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p^0 - \omega} - \frac{1}{p^0 + \omega} \right) e^{-ip^0 x^0} \times e^{i\vec{p}\vec{x}} \quad (3.78)$$

を計算すればよい。

ここで p^0 積分を複素積分を用いて評価する。 $x^0 > 0$ より、 $\text{Im}(p^0) < 0$ であれば、 $|p^0| \rightarrow \infty$ の時 $e^{-ip^0 x^0} \rightarrow 0$ であることに注意すると、積分路を右図のようにすると、下半分の円弧部分は半径を無限大とする極限において0になり、この周回積分の答えがすなわち実軸上の積分と等価となる。



この場合、 $p^0 = \omega - i\epsilon$ の極からの寄与を拾うので、積分の結果は、

$$K^{-1}(x, 0) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega x^0 + i\vec{p}\vec{x}} \quad (3.79)$$

となる。これは $x^0 > 0$ とおいた場合の T 積の真空期待値の $-i$ 倍に等しい。 $t < 0$ の場合も同様に計算できる。

今とは違う形に極を移動させても K^{-1} は定義できる。そのようにして作った K^{-1} は T 積の真空期待値である K^{-1} とは境界条件が違うものになる。場の理論で有用なのはここであげた K^{-1} であり、これを Feynman 伝播関数と呼ぶ。

3.4 場の理論の経路積分

3.4.1 経路積分での伝播関数の意味

Schrödinger 場や Klein-Gordon 場の量子化を、経路積分を使って実行することができる。場の理論は量子力学を無限自由度にしたものであるから当然である。

例えば Schrödinger 場の経路積分は

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x d^4y \psi^*(x) K(x,y) \psi(y)} \quad (3.80)$$

Klein-Gordon 場の経路積分は

$$\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x,y) \phi(y)} \quad (3.81)$$

のように演算子 K を使って書くことができるであろう。

演算子形式では T 積の真空期待値が Feynman 伝播関数となった。これを経路積分で計算することを考える。

まず Klein-Gordon 場の演算子 $\phi(x)$ と $\phi(y)$ の T 積を考える。これを経路積分で表すことを考えると、

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \leftrightarrow \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{i \int d^4x L} \quad (3.82)$$

という対応が成立する。これは $\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle$ にどんどん完全系

$$\int d\phi(x) |\phi(x)\rangle \langle \phi(x)| = 1 \quad (3.83)$$

$$\int d\pi(x) |\pi(x)\rangle \langle \pi(x)| = 1 \quad (3.84)$$

を挟んでいき、 π 積分を行った結果だと思えばよい⁷。この時、 $\phi(x)\phi(y)$ が時間順序に並んでいないとうまく経路積分の形にならない。よって T 積の形になっていることが必要である（というよりもむしろ、 T 積の形でないと経路積分を使った自然な計算には一致しない）。

ではこのような量を実際に計算するとすればどのようにすればよいか。2点関数（ここまで伝播関数と呼んでいたもの。2つの点の場の量の積に関係する量だからこう呼ぶ）ならば、

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{\frac{i}{2} \int d^4x' d^4y' \phi(x') K(x',y') \phi(y')} \quad (3.85)$$

を計算すれば良いことになる。しかしこれでは3点関数、4点関数と計算していくとき、何度も計算を繰り返さなくてはならない。そこで、母関数（generating function）を使った考え方をしよう。つまり、いっきに任意の n 点関数を計算するために、

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x J(x)\phi(x)} e^{\frac{i}{2} \int d^4x' d^4y' \phi(x') K(x',y') \phi(y')} \quad (3.86)$$

を計算することにする。いったんこれが計算できれば、 J で展開した各項を見れば任意の n 点関数が出せるからである。具体的には、

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} e^{i \int d^4x J(x)\phi(x)} = \phi(y) e^{i \int d^4x J(x)\phi(x)} \quad (3.87)$$

を使えばよい。つまり、 $\phi(x)$ を積分の中にはさんだものを計算したければ、結果に $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)}$ をかけた後に $J=0$ とおけばよい。

(3.86) は J の0次、1次から始まって ∞ 次までを含んでいることになる。2点関数を計算したかった筈なのに ∞ 点関数までをいっきに計算することになり、いっけん計算がややこしくなりそうだが、実は (3.86) を計算することはむしろ n 点関数を順番に計算するよりも簡単にできる。

⁷演算形式では両端が真空のブラとケットであるが、その情報は経路積分の形では、積分の境界条件として現れる。

この積分を行うためには \exp の肩に乗っている部分を、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & \int d^4x J(x)\phi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' \phi(x') K(x', y') \phi(y') \\ = & \frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' \left(\phi(x') + \int d^4x K^{-1}(x', x) \phi(x) \right) K(x', y') \left(\phi(y') + \int d^4x K^{-1}(y', x) \phi(x) \right) \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x, y) J(y) \end{aligned} \quad (3.88)$$

これは二次方程式などで使う完全平方化 $(ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a})$ と同様のことをやっていると思えば良い。

ここで積分変数を $\phi(x') \rightarrow \phi(x') - \int d^4x K^{-1}(x', x) J(x)$ のようにずらしを行う。すると結果は

$$e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x, y) J(y)} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \int d^4x' d^4y' \phi(x') K(x', y') \phi(y')} \quad (3.89)$$

のようになる。ここで、積分が J とは関係なくなってしまったので、この結果を J に関係しない定数 \mathcal{N} とまとめておく。つまり結果は

$$Z(J) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x, y) J(y)} \quad (3.90)$$

である。さて2点関数を求めるには、

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z(J)|_{J=0} = i K^{-1}(x, y) \quad (3.91)$$

である。この結果は演算子形式での答に一致する。

3.4.2 フェルミ粒子の経路積分とグラスマン数の積分

上の説明では、Schrödinger 場がボソンの場であると仮定した。フェルミオンの場である場合、多少計算が変わってくる。フェルミオンは反交換する演算子で表せるので、古典的な量としても反可換な数を使って表現しなくてはならない。このような数をグラスマン数と呼ぶ。

グラスマン数を積分するには、ボソン座標とは違った積分をしなくてはならない。例えば

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C \quad (3.92)$$

のような積分はグラスマン数に関してはありえない。(グラスマン数)² = 0 だからである。グラスマン数の定積分は、以下の条件を満たすように決める。

1. 線形性: $f(x) + g(x)$ の積分は $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ であること。および、 $a f(x)$ の積分は $a \int f(x) dx$ であること。
2. 常に部分積分できること。すなわち、 $\int \frac{\partial}{\partial x} f(x) dx = 0$ であること。
3. 普通の数の $-\infty \rightarrow \infty$ の定積分と同様に、変数のずらしに対して不変であること。すなわち、

$$\int f(x) dx = \int f(x - y) dx \quad (3.93)$$

グラスマン数の自乗は0なので、一般のグラスマン数を含む関数はすべて、

$$f(x) = a + bx \quad (3.94)$$

のように x の1次式で書ける。この関数を部分積分可能条件に入れると、

$$\int b dx = 0 \quad (3.95)$$

であることがわかる。すなわち、定数をグラスマン積分すると0である。

また変数のずらしに対して不変である条件に入れると

$$\int dx(a + bx) = \int dx(a + b(x - y)) \quad (3.96)$$

$$\int dx bx = b \int dx x \quad (3.97)$$

となってこの条件も満たす。

$\int dx x$ はグラスマン数を2つかけたものなので単なる数である (他のグラスマン数と交換する)。よって、これを定数とする。1と置くのが普通である。結局、

$$\int dx = 0, \quad \int dx x = 1 \quad (3.98)$$

がグラスマン積分のルールであるが、これは微分

$$\frac{\partial}{\partial x} 1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} x = 1 \quad (3.99)$$

と全く同じである。すなわち、グラスマン数に関しては微分と積分の区別はない。

このルールは一見奇異にみえると思うので、もう一つの導出法をここに示しておく。ボソンの座標演算子 \hat{x} について、

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad (3.100)$$

のような固有状態を作ったとき、

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (3.101)$$

となり、

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (3.102)$$

が成り立つ。これがグラスマン数に対しても成立すべきであるとする (この式は経路積分の導出において大事であった)。

グラスマンでエルミートな座標演算子 $\hat{\eta}$ を考えると、 $(\hat{\eta})^2 = 0$ である。したがって任意の状態は

$$|\phi\rangle + \hat{\eta}|\psi\rangle \quad (3.103)$$

のように展開できることになる。この二つの状態の基底として、 $|+\rangle, |-\rangle$ を定義する。

$$\hat{\eta}|+\rangle = 0 \quad (3.104)$$

$$\hat{\eta}|-\rangle = |+\rangle \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\eta}}|-\rangle = 0 \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\eta}}|+\rangle = |-\rangle \quad (3.107)$$

ここで一つ注意しておく、 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は統計性が反対になる。ここでは $|-\rangle$ をボソンの、 $|+\rangle$ をフェルミオンの統計に選ぶ。そこで、以下では $|-\rangle_B, |+\rangle_F$ と統計性を明示する。

この基底が

$$\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 1, \langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 0 \quad (3.108)$$

のように規格化されているとする。 $\langle +|+\rangle = 0$ であることは、 $|+\rangle_F = \hat{\eta}|-\rangle_B$ であることと、 $(\hat{\eta})^2 = 0$ であることからわかる。これによって $\langle +|$ がボソンの、 $\langle -|$ はフェルミオンのである(以下では ${}_F\langle +|, {}_B\langle -|$ のように明示する)ことがわかる。このように内積を定義したことから、

$$1 = |+\rangle_F \langle -|_F + |-\rangle_B \langle +|_B \quad (3.109)$$

である。

$$\hat{\eta}|\eta\rangle_F = \eta|\eta\rangle_F \quad (3.110)$$

を満たす固有状態 $|\eta\rangle_F$ も適当に展開されているとして、 $|\eta\rangle_F = |+\rangle_F + \beta|-\rangle_B$ を代入すれば(ここで β はフェルミオニックな量であることに注意)

$$\hat{\eta}(|+\rangle_F + \beta|-\rangle_B) = \eta(|+\rangle_F + \beta|-\rangle_B) \quad (3.111)$$

となる。 $\hat{\eta}|+\rangle_F = 0$ を使うと

$$-\beta|+\rangle_F = \eta(|+\rangle_F + \beta|-\rangle_B) \quad (3.112)$$

であるから、

$$\beta = -\eta \quad (3.113)$$

とするとこの式を満たす。すなわち、

$$|\eta\rangle_F = (\hat{\eta} - \eta)|-\rangle_B \quad (3.114)$$

と書ける。この hermite 共役は

$$\langle \eta|_B = \langle -|_F (\hat{\eta} - \eta) \quad (3.115)$$

とする。

二つの固有状態の内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \eta|\eta' \rangle &= \langle -|_F (\hat{\eta} - \eta)(\hat{\eta} - \eta')|-\rangle_B \\ &= \langle -|_F (-\hat{\eta}\eta' - \eta\hat{\eta} + \eta\eta')|-\rangle_B \\ &= \langle -|_F (\eta'\hat{\eta} - \eta\hat{\eta} + \eta\eta')|-\rangle_B \\ &= \langle -|_F (\eta' - \eta)|+\rangle_F \\ &= \langle -|+\rangle (\eta - \eta') \\ &= \eta - \eta' \end{aligned} \quad (3.116)$$

となる。上に述べた積分の定義からすると、 $\eta - \eta' = \delta(\eta - \eta')$ と考えることができるので、これも boson の場合と同じ形になる。

積分 $d\eta$ を $\int |\eta\rangle_F d\eta \langle \eta|_B = 1$ となるように定義したいとすると、

$$\begin{aligned} \int |\eta\rangle_F d\eta \langle \eta|_B &= \int (\hat{\eta} - \eta)|-\rangle_B d\eta \langle -|_F (\hat{\eta} - \eta) \\ &= \int (|+\rangle_F - \eta|-\rangle_B) d\eta (\langle +|_B - \langle -|_F \eta) \end{aligned} \quad (3.117)$$

となる。 $\int d\eta(\text{定数}) = 0$, $\int d\eta\eta = 1$ とする (ということは、 $\int \eta d\eta = -1$ であることに注意) ならば、この式の右辺は

$$\int |\eta\rangle_F d\eta \langle \eta|_B = |-\rangle_B \langle +|_B + |+\rangle_F \langle -|_F = 1 \quad (3.118)$$

となる。つまり積分をうまく定義することで

$$\int |\eta\rangle_F d\eta \langle \eta|_B = 1 \quad (3.119)$$

とすることができる。

この式は

$$\int |\eta\rangle_F d\eta \langle \eta|\eta'\rangle = \int |\eta\rangle_F d\eta (\eta - \eta') = \int |\eta + \eta'\rangle d\eta \eta = |\eta'\rangle \quad (3.120)$$

となって、矛盾なくできている (途中で、積分変数のずらしを行った)。

ここで、もう一つ注意をしておこう。ボソンの場合、

$$\text{tr} \hat{A} = \int dx \langle x|\hat{A}|x\rangle \quad (3.121)$$

という計算ができた (これは分配関数の計算などで使った)。フェルミオンの場合どうなるかというと、状態は $|+\rangle_F, |-\rangle_B$ の二つなのだから、

$$\text{tr} \hat{A} = \langle +|_B \hat{A} |-\rangle_B + \langle -|_F \hat{A} |+\rangle_F \quad (3.122)$$

となるべきである。これを積分の形で書くと、

$$\begin{aligned} \int d\eta \langle -\eta|\hat{A}|\eta\rangle_F &= \int d\eta \langle -|_F (\hat{\eta} + \eta) \hat{A} (\hat{\eta} - \eta) |-\rangle_B \\ &= \langle -|_F \hat{A} \hat{\eta} |-\rangle_B + \langle -|_F \hat{\eta} \hat{A} |-\rangle_B \\ &= \langle -|_F \hat{A} |+\rangle_F + \langle +|_B \hat{A} |-\rangle_B \end{aligned} \quad (3.123)$$

となる。つまり、 $\langle -\eta|$ のように、前からかけるブラについては η の符号をひっくり返しておかないと正しいトレースにならない。このため、分配関数を経路積分を使って計算する時、ボソン場については終状態と始状態を同じという条件 (周期境界条件) をつけて積分したが、フェルミオン場については終状態と始状態が逆符号になる、という条件 (反周期境界条件) をつけて積分することになる。トレース (状態和) を取るという操作と結びつくのは半周期境界条件となっている。

経路積分を行うにおいては、ガウス積分のような積分が多くなるが、グラスマン数の場合、

$$\int dx dx^* e^{ax^*x} = a \quad (3.124)$$

となる (a は単なる定数)。普通の複素数の場合

$$\int dx dx^* e^{-ax^*x} = \frac{\pi}{a} \quad (3.125)$$

である。 π がつかないことと、定数 a が逆に出ることに注意する。

ただし、

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi e^{i \int dx dy \psi^*(x) K(x,y) \psi(y) + i \int dx (J^*(x) \psi(x) + \psi^*(x) J(x))} \quad (3.126)$$

のような量の計算結果については、ボソンのかフェルミオンのかは全体にかかる因子の違いをのぞけば、関係ない。ボソンの場合、これを計算する時には変数 (この場合 ψ, ψ^*) のずらし

に対して不変であることを利用した。その性質は ψ, ψ^* がフェルミオンのでも同様である。具体的に計算すると、

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) - K^{-1}(x, y)J(y), \quad \psi^*(x) \rightarrow \psi^*(x) - K^{-1}(x, y)J^*(y) \quad (3.127)$$

とずらしを行って、

$$\begin{aligned} & i \int dx dy \psi^*(x) K(x, y) \psi(y) + i \int dx (J^*(x) \psi(x) + \psi^*(x) J(x)) \\ &= i \int dx dy \psi^*(x) K(x, y) \psi(y) - i \int dx dy J^*(x) K^{-1}(x, y) J(y) \end{aligned} \quad (3.128)$$

となる。 ψ, ψ^* による積分をすませれば、

$$\mathcal{N} e^{-i \int dx dy J^*(x) K^{-1}(x, y) J(y)} \quad (3.129)$$

が残るわけである。

3.4.3 経路積分の2点関数＝粒子の伝播

経路積分の中に場の量をはさんで積分することで、粒子の伝播が計算できるのはなぜか、という問題を、今考えた経路積分がどのような積分になっているかを考えることで示そう。といっても空間に連続的に分布する場について積分をおこなうのはかなり面倒なので、空間を格子状に切って、格子点上に場があるとして考える。すなわち、座標 x^μ が $x_{(i)}^\mu$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$) のように可算無限個の点だと考える。すると経路積分の積分要素 $\mathcal{D}\phi$ は

$$\mathcal{D}\phi = \prod_i d\phi(x_{(i)}^\mu) \quad (3.130)$$

という意味だと考えることができる。被積分関数の \exp の肩に乗っている作用 S も同様に (ここでは Klein-Gordon 場の場合で考える)

$$S = \frac{1}{2} (\delta x)^4 \left(\sum_{[ij]} [\pm]_{ij} \left(\frac{\phi(x_{(i)}) - \phi(x_{(j)})}{\delta x} \right)^2 - m^2 \sum_i (\phi(x_{(i)}))^2 \right) \quad (3.131)$$

と解釈することができる。ただしここで $\sum_{[ij]}$ は場所 i と場所 j が隣り合うような全ての組み合わせを意味する。また、記号 $[\pm]_{ij}$ は、 i, j が空間方向に隣り合っていれば +、時間方向に隣り合っていれば - である。上の式を少し書き直すと、

$$\frac{1}{2} (\delta x)^4 \left(-2 \sum_{[ij]} [\pm]_{ij} \frac{\phi(x_{(i)}) \phi(x_{(j)})}{\delta x^2} - \left(\frac{8}{\delta x^2} + m^2 \right) \sum_i (\phi(x_{(i)}))^2 \right) \quad (3.132)$$

となる⁸。ここで実際に積分を実行するところを考える。

$$\int \prod_i d\phi(x_{(i)}) \phi(x_1) \phi(x_2) e^{\frac{1}{2} (\delta x)^4 \left(-2 \sum_{[ij]} [\pm]_{ij} \frac{\phi(x_{(i)}) \phi(x_{(j)})}{\delta x^2} - \left(\frac{8}{\delta x^2} + m^2 \right) \sum_i (\phi(x_{(i)}))^2 \right)} \quad (3.133)$$

ここで大事なことは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{ikx^2} = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数の時} \\ A(ik)^{-n/2} (n-1)!! & n = \text{偶数の時} \end{cases} \quad (3.134)$$

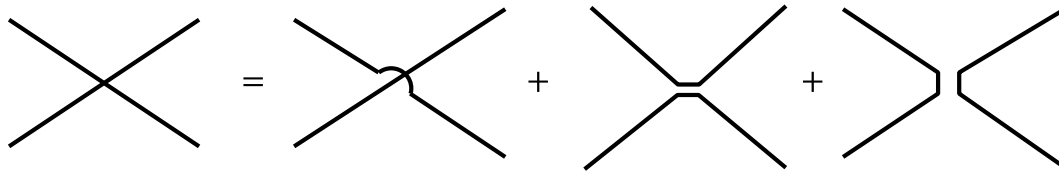
⁸ $\frac{8}{\delta x^2}$ の係数 8 は、4次元だと隣が8箇所あるところからくる。

となることである (A は n によらない定数)⁹。したがって、積分の結果、ゼロにならずに残るのは、

$$\phi(x_1)\phi(x_2)e^{\frac{i}{2}(\delta x)^4\left(-2\sum_{[ij]|\pm 1}_{ij}\frac{\phi(x_{(i)})\phi(x_{(j)})}{\delta x^2}\right)} \quad (3.135)$$

を展開して、 $\phi(x_{(i)})$ が偶数個あるものだけである。とりあえず4次以上になった場合は後で考えることにして、二次になっている場合の計算を行うとする。積分の中には $\phi(x_1)$ があるから、後ろからもう一個 $\phi(x_1)$ が出てきてくれないと積分結果は0になる。後ろから $\phi(x_1)$ が出てくる時には、かならずそれと同時に、 x_1 のとりに位置する $\phi(x)$ が出てくるはずである。 x_1 のとりになる位置を $N(x_1)$ と書いたとしよう。次に $\phi(N(x_1))$ の積分を行うと、かならずもう一個 $\phi(N(x_1))$ がなくてはならない。そこでそれをまた後ろから供給すると、同時に $\phi(N(N(x_1)))$ が出てくる。このように積分するごとに x_1 のとなり、さらにそのとなり、さらにそのとなり、と芋蔓式に $\phi(x)$ が出てくる。

なお、同一点に2個ではなく、4個、6個...とあった場合も答は non-zero で残るが、これにももちろん意味がある。4個ある場合、上の式(3.134)からわかるように、余分な因子3が出てくる。これは4つの $\phi(x)$ が集まっている点(言い替えれば、4方向からこの点に線が伸びてきている点)を『粒子の交差点』と解釈した時に、



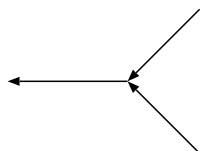
のように3つの解釈ができることに対応した数因子3である。同様に ϕ の6乗の寄与には数因子 $5!! = 15$ がかかるが、これは6本の線が一点に集まっている時、経路としてどのように解釈できるかの場合の数となる。以下も同様である。

以上からわかるように、経路積分した結果残るのは、場所 x_1 から始まって x_2 で終わる $\phi(x)$ の列ができあがった時になる。つまり ϕ という場の経路積分をすることによって、 x_1 と x_2 を結ぶすべての経路をたし上げるという計算をすることになっているのである。つまり、第1量子化の経路積分に対応する計算をやっていることになる。

厳密に言うと場の理論での経路積分によって現れる“経路”は、第1量子化の経路積分によって現れる経路と、少し違う。なぜなら、場の理論には、

の右の方の図で表せるような、時空を一周する線(ループ・ダイアグラムと呼ばれる)が含まれているからである。

なお、相互作用については次章で扱うが、以上の考察から、たとえばラグランジュアンの中に ϕ^3 のような形の項があれば、その項が



⁹ $n!!$ は n が偶数なら $n(n-2)(n-4)\cdots 4 \times 2$ 、奇数なら $n(n-2)(n-4)\cdots 5 \times 3 \times 1$ という意味になる記号。double factorial と呼ぶ。

のような、3点相互作用(上の図の例は、2粒子が融合して1粒子になるである)を生成することがわかる。

3.5 Dirac場の正準量子化

3.5.1 正準形式に移行する時の問題

フェルミオンの正準量子化では、いくつかの問題が出る場合がある。ここでは単純な複素Dirac場の場合でそれを示す。

$$L = \int d^3x \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \right] \quad (3.136)$$

ここで、

$$\bar{\psi}_a = \psi_b^*(\gamma^0)_{ab} \quad (3.137)$$

である。よって、作用内の時間微分項は、

$$i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi = i\psi_\alpha^*(\gamma^0)_{\alpha\beta}(\gamma^0)_{\beta\gamma}\partial_0\psi_\gamma = i\psi_\alpha^*\partial_0\psi_\alpha \quad (3.138)$$

となる。

普通、ここで、 $\pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$ で運動量を定義したくなるどころだが、フェルミオンの場合は反交換するので、この微分を左から行なうか右から行なうかで答えが変わってくる。ここでは、右から行なうとして考えよう。そのことを明確にするため、微分には ∂_r のように

r をつける(左から微分する時は ∂_l)。すると、

$$\pi_\psi(x) \equiv \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}(x)\gamma^0 = i\psi^*(x) \quad (3.139)$$

となる。ここで本来、 ψ^* と ψ は独立なのだから、 π_{ψ^*} を導入すべきであるが、ここで ψ^* が ψ の共役運動量であることがわかったので、 ψ^* に対しては独立な座標とみなさない、という“簡便法”の立場を取る。正準“反”交換関係は

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \pi_{\psi_\beta}(t, \vec{y})\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.140)$$

とする。これは $[x, p] = i$ を拡張したわけであるが、ここでもし、 $[p, x] = -i$ を拡張するつもりで、

$$\{\pi_{\psi_\alpha}(t, \vec{x}), \psi_\beta(t, \vec{y})\} = -i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.141)$$

と書いたとすると、これは上とは符号が違った定義になってしまうことに注意する。実際にはHeisenbergの運動方程式がうまく出るような定義を選ばなくてはならない。

ハミルトニアンを計算すると、

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\pi_\psi \dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \right] \\ &= \int d^3x \left[-i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi + m\bar{\psi}\psi \right] \end{aligned} \quad (3.142)$$

となる。ここで π_ψ と $\dot{\psi}$ の順番にも注意が必要である。 $\pi_\psi\dot{\psi}$ と選んでおくと、微分の方法などとconsistentである。Heisenbergの運動方程式を書いて見ると、

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}(x) &= [\psi(x), H] \\ &= \int d^3y \{\psi(x), \psi^*(y)\} \left[-i\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi(y) + m\gamma^0\psi(y) \right] \\ &= -i\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi(x) + m\gamma^0\psi(x) \end{aligned} \quad (3.143)$$

両辺に γ^0 を掛けて右辺を移項すると、

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0 \quad (3.144)$$

となり、Dirac 方程式を再現する。ここでの微分の定義などに問題がなかったということである。

Dirac 方程式の解を、次のように Fourier 展開する。

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left[b(\vec{k}, s) u_\alpha(\vec{k}, s) e^{-ikx} + d^\dagger(\vec{k}, s) v_\alpha(\vec{k}, s) e^{ikx} \right] \quad (3.145)$$

さてここで、

$$\psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left[d(\vec{k}, s) v^*(\vec{k}, s) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}, s) u^*(\vec{k}, s) e^{ikx} \right] \quad (3.146)$$

との同時刻反交換関係を出して見よう。この時

$$\{b(\vec{k}, s), b^\dagger_{k', s'}\} = \delta_{ss'} \delta(k - k') \quad (3.147)$$

$$\{d(\vec{k}, s), d^\dagger_{k', s'}\} = \delta_{ss'} \delta(k - k') \quad (3.148)$$

$$(3.149)$$

と選べば、

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \vec{x}), \psi^*(t, \vec{y})\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \frac{1}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \sum_{ss'} \left[u(k, s) u^*(k', s') e^{-ikx + ik'y} + v(k, s) v^*(k', s') e^{ikx - ik'y} \right] \\ &\quad \times \delta_{ss'} \delta(k - k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k_0} \sum_s \left[u(k, s) u^*(k, s) e^{-ik(x-y)} + v(k, s) v^*(k, s) e^{ik(x-y)} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k_0} \sum_s \left[(\gamma^\mu k_\mu + m) e^{-ik(x-y)} + (\gamma^\mu k_\mu - m) e^{ik(x-y)} \right] \gamma^0 \end{aligned} \quad (3.150)$$

最後の行では、 $u(k, s) u^*(k, s) = u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^0$, $v(k, s) v^*(k, s) = v(k, s) \bar{v}(k, s) \gamma^0$ と、

$$\sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s) = \gamma^\mu k_\mu + m, \quad \sum_s v(k, s) \bar{v}(k, s) = \gamma^\mu k_\mu - m$$

を使った。

さらに最後の項の $k_i \rightarrow -k_i$ と置き換えると、

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2k_0} \left[(\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i + m) + (\gamma^0 k_0 - \gamma^i k_i - m) \right] e^{-ik(x-y)} \gamma^0 \quad (3.151)$$

となり、[] 内ではちょうど $2\gamma^0 k_0$ が残る。 $2k_0$ は約分されて消えて、 $(\gamma^0)^2 = 1$ を使うと結局、

$$\{\psi(t, \vec{x}), \psi^*(t, \vec{y})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik(x-y)} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.152)$$

となるようになっている。

$$\begin{aligned}
\langle T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) \rangle &\equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \frac{1}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \sum_{ss'} \langle 0|b_{ks}u(k,s)e^{-ikx}b_{k's'}^\dagger \bar{u}(k',s')e^{iky}|0 \rangle \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \frac{1}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \sum_{ss'} \langle 0|d_{ks}\bar{v}(k,s)e^{-iky}d_{k's'}^\dagger v(k',s')e^{-ikx}|0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} \sum_s u(k,s)\bar{u}(k,s)e^{-ik(x-y)} \\
&\quad - \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} \sum_s v(k,s)\bar{v}(k,s)e^{ik(x-y)} \\
&= \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} (\gamma^\mu k_\mu + m)e^{-ik(x-y)} \\
&\quad - \theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} (\gamma^\mu k_\mu - m)e^{ik(x-y)} \\
&= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{2k_0} e^{-ik(x-y)} \right] \\
&= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)iK^{-1}(x-y)
\end{aligned} \tag{3.153}$$

ただし、ここでT積を定義する時に、時間順序がひっくり返ったものは「足す」のではなく「引く」必要があったことに注意。これは fermion の反交換関係と consistent にするためである。求められたこの形は、Klein-Gordon の場合とよく似ている。作用を

$$\int dx \int dy \bar{\psi}(x) \delta(x-y) (i\not{\partial} - m) \psi(y) \tag{3.154}$$

と書き直し、 $\kappa = \delta(x-y) (i\not{\partial} - m)$ と定義すると、作用は $\int dx dy \bar{\psi}(x) \kappa(x,y) \psi(y)$ と、 κ が $\bar{\psi}$ と ψ の間に挟まれていると考えられる。 $(i\not{\partial} + m)K^{-1}(x-y)$ にこの κ をかけてやると、

$$(i\not{\partial} - m)(i\not{\partial} + m)K^{-1}(x,y) = (-\partial^2 - m^2) K^{-1}(x,y) = \delta(x-y) \tag{3.155}$$

となる。すなわち、 $\kappa^{-1}(x,y) = (i\not{\partial} + m)K^{-1}(x-y)$ と定義できるのである。「T積の真空期待値は運動項の演算子の逆である Green 関数の i 倍である」ということが Fermion の場合でも言える。

というわけで、今もとめた関数を $S_F(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)K^{-1}(x-y)$ とおき、

$$S_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi^4)} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ik(x-y)} = \frac{1}{(2\pi^4)} \int d^4p \frac{1}{\not{p} - m} e^{-ik(x-y)} \tag{3.156}$$

と書く。第2の式の $\frac{1}{\not{p} - m}$ は逆行列を示す記号的書き方と考えよ。

第4章 場の相互作用

4.1 相互作用する場のとりあつかい

4.1.1 場の理論の Heisenberg 表示、Schrödinger 表示、相互作用表示

前章の最後では場の理論を Heisenberg 表示で扱った。すなわち、場の量が時間 t に依存していた。しかし、量子力学同様、これを Schrödinger 表示（演算子ではなく状態が時間に依存する形式）で扱うこともできる。Schrödinger 表示での場を $\phi_S(\vec{x})$ と書くことにすると、

$$\phi_S(\vec{x}) = e^{-iHt} \phi_H(t, \vec{x}) e^{iHt} \quad (4.1)$$

のように Heisenberg 表示の場 $\phi_H(t, \vec{x})$ とつながる。この場合、状態ベクトル $|\psi\rangle$ は

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle \quad (4.2)$$

のようになって、時間に依存する量となる。 ϕ で作られた演算子 $\hat{A}(t)$ の期待値を考えると、

$$\langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle = \langle \psi | e^{iHt} e^{-iHt} \hat{A}(t) e^{iHt} e^{-iHt} | \psi \rangle = \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle \quad (4.3)$$

となって、どちらの表示でも同じ値を与える。

ここではハミルトニアン H が時間によらないとして考えているが、時間による場合であれば、 $Ht \rightarrow \int_{t_i}^t H(t') dt'$ のように積分に置き換えれば同様のことができる。

相互作用がない場合、これらの表示のどちらでも同様に計算を行うことができるが、場に相互作用があると、そう簡単ではなくなる。この場合、まずハミルトニアンが

$$H = H_F + H_I \quad (4.4)$$

のように、自由場の場合のハミルトニアン H_F と相互作用ハミルトニアン H_I に分れると仮定する。ここで Schrödinger 表示であれば状態は

$$|\psi_S(t)\rangle_S = e^{-i(H_F + H_I)t} |\psi_S(t=0)\rangle \quad (4.5)$$

のように時間発展する。一方、Heisenberg 表示であれば状態

$$|\psi_H\rangle \quad (4.6)$$

は全く時間発展しない。そこでこの中間である相互作用表示を考える。相互作用表示と Schrödinger 表示の関係は

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_F t} |\psi(t)\rangle_S \quad (4.7)$$

である。相互作用表示の状態の時間発展を考える。(4.7) を時間微分すると、

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I &= i \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_F t} |\psi(t)\rangle_S) \\ &= -e^{iH_F t} H_F |\psi(t)\rangle_S + i e^{iH_F t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S \\ &= -e^{iH_F t} H_F |\psi(t)\rangle_S + e^{iH_F t} (H_F + H_I) |\psi(t)\rangle_S \\ &= H_I(t) |\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (4.8)$$

のような方程式ができる。ただしここで $H_I(t) = e^{iH_F t} H_I e^{-iH_F t}$ である。この状態は

$$|\psi(t)\rangle_I = T \left(e^{-i \int H_I(t) dt} \right) |\psi(t=0)\rangle_I \quad (4.9)$$

のように時間発展する。相互作用がない場合、状態は Heisenberg 表示同様、時間発展しない。

ここでこの式にかかる exp 因子が T 積の形になっていることの意味を述べよう。 $H_I(t)$ は H_F と違って時間の関数になる。そのため、 $e^{-iH_F t}$ の場合のように、単なる時間との掛け算では表せなくなる。

まず時間を連続的にではなく、 $t = n\Delta t$ (n は整数) のように離散的に考えると、この式は

$$T \left(e^{-i \int H_I(t) dt} \right) \rightarrow e^{-iH_I(t_i+N\Delta t)\Delta t} e^{-iH_I(t_i+(N-1)\Delta t)\Delta t} \dots e^{-iH_I(t_i+2\Delta t)\Delta t} e^{-iH_I(t_i+\Delta t)\Delta t} e^{-iH_I(t_i)\Delta t} \quad (4.10)$$

のように考えることができる ($N\Delta t = t_f - t_i$ を満たすように離散化されている)。

すなわち、微小時間 Δt たつごとに、 $e^{-iH_I(t)\Delta t} \simeq 1 - iH_I(t)\Delta t$ という演算子がかかっていると考えるとよい。この 1 は「何も変化が起きない」ということを表す。 $H_I(t)$ がかかると状態はなんらかの変化を起こす。微小時間ごとに小さな確率で変化が起こっていき、その積み重ねで状態が時間発展していく、という形になっている。

つまりは微分方程式を解いた解としては、このように T 積の形で書くのが正しい。

一方、Schrödinger 表示にくらべ、場の定義に余分な因子 $e^{iH_F t}$ がついていることを考えると、相互作用表示での場 $\phi(t, \vec{x})_I$ は

$$\phi(t, \vec{x})_I = e^{iH_F t} \phi(\vec{x})_S e^{-iH_F t} \quad (4.11)$$

のように時間発展するとすれば、期待値を取った時にはどの表示でも同じ結果を出すことになる。これは自由場の場合の Heisenberg 表示の場の演算子と同じ時間発展である。つまり相互作用表示では、場の演算子は自由場の場合の Heisenberg 表示と全く同じように時間発展する。相互作用表示では状態の方も時間発展するが、Schrödinger 表示と違って全ハミルトニアンによってではなく、相互作用ハミルトニアンによって時間発展する。

なぜこのようにするかというと、一般に、相互作用が入った場合では Heisenberg 方程式が解けないからである。その場合、場の演算子 $\phi(\vec{x}, t)$ のように時間と空間の関数として表すことができない。

相互作用表示の場合に状態の前にかかる因子 $T \left(e^{-i \int H_I(t) dt} \right)$ を考えてみる。

$$U(t_f, t_i) = T \left(e^{-i \int_{t_i}^{t_f} H_I(t) dt} \right) \quad (4.12)$$

を U 行列と呼び、相互作用表示の場合の状態の遷移を表す行列である。

なお、実際の計算ではこの演算子の exp をまじめに計算することはできないことが多く、なんらかの形の摂動計算をすることになる。

実験との比較を行うような場合を考えると、粒子間の相互作用は比較的短い時間の間に起こる。そこで相互作用ハミルトニアンを

$$H_I(t) \rightarrow e^{-\epsilon|t|} H_I(t) \quad (4.13)$$

のように書き直されていると考えて、 $t \rightarrow \pm\infty$ においては相互作用がスイッチオフされていると考える。すなわち、 $t = \pm\infty$ では状態、場の演算子ともに Heisenberg 表示の状態と同じになっている。これらの状態を $|\psi(-\infty)\rangle = |in\rangle$, $|\psi(\infty)\rangle = |out\rangle$ のように表し、それぞれ in-状態、out-状態と呼ぶ。演算子も ϕ_{in} , ϕ_{out} をそれぞれ in-演算子、out-演算子と呼ぶ。この二つは式としての形は同じであるが、同じものではないことに注意する。

これらの場を漸近場と呼ぶ。くわしい話はくりこみの話をする時に行うが、例えば $a^\dagger|0\rangle$ を1粒子状態と呼んだりするのは、漸近場に対してではないと正しくはない。相互作用の影響で、「1粒子状態」というものを定義できなくなってしまうからである。

4.1.2 具体例— ϕ^3 相互作用

$$H_I(t) = \frac{g}{3!} \int d^3\vec{x} \phi^3(t, \vec{x}) \tag{4.14}$$

の場合を考える。 H_F はフリーの Klein-Gordon 場のものと同じとする。

$\phi(t, \vec{x})$ に Free な Heisenberg 表示の場合の展開を代入すると、

$$H_I(t) = \frac{g}{3!} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{p} d^3\vec{q} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p\omega_q\omega_{p+q}}} \left[\begin{aligned} & a(\vec{p})a(\vec{q})a(-\vec{p}-\vec{q})e^{-i(\omega_p+\omega_q+\omega_{p+q})t} \\ & + 3a^\dagger(\vec{p}+\vec{q})a(\vec{p})a(\vec{q})e^{-i(\omega_p+\omega_q-\omega_{p+q})t} \\ & + 3a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})a(\vec{p}+\vec{q})e^{i(\omega_p+\omega_q-\omega_{p+q})t} \\ & + a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(-\vec{p}-\vec{q})e^{i(\omega_p+\omega_q+\omega_{p+q})t} \end{aligned} \right] \tag{4.15}$$

のようになる。

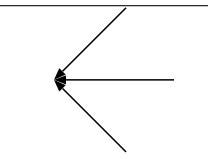
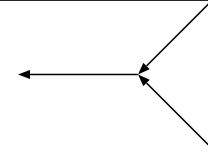
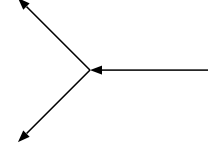
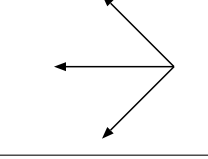
ここで4つの項が現れているが、その全ては生成・消滅演算子の3次式となっている。たとえば第3項 ($a^\dagger a^\dagger a$ の項) を見てみよう。今1粒子状態 ($a|0\rangle$) にこの演算子がかかると、

$$a^\dagger a^\dagger a \times a|0\rangle \rightarrow a^\dagger a^\dagger|0\rangle \tag{4.16}$$

のように2粒子状態となる。すなわち、この項は「1粒子を消して2粒子を作る」あるいは「1粒子が2粒子に分裂する」という相互作用を表している。

他の演算子も同様に考えると、左のように表に書ける。

3粒子が生成したり3粒子が消滅したりするのはエネルギーが保存してないように見えるが、これを見て心配することはない。心配なくてよい理由の一つは、ここで「エネルギー」のように見える $\hbar\omega$ という量は「相互作用表示の H_F の固有値」(相互作用表示で考えていると、 ϕ は H_F に従って時間発展する) であって、全エネルギー $H_F + H_I$ のそれではない¹。

式による表現	現象	図による表現
aaa	3個の粒子が消滅	
$a^\dagger aa$	2粒子が消滅して1粒子が生成	
$a^\dagger a^\dagger a$	1粒子が消滅して2粒子が生成	
$a^\dagger a^\dagger a^\dagger$	3粒子が生成	

¹じゃあ、全エネルギーの固有状態を作れば…と言いたくなるところだが、そんな計算ができないからこそ摂動計算をしている。

いやしかし、こんな現象がどんどん起こって「エネルギー」 H_F （以下、括弧付きの「エネルギー」は H_F の固有値のことで、保存するであろう全エネルギーではないことに注意）が増えていくとするとやはりどんどん全エネルギー（ $H_F + H_I$ ）も増えていくような気がして心配だという人がいるかもしれないが、その心配も不要である。なぜならば実際に起こる現象を考える時には $-iH_I\Delta t$ のように一瞬の H_I を考えるのではなく、長い時間で積分した $T\left(e^{-i\int H_I dt}\right)$ を考える。この時間積分は、「エネルギー」が保存しないような過程の確率振幅は相対的に小さくなっていく。たとえば H_I は $a(\vec{p})a(\vec{q})a(\vec{p}+\vec{q})e^{-i(\omega_p+\omega_q+\omega_{p+q})t}$ のような項を含むが、この項は振動数 $\omega_p + \omega_q + \omega_{p+q}$ で振動している項であるから、この項だけを長い時間間隔 t で積分すると、相殺して消えてしまう（これは他の項でも同じ）。「エネルギー」が保存しない項の寄与は長時間平均で消えることになる。そしていくつかの項が組み合されて「エネルギー」が保存してくれるような項が生き残る。つまり長時間の過程を観測する時にはどうせ、いっけん「エネルギー」が保存してないように見える現象の起こる確率は0に近づくのである。

なお、図では粒子が1点で分岐あるいは合体するような絵になっているが、これはあくまで図的な理解であって、実際にこういう現象が起こると考えてはいけない。今考えている生成消滅演算子 $a(\vec{p})(a^\dagger(\vec{p}))$ は運動量 \vec{p} の固有状態を表現する場の演算子であるから、それが作る粒子は宇宙全体にまんべんなく分布している状態である。

4.2 演算子形式での計算

4.2.1 正規積とT積：Wickの定理

(4.15)では、生成演算子と消滅演算子がある時は必ず生成演算子の方が左側にあるように並べ替えを行った。このような演算子の並べ方を「正規積」(Normal Product)と呼ぶ。通常、相互作用ハミルトニアンに現れる場の積は正規積にしておく。でないと同一時空点の相互作用ハミルトニアンの中で生成/消滅が同時に起こってしまう。詳しい計算は後で述べるが、これは $iK^{-1}(x, x)$ という形の発散を出し、好ましくない。

正規積と普通の積、およびT積の互いの関係を考えてみる。今場 ϕ を

$$\phi(x) = \phi(x)^{(+)} + \phi(x)^{(-)} \quad (4.17)$$

のように消滅演算子の部分 $\phi(x)^{(-)}$ と生成演算子の部分 $\phi(x)^{(+)}$ にわけると、二つの場の演算子の積は

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(x)^{(+)}\phi(y)^{(+)} + \phi(x)^{(-)}\phi(y)^{(+)} + \phi(x)^{(+)}\phi(y)^{(-)} + \phi(x)^{(-)}\phi(y)^{(-)} \quad (4.18)$$

であり、正規積は

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi(x)^{(+)}\phi(y)^{(+)} + \phi(x)^{(-)}\phi(y)^{(+)} + \phi(y)^{(-)}\phi(x)^{(+)} + \phi(x)^{(-)}\phi(y)^{(-)} \quad (4.19)$$

である。この二つの差を取ると、

$$\phi(x)\phi(y) - :\phi(x)\phi(y): = [\phi(x)^{(+)}, \phi(y)^{(-)}] \quad (4.20)$$

となるが、この式の両辺を真空に挟むと、

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y) - :\phi(x)\phi(y):|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = [\phi(x)^{(+)}, \phi(y)^{(-)}] \quad (4.21)$$

を示すことができる。同じことをT積に関して実行すると、

$$iK^{-1}(x, y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = T(\phi(x)\phi(y)) - :\phi(x)\phi(y): \quad (4.22)$$

となる。この式を使って、場の演算子の T 積を iK^{-1} と正規積を使って表すことができる。以後、 $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$ が何度も出てくるので、これを $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ と略記し、 $\phi(x)$ と $\phi(y)$ の縮約と呼ぶ。二つの演算子が縮約された結果は演算子ではなく、単なる c 数となる。

場の演算子の 3 乗の T 積を考えてみると、

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)) =: \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + \phi(x_1)\langle\phi(x_2)\phi(x_3)\rangle + \phi(x_3)\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle + \langle\phi(x_1)\phi(x_3)\rangle\phi(x_2) \quad (4.23)$$

のように分解できることが簡単な計算でわかる。つまり多数の場の演算子の T 積は、正規積と、そのうち 2 個を選んで縮約したものとで展開できる。これを Wick 展開と言う。一般に

$$T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n) = \sum \langle\phi_{k_1}\phi_{k_2}\rangle\langle\phi_{k_3}\phi_{k_4}\rangle\cdots\langle\phi_{k_{m-1}}\phi_{k_m}\rangle : \phi_{k_{m+1}}\phi_{k_{m+2}}\cdots\phi_{k_n} : \quad (4.24)$$

のように書ける。ただしこの \sum は全てのありえる $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ から $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ の置き換えに対して取られる。たとえば場の演算子 4 つの場合は、

$$\begin{aligned} T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) = & : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : \\ & + \langle\phi_1\phi_2\rangle : \phi_3\phi_4 : + \langle\phi_1\phi_3\rangle : \phi_2\phi_4 : + \langle\phi_1\phi_4\rangle : \phi_2\phi_3 : \\ & + \langle\phi_2\phi_3\rangle : \phi_1\phi_4 : + \langle\phi_2\phi_4\rangle : \phi_1\phi_3 : + \langle\phi_3\phi_4\rangle : \phi_1\phi_2 : \\ & + \langle\phi_1\phi_2\rangle\langle\phi_3\phi_4\rangle + \langle\phi_1\phi_3\rangle\langle\phi_2\phi_4\rangle + \langle\phi_1\phi_4\rangle\langle\phi_2\phi_3\rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる(ただし、 $\phi(x_i) = \phi_i$ のように略記した)。

この後、たくさんの場の演算子の T 積を真空中で挟んだものを計算していく。その時、正規積の部分は真空中で挟むと 0 なので、縮約がとられたものだけが結果として残る。したがって計算においては、真空中に挟まれた場の演算子の縮約を全ての有り得る方法で取っていくということが必要になる。

4.2.2 0 点関数：真空ダイアグラム

ここでまず $\langle 0|T(e^{-i\int H_I dt})|0\rangle$ を計算することを試みる。これはすなわち、真空中から真空中への遷移の確率振幅である。もともとが真空(エネルギー最低の状態)なら何も起こらないように思うかもしれないが、すでに述べたように短い時間ならエネルギー保存は破れてもよいので、真空中から粒子が放出され、また真空中に吸収されるという過程も起こり得る。これを完全に計算することはできないが、 g の各オーダー (H_I の各オーダー) で計算することは可能である。

$\mathcal{O}(g^0)$ $\langle 0|0\rangle$ となって、1。

$\mathcal{O}(g^1)$ $\langle 0|T\left(-i\frac{g}{3!}\int\phi^3 dx\right)|0\rangle$ となり、 a, a^\dagger の 3 乗が真空の間に挟まる形になるが、奇数個あるのでかならず消えてしまう。よって 0。

$\mathcal{O}(g^2)$ $\langle 0|T\left(\frac{(-ig)^2}{3!3!2!}\int\phi^3(x)d^4x\int\phi^3(y)d^4y\right)|0\rangle$ という形の計算になる。

合計 6 つの演算子 ϕ があるので、これを縮約する全てのパターンを考えてけばよい。6 個の演算子から 2 個ずつのペアを 3 つ作る演算であるから、その数は ${}_6C_{24}C_2/3! = 15$ 通りとなる。それは実は 2 種類に分類できる。

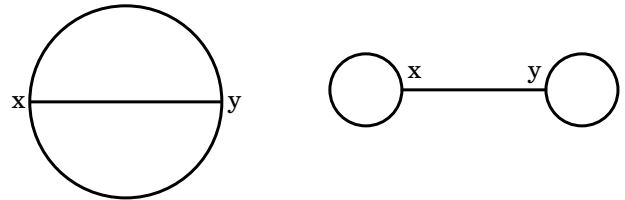
まず 1 種類めは、3 つある $\phi(x)$ と 3 つある $\phi(y)$ を互いにつないでいくという方法で、これは 3 点と 3 点を結ぶ結び方であるから、 $3! = 6$ 通りある。

もう 1 種類は $\phi(x)^3$ の中の二つを縮約、 $\phi(y)^3$ の中の二つを縮約したのち、残った $\phi(x)\phi(y)$ を縮約する方法で、 ϕ^3 の中から縮約する二つを選ぶ(縮約しない 1 つを選ぶでも同じ) のが 3 通りあるので、 $3 \times 3 = 9$ 通り。

縮約の結果が iK^{-1} になることを使うと、この2種類の計算結果は

$$(a) \quad i \frac{1}{3! \times 2} g^2 \int dx \int dy (K^{-1}(x, y))^3 \quad (4.26)$$

$$(b) \quad i \frac{1}{2 \times 2 \times 2} g^2 \int dx \int dy K^{-1}(x, x) K^{-1}(x, y) K^{-1}(y, y) \quad (4.27)$$



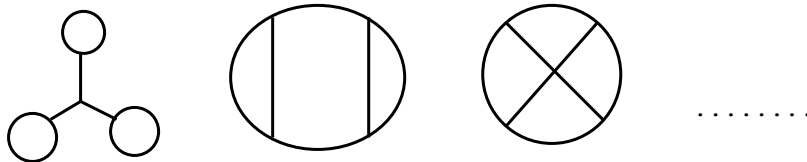
と書ける。 K^{-1} を線で表して図に書くと (a) (b) となる。このような図をファインマン図と言う。

(b) のように一つの H_I の中で縮約を取ることを self-contraction と呼ぶが、最初に「 H_I は既に正規積になっているとする」と決めておけば、このような self-contraction はできないことになる。よってその場合は (b) のような相互作用は最初から現れない。

係数 $(\frac{1}{3! \times 2}, \frac{1}{2 \times 2 \times 2})$ は線のつなぎ方の数の違いを反映している (詳しいことは次の次の節で)。

$\mathcal{O}(g^3)$ $\mathcal{O}(g)$ 同様、0。

$\mathcal{O}(g^4)$ 図で表すと、



のようにたくさんある (全てではない)。 H_I が正規積になっていれば、self-contraction の図は現れない。

$\mathcal{O}(g^5)$ 以上 省略。

以上のような図は特に「真空ダイアグラム」と呼ぶ。真空から真空への遷移確率振幅を表している。

4.2.3 2点関数

次に $\langle 0 | T (\phi(x) \phi(x') e^{-i \int H_I dt}) | 0 \rangle$ を g の次数ごとに計算してみよう。これは結局、 x' から x への場の伝播を表すのだが、相互作用の影響が入っている。

$\mathcal{O}(g^0)$

$$\langle 0 | T (\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle = iK^{-1}(x, x') \quad (4.28)$$

これは単なる propagator である。

$\mathcal{O}(g^1)$ $\langle 0 | T (\phi(x) \phi(x') \times \frac{-ig}{3!} \int \phi(y)^3 d^4y) | 0 \rangle$ となるが、奇数次の場の演算子が入っている。縮約すると必ず1個演算子が縮約されずに余るので、答は必ず0。

$\mathcal{O}(g^2)$

$$\langle 0|T \left(\phi(x)\phi(x') \frac{1}{2!} \prod_{I=1}^2 \left(\frac{-ig}{3!} \int dx_I (\phi(x_I))^3 \right) \right) |0\rangle \quad (4.29)$$

を計算すればよい。

この計算の結果は以下のように5種類のファインマン図で表せる。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \text{Diagram: A circle with two external lines labeled } x \text{ and } y. & -\frac{1}{2}g^2 \int dx' dy' K^{-1}(x, x') \left(K^{-1}(x', y') \right)^2 K^{-1}(y', y) \\
 (b) \quad & \text{Diagram: A circle with one external line labeled } x \text{ and } y \text{ attached to the top.} & -\frac{1}{2}g^2 \int dx' dy' K^{-1}(x, x') K^{-1}(x', y') K^{-1}(y', y') K^{-1}(x', y) \\
 (c) \quad & \text{Diagram: Two separate circles, each with one external line labeled } x \text{ and } y. & -\frac{1}{4}g^2 \int dx' dy' K^{-1}(x, x') K^{-1}(x', x') K^{-1}(y', y') K^{-1}(y', y) \\
 (d) \quad & \text{Diagram: A circle with a horizontal line through its center, and two external lines labeled } x \text{ and } y. & -\frac{1}{12}g^2 K^{-1}(x, y) \int dx' dy' \left(K^{-1}(x', y') \right)^3 \\
 (e) \quad & \text{Diagram: Two circles connected by a horizontal line, with two external lines labeled } x \text{ and } y. & -\frac{1}{8}g^2 K^{-1}(x, y) \int dx' dy' K^{-1}(x', x') K^{-1}(x', y') K^{-1}(y', y')
 \end{aligned}$$

となる。数因子の計算の仕方については次の節を参照せよ。

図のうち、(a)と(b)は単連結(線を切らなくては二つ以上に分離できない)であり、(c)と(d)と(e)は単連結でない(二つ以上に分離できる)。実際に物理的に興味があるのは単連結な図で表せる過程であるので、(c)~(e)は考えないのが普通である。特に(d)と(e)は $x \text{-----} y$ に真空ダイアグラムの(a)と(b)が付いているだけと考えられる。

ところで今粒子が $x \rightarrow x'$ と伝播する確率振幅を計算したいとすると、実際に計算すべきものは(2点関数) ÷ (0点関数)である。なぜなら、今状態が $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化されているとして計算したが、相互作用表示において規格化されるべきは $\langle 0|T \left(e^{-i \int H_I dt} \right) |0\rangle$ だからである。そこで後でこれ(つまり0点関数)で全ての確率振幅を割っておくことにする。いま g でテイラー展開して考えている。0点関数を $Z(g) = 1 + g^2 Z^{(2)} + g^4 Z^{(4)} + \dots$ とテイラー展開して考えるならば、

$$\frac{1}{Z(g)} = 1 - g^2 Z^{(2)} + g^4 \left(\left(Z^{(2)} \right)^2 - Z^{(4)} \right) + \dots \quad (4.30)$$

となる。一方2点関数 $G(g)$ が

$$G(g) = G^{(0)} + g^2 G^{(2)} + g^4 G^{(4)} + \dots \quad (4.31)$$

のように展開されているとすれば、

$$\begin{aligned}
 \frac{G(g)}{Z(g)} &= \left(G^{(0)} + g^2 G^{(2)} + g^4 G^{(4)} + \dots \right) \times \left(1 - g^2 Z^{(2)} + g^4 \left(\left(Z^{(2)} \right)^2 - Z^{(4)} \right) + \dots \right) \\
 &= G^{(0)} + g^2 \left(G^{(2)} - G^{(0)} Z^{(2)} \right) + g^4 \left(G^{(4)} - G^{(2)} Z^{(2)} + G^{(0)} \left(\left(Z^{(2)} \right)^2 - Z^{(4)} \right) + \dots \right)
 \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる。

この第二項である $g^2 (G^{(2)} - G^{(0)}Z^{(2)})$ を考えると、この引き算によって、

$$\begin{aligned}
 & \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \dots + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y \\
 & - \text{---}x \text{---}y \times \left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---}x \text{---}y \\ \bigcirc \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigcirc \text{---}x \text{---}y \text{---} \bigcirc \\ \text{---}x \text{---}y \end{array} \right) \\
 & = \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y + \text{---}x \text{---} \bigcirc \text{---}y
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

のようにして真空バブルを含む部分が消えてしまう。

つまりこの割り算により、(d) や (e) のような振幅は引き算されていく。

さらに、(c) のような連結でない図の寄与は物理的に意味のある計算では差し引いて考えるべきである。これについては、後で考察する。

4.3 Feynman Rule

4.3.1 Feynman 図の数の数え方:座標表示

以上の計算からわかるように、演算子 $\phi(x)$ が二つあればそれをプロパゲーター $iK^{-1}(x, y)$ に置き換えていく、という方法でいかなるオーダーであっても計算ができる。 iK^{-1} を線と考えると、相互作用 ϕ^3 は線が3本出た「頂点」である。頂点の数は g の次数であるから、 n -次の振幅を計算するためには頂点を n 個含んだ図がどれだけ書けるかを考えていけばよい。

以下では単連結でない図や self-contraction は最初から除外して考えていくことにする。

実際に場合の数をいちいち考えて各図の数因子を求めるのはたいへんである。しかし、以下のように考えると少しだけ楽になる。

ファインマン図を書こうとして線 $K^{-1}(x, y)$ $\text{---}x \text{---}y$ をどのようにつなぐかを考える時、 $\frac{1}{n!} \left(-i \int H_I dt \right)^n$ に含まれる n 個の H_I のうちどれを使うか、および $\frac{-ig}{3!} \phi^3$ に含まれる3つの ϕ のうちどの ϕ を線につなぐかを選択する必要がある。この選択は $n! \times 3!$ 個あるので、その数は前の係数の $\frac{1}{n! 3!}$ で相殺される²。同様に考えていくと、元々の式のなかの分母は全て相殺されてしまいそうである。しかし、実際には相殺されない部分が残る。図を見ると例えば図(a)は、3本の線の取り替えに対して対称である。つまり、何も考えずに数え上げると $3!$ 回同じものを数えてしまう。さらに、図は x, y の入れ換えに対しても対称である。このことを考慮しないと、同じものを2回数える。「分母が全て相殺される」という結論はこのように「同じもの

²というより、そうなるように g の前に $\frac{1}{3!}$ を入れておいたのである

を複数回数える」ということが起こらないとしての答えなので、同じものを数えてしまう回数 (この場合は $3! \times 2$) で割っておけば正しい答えがでる。これが数因子の正体である。

あと問題となるのは i などの数である。 i が式の中に出現するのは、

- g 一個ごとに $-i$
- K^{-1} 一個ごとに i

の二つであるから、図との対応として、線が iK^{-1} に対応し、頂点が $-ig$ に対応すると考えておけばよい。これで、図が書ければ計算すべき量が以下の手順でわかる。

1. 図の線一本に対し、 $iK^{-1}(*, *)$ を対応させる。
2. 図の頂点一個一個に対し、 $-ig$ を対応させる。
3. 図全体を見て、頂点、線の取り替えに対する対称性があったら、その対称性によって同等とみなせる数で割算する。
4. 中間点の座標 (J の場所ではないところ) は全て積分する。

このような Feynman 図と数式との対応のさせ方を Feynman Rule と言う。

4.3.2 簡単な 2 点関数の計算

2 点関数の $\mathcal{O}(g^0)$, $\mathcal{O}(g^2)$ の具体的な計算を行ってみよう。

$$iK^{-1}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}g^2 \int dx' dy' K^{-1}(x, x') \left(K^{-1}(x', y')\right)^2 K^{-1}(y', y) \\ = & -\frac{1}{2}g^2 \int d^4x' d^4y' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-x')} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{i}{q^2 - m^2} e^{-iq(x'-y')} \\ & \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4r \frac{i}{r^2 - m^2} e^{-ir(x'-y')} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4s \frac{i}{s^2 - m^2} e^{-is(y'-y)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

のように Fourier 変換して考える。後者の x' -積分、 y' -積分はそれぞれ δ 関数 $(2\pi)^4\delta(p - q - r)$, $(2\pi)^4\delta(q + r - s)$ を出すので、結果として、 s -積分と r -積分を実行すれば、

$$-\frac{1}{2}g^2 \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2} \int d^4q \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{(p-q)^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (4.36)$$

のような形にまとまる。残った積分 $\int d^4q \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{(p-q)^2 - m^2}$ の計算は簡単でない。なぜならこれは発散量だからからである (正直に計算すると ∞ になる)。ここでは、この結果を直接には計算せず、ただ単に結果を

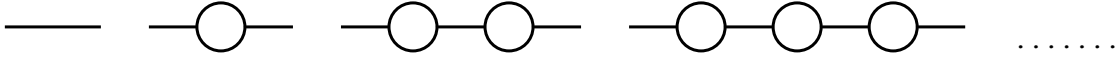
$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2} (-i)\Sigma(p^2) \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (4.37)$$

と書こう。ここで

$$\Sigma(p^2) = \frac{-ig^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{(p-q)^2 - m^2} \quad (4.38)$$

と置いた。積分したので、もはや q には依存しない。またローレンツ不変性から、結果は p^μ の方向にはよらないということを考慮すれば、 p^2 の関数として書くことができる。

ここでは $O(g^2)$ まで考えたが、もっとオーダーの高いところまで考えると（ここまでの計算の範囲でも）、



のようなたくさんの図が出てくるだろうことが予想できる。上の $\Sigma(p^2)$ はちょうど図の○一個に対応する。もちろん、オーダーの高いところでは、もっと複雑な図も出てくる。ここでは今計算した量で書けるものをとりあげているだけである。

この量は一種の無限等比級数なので、足し上げが可能である。すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} \sum_{N=0}^{\infty} \left(-i\Sigma(p) \frac{i}{p^2 - m^2} \right)^N \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} \times \frac{1}{1 - (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

この部分だけを見ると、あたかも質量が $m^2 \rightarrow m^2 + \Sigma(p^2)$ とずれたかのごとく考えることができる。というより、我々が実際に観測する質量は m^2 ではなく $m^2 + \Sigma(p^2)$ の方である。このように最初にラグランジアンに入っていた質量と、物理的質量にはずれが生じる。これを量子補正 (quantum correction) と呼び、繰り込みという考え方につながる。

例えば「1個の粒子が飛んでいる」というふうに我々が観測する現象の中でも、このような複雑な相互作用が何度も起きていると考えられる。つまり、相互作用表示における $a_p^\dagger|0\rangle$ のような状態を単純に「1粒子状態」と考えるのは厳密には正しくない。

4.3.3 運動量表示での Feynman Rule

次に同じ量を運動量表示で計算してみる。 n 点関数 $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を

$$G(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{ip_1 x_1} e^{ip_2 x_2} \dots e^{ip_n x_n} G(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.40)$$

のように Fourier 変換した量 $G(p_1, p_2, \dots, p_n)$ を考えよう³。全体的に運動量が必ず保存するので、 $G(p)$ は必ずデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta(\sum_{i=1}^n p_i)$ を含んでいる。そこで

$$G(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = \tilde{G}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \quad (4.41)$$

とした \tilde{G} を求めてみよう。Feynman 図は頂点と線で作られるが、線は伝播関数

$$iK^{-1}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (4.42)$$

³ここでは後でルールが簡単になるように、Fourier 変換の因子を 1 と選んでいる。 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ で割るという操作をしていないので、その点注意。

で表せる。そこで、運動量表示では線一本に $\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}$ が対応する。ここで $e^{-ip(x-y)}$ が入らないのは、座標 x, y は全て後で積分されるからである。

線のうち、今考えている座標 x_1, x_2, \dots, x_n につながっている線を外線、それ以外の線を内線という。まず外線部分を計算することを考える。外線一個一個について、

$$\int d_I^x K^{-1}(x_I, y) e^{ip_I x_I} = \frac{i}{p_I^2 - m^2} e^{-ip_I y} \quad (4.43)$$

のような積分をすることになるので、外線1本は $\frac{i}{p_I^2 - m^2}$ だと考えればよい。

次に頂点であるが、頂点は $-ig$ だけでなく、積分 $\int d^4x$ を含むことに注意する。運動量表示に持って行く時、この積分は運動量保存を表すデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta(\sum p)$ に化ける。ただしここで $\sum p$ はその頂点に流れ込む運動量の和である。

ここまですべてを表にすると

外線	$\frac{i}{p^2 - m^2}$
内線	$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}$
頂点	$-ig(2\pi)^4 \delta(\sum p)$

となる。

今、 N 個の頂点と M 個の内線がある場合を考える。つまり、 M 個の運動量が積分されなくてはならない。しかし、 N 個の頂点からデルタ関数が N 個できるので、独立な運動量は N 個減りそうである。ところが、この N 個の中には必ず一つ、全体で運動量が保存していることからくるデルタ関数が入っている。つまり、積分に制限を加えるのは $N - 1$ 個である。そこで、独立な運動量は $M - N + 1$ 個である。結局、 $M - N + 1$ 個の運動量積分をしなくてはならないことになる。

ここで、上の表に $(2\pi)^4$ が、内線に対して -1 乗、頂点に関して 1 乗で効いていることを考えると、全体で $(2\pi)^4$ は、 $N - M$ 個出てくることがわかる。このうち1個は全体のデルタ関数に上げることを考えると、 $\tilde{G}(p)$ に含まれる $(2\pi)^4$ は $N - M - 1$ 個。すなわち、上で考えた積分の数 $\times (-1)$ であるから、ルールの中の内線と頂点にある $(2\pi)^4$ を取り、それを積分につけてあげればよい。最終的なルールは、

外線	$\frac{i}{p^2 - m^2}$
内線	$\frac{i}{p^2 - m^2}$
頂点	$-ig$
積分	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p$

となる。

これから、図がかければ $\tilde{G}(p)$ を書き下すことができるようになる。

具体的なルールは以下ようになる。

1. 図に保存するように運動量を当てはめる。

2. 線一本ごとに $\frac{i}{p^2 - m^2}$ を対応させる。

3. 頂点一本ごとに $-ig$ を対応させる。
4. 対称因子で割る。
5. 積分しなくてはならない運動量を $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p$ をかけて積分する。

これで $\tilde{G}(p)$ が出る。さらに $(2\pi)^4 \delta(\sum p)$ を付け加えた上で

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int d^4p_1 d^4p_2 \dots d^4p_n e^{-ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} \dots e^{-ip_n x_n} \tilde{G}(p) (2\pi)^4 \delta(\sum p) \quad (4.44)$$

と積分⁴すれば座標表示での n 点関数が計算できる。

なお、 $(2\pi)^4$ を取り除いたのと同じ理由で、内線から i を、頂点から $-i$ を取り除き、かわりに積分に i をかける、という Feynman Rule を使う場合もある。その場合、 $\tilde{G}(p)$ から $G(x)$ を作る時にかける全体の運動量保存を示す因子は $-i(2\pi)^4 \delta(\sum p)$ となる。他にもいろんな流儀があるので、本などを読む時は注意すること。

4.4 経路積分による計算

なお、もし経路積分で計算したいならば、以下のように考える。例えば演算子形式で計算した時のように ϕ^3 相互作用を入れるならば、経路積分に $e^{-i\frac{g}{3!} \int d^4x \phi(x)^3}$ をはさめばよい。ここで、 J を使った表現を使えば、

$$Z[J] = e^{-i\frac{g}{3!} \int d^4x' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x')}\right)^3} \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x,y) J(y)} \quad (4.45)$$

のように書けることになる。

例えば零点関数の $\mathcal{O}(g^2)$ を取り出してみると、

$$Z[J] = \frac{1}{2!} \left(-i\frac{g}{3!}\right)^2 \int d^4x' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x')}\right)^3 \int d^4y' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y')}\right)^3 \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) K^{-1}(x,y) J(y)} \Big|_{J=0} \quad (4.46)$$

この計算は、演算子の場合と全く同様になる。演算子形式では $\phi(x)\phi(y)$ を縮約して $iK^{-1}(x,y)$ に置き換えるという形で計算が行われ、結果が伝播関数 K^{-1} の積の形で表されたが、経路積分形式では $iJK^{-1}J$ の J を微分していくことによって K^{-1} の積の形が出てくる。

4.5 相互作用が力を伝えることの模型

ここまでは簡単のために1種類の粒子だけを考えて、 ϕ^3 のような「自己相互作用」を考えた。現実の宇宙においては、「荷電粒子」と「光子」の相互作用によってクーロン引力が生じたり、「核子」と「中間子」の相互作用によって核力が生じたりする。この例の場合、「光子」や「中間子」が力を媒介する粒子という役割を担っている。

現実的な電磁場と物質の相互作用について考える前に、簡単な相互作用のモデルで粒子の間に働く力を考えてみよう。モデルとして、

$$\mathcal{L} = i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - g\phi\psi^*\psi \quad (4.47)$$

⁴Fourier 積分の因子が1だった分、逆 Fourier では $\frac{1}{(2\pi)^4}$ が必要となった。

という場合を考えよう。場の演算子 ψ で表現されている粒子 (ψ -粒子) と場の演算子 ϕ で表現されている粒子 (ϕ -粒子) がいる。

この作用から作られるオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi + g\phi\psi \quad (4.48)$$

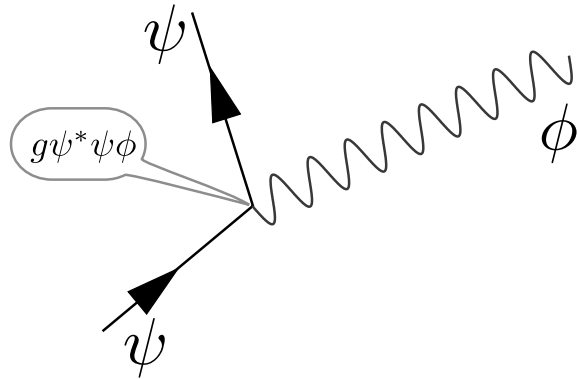
と、

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi = g\psi^*\psi \quad (4.49)$$

となる。(4.48) はポテンシャル $g\phi$ の下で運動する質量 m の非相対論的な粒子のシュレーディンガー方程式である。

(4.48) は、位置エネルギー $g\phi$ を持つ粒子のシュレーディンガー方程式になっているし、(4.49) は源 (source) が $g\psi^*\psi$ であるような Klein-Gordon 方程式となっている。

このモデルの「相互作用項」は $-g\phi\psi^*\psi$ であるから、相互作用として「演算子 ψ が ψ -粒子を一個消し、演算子 ψ^* が ψ -粒子を一個作る。同時に演算子 ϕ が ϕ -粒子を一個作るか、もしくは消す」ということが起こることになる。図では、 ψ を矢印付きの直線で、 ϕ を波線で表現した。



この相互作用によってどのような力が発生するかを、まずは運動方程式を解く、という形で (古典力学的に) 示してみよう。

(4.49) を、

$$\int d^4y \underbrace{\delta(x-y) (-\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2)}_{K(x,y)} \phi(y) = g\psi^*(x)\psi(x) \quad (4.50)$$

と書くと、

$$\int d^4y K(x,y)K^{-1}(y,z) = \delta^4(x-z) \quad (4.51)$$

と定義された K^{-1} を使って

$$\phi(x) = \int d^4y K^{-1}(x,y)g\psi(y)\psi(y) \quad (4.52)$$

のように解を書くことができる (これこそがグリーン関数の使い方である)。これを (4.48) に代入すると、

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi(x) + g^2 \int dy K^{-1}(x,y)g\psi^*(y)\psi(y)\psi(x) \quad (4.53)$$

となる。これは、今考えている「場の演算子 $\psi(x)$ で表現されている、場所 x にいる ψ -粒子」が、「別の場所 y に粒子がいる確率 $\psi^*(y)\psi(y)$ に依存する力を受ける」ということを表現している。しかもその y はありとあらゆる場所 (宇宙全体) を積分することになる⁵。

次にこれを、量子場の理論で考えてみよう。具体的には、経路積分

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(i\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi + \frac{1}{2} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2} m^2\phi^2 - g\phi\psi^*\psi \right) \right] \quad (4.54)$$

⁵ $K^{-1}(x,y)$ は、未来から過去へ情報が伝わること、もしくは超光速で情報が伝わることなどは排除するような式になっているので「宇宙全体の積分」と言われてもびっくりする必要はない。

を一部だけ計算してみる。 ϕ に関する部分を取り出して、例によって $\frac{1}{2}a^2 + ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}b^2$ という形で完全平方を行って、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) - g \int d^4x \phi(x) \psi^*(x) \psi(x) \\ = & \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(\phi(x) - g \int d^4z K^{-1}(x, z) \psi^*(z) \psi(z) \right) K(x, y) \left(\phi(y) - g \int d^4w K^{-1}(y, w) \psi^*(w) \psi(w) \right) \\ & - \frac{g^2}{2} \int d^4x d^4y \psi^*(x) \psi(x) K^{-1}(x, y) \psi^*(y) \psi(y) \end{aligned} \quad (4.55)$$

という式を作る（逆に展開すれば元に戻ることはすぐわかる）。

こうしておいて、 ϕ の経路積分を行うと、

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x d^4y \left(\phi(x) - g \int d^4z K^{-1}(x, z) \psi^*(z) \psi(z) \right) K(x, y) \left(\phi(y) - g \int d^4w K^{-1}(y, w) \psi^*(w) \psi(w) \right) \right] \quad (4.56)$$

の部分だけが ϕ によるので、この部分の結果が \mathcal{N} だったとして、経路積分の結果は

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - \frac{g^2}{2} \int d^4x d^4y \psi^*(x) \psi(x) K^{-1}(x, y) \psi^*(y) \psi(y) \right) \right] \quad (4.57)$$

がその結果となる。

これはいわば、

$$\frac{g^2}{2} \int d^4x d^4y \psi^*(x) \psi(x) K^{-1}(x, y) \psi^*(y) \psi(y) \quad (4.58)$$

という位置エネルギーが加わることを意味している。右に書いた図のような相互作用が、このエネルギーを作っていると考えればよい。

この式の意味をよりわかりやすくするために、

$$\psi^*(x) \psi(x) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1) + \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (4.59)$$

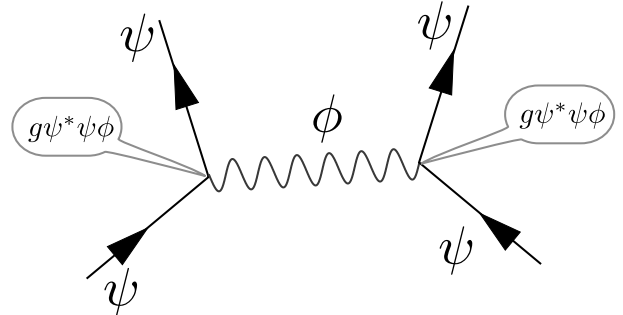
となっている場合を考えてみよう。これはつまり、 \vec{x}_1 という場所と \vec{x}_2 という場所に粒子が局在していて動かない、という状況である。この2粒子が引きあうのか反発するのか、それが知りたい。

(4.59) を代入した上で \vec{x}, \vec{y} の積分をやってしまうと、(4.58) は

$$\frac{g^2}{2} \int dx^0 dy^0 \left(K^{-1}(x^0, \vec{x}_1, y^0, \vec{x}_1) + K^{-1}(x^0, \vec{x}_1, y^0, \vec{x}_2) + K^{-1}(x^0, \vec{x}_2, y^0, \vec{x}_1) + K^{-1}(x^0, \vec{x}_2, y^0, \vec{x}_2) \right) \quad (4.60)$$

になる。このうち最初の $K^{-1}(x^0, \vec{x}_1, y^0, \vec{x}_1)$ と $K^{-1}(x^0, \vec{x}_2, y^0, \vec{x}_2)$ は相互作用のエネルギーとは言いがたい (\vec{x}_1 と \vec{x}_2 に二つの粒子があるがゆえに存在するエネルギーではなく、 \vec{x}_1 にだけ、あるいは \vec{x}_2 にだけ粒子がいるとしてもあるエネルギーである。それはあまり面白い結果を産まない。そこで残り2項を見て、 $K^{-1}(x, y)$ が偶関数であることを使って、

$$g^2 \int dx^0 dy^0 K^{-1}(x^0, \vec{x}_1, y^0, \vec{x}_2) \quad (4.61)$$



を計算すればよい。やっていこう。

$$\begin{aligned}
& g^2 \int dx^0 dy^0 K^{-1}(x^0, \vec{x}_1, y_0, \vec{x}_2) \\
&= \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int dx^0 dy^0 \int d^4 k \frac{1}{k^2 - \mu^2} e^{ik_0(x^0 - y^0) - i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \\
&= \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int dx^0 \int d^4 k \delta(k_0) \frac{1}{k^2 - \mu^2} e^{ik_0 x^0 - i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \\
&= \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int dx^0 \int d^3 \vec{k} \frac{1}{-|\vec{k}|^2 - \mu^2} e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

となる。いつも K^{-1} に被積分関数の分母に入れている $i\epsilon$ の項は、今は不要である（というのは、この積分の間に分母が 0 になることはないから）。

積分をまじめに行うと、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \frac{1}{|\vec{k}|^2 + \mu^2} e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{-ik|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \cos \theta} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 dt \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{-ik|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| t} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \int_0^\infty dk k \frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(e^{-ik|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} - e^{ik|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \int_{-\infty}^\infty dk k \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{-ik|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\
&= \frac{1}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} e^{-\mu|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

という答が出る（最後は複素積分を使う）ので、最終的な答は

$$-\frac{g^2}{2\pi} \int dx^0 \frac{1}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} e^{-\mu|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \tag{4.64}$$

という答となる。このエネルギーはマイナスであり、かつ \vec{x}_1 と \vec{x}_2 が近づけば（距離 $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ が小さくなれば）より小さくなる（負の数の絶対が大きくなる）。位置エネルギーが低い方へと状態が変化する方向に力が働く、という考え方からすると、この力は引力である。

ここで、 K^{-1} で粒子の伝播を考えて計算した結果がこの引力を表すポテンシャルであったわけだが、ここでの K^{-1} の計算では分母が 0 になることはなかったことに注意しよう。つまり、この引力を作った粒子は運動方程式を満たすような古典力学的粒子（つまり on-shell の粒子）ではなく、off-shell の粒子である。静的な力は仮想的な（virtual）粒子によって伝播されるのである。

ちなみに今計算して出てきた位置エネルギー $-\frac{1}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} e^{-\mu|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ は「湯川ポテンシャル」と呼ばれ、湯川秀樹が核力という「原子核を結びつける引力」の正体として、中間子（今の計算の ϕ 粒子）を考えて導出したものである。このポテンシャルは引力であると同時に、 $e^{-\mu|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ という因子のおかげで「遠ざかると急速に弱まる」という性質をもっており、これも実験により確認されている核力の性質に合致している。

なお、電磁場の場合、遠方でポテンシャルが $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ と距離に反比例して弱まる。これは $\mu = 0$ であるということになるが、それに加えて重大なのはクーロン力は同種電荷の場合引力ではなく斥力になる（マイナス符号はつかない）ということである。実はクーロン力も同様に粒子の

交換で説明できるのだが、その説明のためには位置エネルギーの符号がひっくり返らなくては
いけない。なお、同じ電磁場による力でも「電荷と電荷」ではなく「電流と電流」の場合は同
種ならば引力となる。

なお、位置エネルギーは g^2 に比例しているのだから位置エネルギーの符号をひっくり返すた
めには、 $g \rightarrow -g$ と置き換えてもムダである。つまり、別のところを変えない限り、「同種粒子
が反発する」という形にはならない。

この符号の反転の理由は、電磁場の特殊事情にある。次の章でそれを説明しよう。

第5章 電磁場と物質場の相互作用

5.1 ゲージ原理

5.1.1 Maxwell 方程式の特異性

電磁気の法則は、

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.4)$$

という Maxwell 方程式 (全部で 8 本) にまとめられる。さらに補助的に、

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.6)$$

のように $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ の関係が決まっている。以下では真空中だとして $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$ とし、 $c = 1$ の単位系を使うので $\epsilon_0 \mu_0 = 1$ である。

ここで、ベクトルポテンシャル \vec{A} とスカラーポテンシャル ϕ を以下のように導入する。

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (5.7)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \operatorname{grad} \phi \quad (5.8)$$

この定義によれば、(5.2) は明らかな恒等式 (rot の $\operatorname{div} = 0$) であり、(5.4) も恒等式であることが、(5.8) の両辺の rot をとると、

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となることからわかる。この結果、方程式は 4 本となる。そして力学変数となる量は \vec{A}, ϕ で合計 4 つであり、一見式の数と変数の数が一致しているように思える。だが、実は方程式の間にある恒等式が一つあり、式の数ではなく 3 と考えるべきなので、今度は変数の数の方が大きくなっている。これは後で示す。

5.1.2 電磁場の4次元表記

電場と磁場はこのように互いに結び付いているので、4次元的に見ると一個の4元ベクトルで表すことができる。

4次元 Vector Potential を

$$A_\mu = (-\phi, A_x, A_y, A_z) \quad A^\mu = (-\phi, -A_x, -A_y, -A_z) \quad (5.10)$$

と置く。すると、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.11)$$

と定義した時¹、

$$F_{i0} = -F_{0i} = F^{0i} = -F^{i0} = -\partial_i \phi - \partial_0 A_i = E_i \quad (5.12)$$

となり、

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (5.13)$$

となる。行列で表記すると、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

である。この表記法では Maxwell 方程式のうち、(5.2) と (5.4) は、

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (5.15)$$

という恒等式である。これが0になるのは、 $F_{\mu\nu}$ の定義を代入してみればすぐにわかる²。実際に上の式に $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$ をいれてみると、

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \quad (5.16)$$

すなわち、

$$\partial_0 B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0 \quad (5.17)$$

となる。同様に、 $\mu = 1, \nu = 2, \rho = 3$ とすれば、 $\text{div} \vec{H} = 0$ が出てくる。

残り2つの式については、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (5.18)$$

と書ける。これは例えば

$$\begin{aligned} \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= -\mu_0 j^0 \\ \epsilon_0 \text{div} E &= \rho \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= -\mu_0 j^1 \\ \partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 &= -\mu_0 j^1 \\ \partial_0 D_1 - \partial_2 H_3 + \partial_3 H_2 &= -j^1 \end{aligned} \quad (5.20)$$

のように、残った Maxwell 方程式を出す。

この方程式を導く作用は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \quad (5.21)$$

である。これから Euler-Lagrange 方程式を作ると確かに (5.18) が出る。大切なことは、このように定義した A^μ や $F_{\mu\nu}$ が正しくベクトルやテンソルとしての変換性を持つということである。

¹このように A から F を作る操作を微分幾何学の立場では“外微分する”と言う。数学的には A が1-形式であり、 F が2-形式であるなどと言う。

²数学的に表記するならば、“外微分を2回すると0”ということになる。

5.1.3 ゲージ変換

4次元的な表記 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を見れば明らかであるように、電磁場 $F_{\mu\nu}$ は、 A_μ を

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (5.22)$$

のように変換しても変化しない。物理的に観測されるのは F であるから、この変換は物理的内容を不変に保つ。これをゲージ変換と呼ぶ。

もともと Weyl が電磁場と重力場の統一理論として提出したものがゲージ理論である。ただし、この時、ベクトルポテンシャル A^μ は、「場所によって長さのスケールが変化する」という現象を表す場として登場した。現在のゲージ理論では「長さのスケールの変化」という意味はないが、歴史的理由により今も A^μ をゲージ場と呼ぶ。

このような変換の不変性があることは、Maxwell 方程式が独立でないことを意味している。これを見るために Maxwell 方程式を A を使って書くと、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -j^\nu \quad (5.23)$$

となる。この式の両辺に ∂_ν をかけて ν で縮約すると、左辺は恒等的に 0 となる。右辺は $-\partial_\nu j^\nu$ で、電流の保存則により 0 となる。これからわかるように一見 4 つあるように見える式 (5.23) は実は 3 つの式である。そのため、 A^μ の物理的な自由度は 4 でなく 3 なのである。³

このような不変性は、量子論を考える時にいろんな問題を引き起こす。自由度 3 しかないのに 4 成分ある量 A^μ に関して正準交換関係を作ろうとすると、4 つの一般化座標 A^μ に対して一般化運動量 π_{A^μ} は 3 つしかないということになり、交換関係が設定できないのである。この困難については後で述べる。

不変性が困難を生じさせるので、なんらかの形でこの不変性を固定しなくてはいけない(できないと、そもそも A^μ を求めることができない)。その為にはゲージ場 A に補助的な条件(ゲージ固定条件)を置く。例えば、Coulomb ゲージ $\partial_i A_i = 0$ 、Lorenz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ 、軸性ゲージ $n^\mu A_\mu = 0$ などである。

5.1.4 ゲージ変換と波動関数の位相

古典力学において、電磁場中での粒子の運動を考える時には、まず自由な粒子の運動を考え、運動量 p^μ を $p^\mu + eA^\mu$ に置き換えるという操作を行えばよいことが知られている。たとえば電荷 e を持つ、質量 m の非相対論的粒子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (p^i + eA^i)^2 - eA^0 \quad (5.24)$$

である。これから導かれる正準方程式は

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{1}{m} (p^i + eA^i) \quad (5.25)$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{e}{m} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} (p^j + eA^j) + e \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \quad (5.26)$$

³実はさらに一つ減って 2 となる。これは電磁波が横波であることに対応する。

である。上の式をもう一度 t で微分して下の式を代入することにより、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{1}{m} \left(\frac{dp^i}{dt} + e \frac{\partial A^i}{\partial t} + e \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \right) \\ m \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \frac{e}{m} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \left(p^j + e A^j \right) - e \frac{\partial A^0}{\partial x^i} + e \frac{\partial A^i}{\partial t} + e \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \\ &= -e \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \frac{dx^j}{dt} + e \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} + e \frac{\partial A^0}{\partial x^i} + e \frac{\partial A^i}{\partial t} \\ &= e \left(e^i + \epsilon_{ijk} \frac{dx^j}{dt} B^k \right)\end{aligned}\tag{5.27}$$

となって、電界と磁界による力が導出される。

これを量子力学の場合に適用する。量子力学では運動量 p^μ は微分演算子 $i\partial^\mu$ に置き換えられるので、電磁場がある場合は、この微分演算子を $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$ と置き換えればよいと考えられる。たとえば電荷 e を持った粒子の Klein-Gordon 方程式は、

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi = 0\tag{5.28}$$

とすればよい。

この方程式がゲージ不変であるかどうかを考えてみる。一見 $-ieA_\mu \rightarrow -ieA_\mu - ie\partial_\mu\Lambda$ のように“おつり” $-ie\partial_\mu\Lambda$ がでることを考えると不変でないように思えるが、ここでベクトルポテンシャル A_μ が必ず微分演算子と一緒に現れていることを考えると、微分演算子の方から $ie\partial_\mu\Lambda$ が出て来てくれば、ちょうどこのおつりを相殺してくれることがわかる。微分演算子から“おつり” $ie\partial_\mu\Lambda$ が出てくるためには、 $\phi \rightarrow e^{ie\Lambda}\phi$ のように、 ϕ に因子 $e^{ie\Lambda}$ をかけてやるような変換を施してやればよい。これは場の位相を、場所によって違う角度 Λ だけ回転させるという変換である。この二つの変換を同時に行えば、

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \rightarrow e^{ie\Lambda}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi\tag{5.29}$$

のような形で変換が行われるので、Klein-Gordon 方程式³（あるいは Schrödinger 方程式でも Dirac 方程式でも）不変になる。

もともと量子力学には、 $\phi \rightarrow e^{ie\Lambda}\phi, \phi^* \rightarrow e^{-ie\Lambda}\phi^*$ という位相変換に対する不変性があった（量子力学においては観測されるのは常にこの二つの積に演算子をはさんだものであるから）。

ただしこの場合、 $\phi^*\phi$ は不変であっても、 $\phi^*\partial_\mu\phi$ は Λ が場所に依存している場合は不変ではない（微分演算子が Λ にひっかかるから）。しかし、この微分演算子にベクトルポテンシャルを組み合わせた $\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ は、たとえ Λ が場所に依存していても不変である。

ベクトルポテンシャルは、位相変換の不変性を大域的な不変性から局所的な不変性へと拡大する時の補正として導入される、という考え方もできる⁴。

微分とベクトルポテンシャルの組み合わせ $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ はこのような意味で「共変微分」と呼ばれる。また、このようにして微分を共変微分に置き換えることでもともとあった大域的な不変性（ Λ が場所によらない場合に限る）をより大きな局所的な不変性（ Λ が場所に依存してもよい）に拡大することを「ゲージ化する」という。

共変微分は普通の微分と異なり、交換しない。その交換関係は

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu}\tag{5.30}$$

のように、 $F_{\mu\nu}$ に比例する。

⁴大域的な不変性があった時、常にそれが局所的な不変性へと“ゲージ化”されるわけではない。しかし例えばローレンツ変換をゲージ化すると重力場が出て来たりする例は他にもたくさんある。

なお、 ϕ^* に対する共変微分は $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ のように符号を逆にしておく必要がある。同様に、違う電荷を持った粒子の場に対する共変微分は $D_\mu = \partial_\mu - ie'A_\mu$ のようにする。このようにすると共変微分はライプニッツ則

$$D_\mu (AB) = (D_\mu A) B + A (D_\mu B) \quad (5.31)$$

を満たす (A, B がどんな電荷を持っていても)。この時、 AB に対する共変微分に入る電荷は A の電荷 + B の電荷である。

作用がこのような電荷に比例した角度での位相変換で不変であるための必要条件として、作用に現れる場の電荷の和がかならず 0 になっていなくてはならない。

$$ABC \rightarrow e^{ie_A \Lambda} A e^{ie_B \Lambda} B e^{ie_C \Lambda} C \quad (5.32)$$

のように変換して不変であるためには、 $e_A + e_B + e_C = 0$ でなくてはならないのである。

量子化するとそれぞれの場はそれぞれの粒子の生成・消滅演算子となる。作用に現れる場が常に電荷の和が 0 になる組み合わせになっているということは、粒子が生成・消滅した時に電荷の総和が変化しないことを意味する。すなわち、位相変換の不変性は電荷の保存則を保証しているのである。

5.2 非相対論的な場と電磁場の相互作用

5.2.1 作用とゲージ不変性

電荷 q を持った Fermi 粒子の場の理論を非相対論的に考えていく。相互作用がない場合の作用は

$$I_{FREE} = \int d^4x \left(i\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi \right) \quad (5.33)$$

であるが、ここで微分を共変微分に置き換えることにより、電磁場と相互作用する場合の作用

$$I_{Charged} = \int d^4x \left(i\psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - iqA_0 \right) \psi - \frac{1}{2m} (\partial_i + iqA_i) \psi^* (\partial_i - iqA_i) \psi \right) \quad (5.34)$$

を作ることができる。これに、電磁場自体の作用

$$I_{EM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (5.35)$$

を加えたものが全作用となる。

量子化を行うためには、前節で説明したゲージ不変性を固定しなくてはならない。非相対論的な場合には、クーロンゲージ $\partial_i A_i = 0$ を選ぶことが多い。今ゲージをとっていない状態のベクトルポテンシャルを \tilde{A}_μ とすると、ゲージ変換のパラメータ Λ を、

$$\partial_i \partial_i \Lambda = -\partial_i \tilde{A}_i \quad (5.36)$$

を満たすように選べば、新しいベクトルポテンシャルはクーロンゲージの条件を満たすようになる。 $\partial_i \partial_i = \Delta$ と表し、

$$\Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (5.37)$$

でその逆演算子を定義する⁵と、

$$\Lambda(x) = - \int \Delta^{-1}(x, y) \partial_i \tilde{A}_i(y) d^3y \quad (5.38)$$

とすればよい。クーロンゲージを取った時の運動方程式を書いてみよう。ゲージを取る前のMaxwell方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -j^\nu \quad (5.39)$$

であった。クーロンゲージ $\partial_i A^i = 0$ を取ると、左辺第2項は $-\partial_0 \partial^\nu A^0$ のみが残る。 $\nu = 0$ に対しては

$$\partial_i \partial^i A^0 = -j^0 \quad \text{即ち} \Delta A^0 = j^0 \quad (5.40)$$

という式になる。この式には時間微分がどこにもない。そのため、場 A^0 はそれ自体は力学的に発展しない、補助的な場であると言える。つまり、

$$A^0(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{y} \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) j^0(\vec{y}, t) \quad (5.41)$$

のように j^0 で表してしまいうことができる。ところで j^0 とはなんであったかという、ラグランジアン密度に $j^0 A_0$ のような形で入っているもの ($j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0}$) であったから、今の場合は $j^0 = q\psi^* \psi$ となる。これは電荷密度そのものである。この式は、 $A^0 = -\phi$ だったことを考えると、

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{y} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} j^0(\vec{y}, t) \quad (5.42)$$

という式となり、静電場の場合のクーロンポテンシャルを求める式そのものになる。ただし、これはクーロンゲージが静電場でないと取れないと言っているのではない。静電場の時と同じ式が出るようなゲージだというだけである。

この式だけを見ていると、離れた場所の $j^0(\vec{y}, t)$ が即時に $A^0(\vec{x}, t)$ に影響を受けていることになり、超光速現象を容認しているかのごとき印象を与えるが、ゲージ場 A^0 自体は観測量ではないので、これは物理的な意味での超光速現象を意味しない。物理的に意味のある量 (たとえば電場 $E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$) を考えれば、このような超光速の伝播はない。

このようにして A_0 は求めてしまいうことができるので、作用もこれを代入して簡単にしてしまおう。電磁場のラグランジアン密度は

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - (\partial_\mu A^\mu)^2) \quad (5.43)$$

とまとめられるが、括弧内の第2項は $(\partial_0 A^0)^2$ になってしまうので、ちょうど第1項の A^0 を含む部分の時間微分の項がちょうどなくなってしまう。結果は

$$-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_i \partial^\mu A^i + \partial_i A_0 \partial^i A^0) \quad (5.44)$$

となる。適当な部分積分をすると作用が

$$\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_i \partial^\mu A_i - A^0 \Delta A^0) \quad (5.45)$$

とまとまる。 A^0 の含まれる部分は

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{2} A^0 \Delta A^0 + A^0 j_0 \right) \quad (5.46)$$

⁵ $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \Delta(x, y) = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ を証明するには、まず点 \vec{y} を原点とする極座標に直す。こうすると、左辺が原点以外では0であることと、体積積分すると1であることが簡単に示せる。

となるが、ここに (5.41) を代入することによって、

$$\int dt d^3\vec{x} d^3\vec{y} \frac{1}{2} j^0(\vec{x}, t) \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) j^0(\vec{y}, t) \quad (5.47)$$

という形にまとめることができる。\$j^0\$ が電荷密度であることを考えれば、この項はちょうど、粒子の間のクーロン相互作用のエネルギーを表していることがわかる。

また、他の \$j^i\$ についても計算してみると、

$$j^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = \frac{iq}{2m} \left(\psi^* (\partial^i - iqA^i) \psi - (\partial^i + iqA^i) \psi^* \psi \right) \quad (5.48)$$

となる。これらのカレント \$j^\mu\$ は \$A\$ の 0 次を取ると、位相変換に対する Noether カレント \$J^\mu\$ の \$-q\$ 倍になっていることがわかる。もちろん、これらも保存則 \$\partial_\mu j^\mu = 0\$ を満たす。

5.2.2 正準交換関係

場 \$\psi\$ に対する運動量は \$i\psi^*\$ であり、正準反交換関係 (Fermion なので交換関係ではない) を

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi^*(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.49)$$

と設定すればよい。

次に電磁場の方を考える。\$A^0\$ が消去されたので、残る電磁場は \$A^i\$ が 3 つということになるが、実はこの 3 つは独立でない (\$\partial_i A^i = 0\$) ので、独立な電磁場は 2 個しかない。量子化を行う時には独立な自由度に対して正準交換関係を設定しなくてはいけない。そのことを考慮せずに計算すると失敗する。どのように失敗するかをまず示しておく。

\$A_i\$ に対する運動量を \$\pi^i\$ と置くと、

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial}{\partial t} A^i \quad (5.50)$$

となり、

$$[A_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t)] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.51)$$

という交換関係を置けばよさそうであるが、この交換関係は

$$[\partial_i A_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t)] = i\partial^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.52)$$

$$[A_i(\vec{x}, t), \partial_j \pi^j(\vec{y}, t)] = i\partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.53)$$

となって、本来ゼロとなるべきものがゼロにならない。

正しい交換関係を求めるためには、\$A^i\$ を \$\partial_i A^i = 0\$ によって消される部分と消されない部分に分け、消されない部分にのみ交換関係を設定するという作業が必要になる。まず運動量表示に持って行って、

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{k} A^i(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (5.54)$$

と考えると、クーロンゲージは \$k_i A^i(\vec{k}, t) = 0\$ という式になる。ここで、一般の (ゲージ条件を課していない) \$A^i\$ から、ゲージ条件を課した \$A^i\$ だけを選びだすような行列を考える。もし、\$\vec{k} = (k, 0, 0)\$ のように \$\vec{k}\$ が \$x\$-軸の方向を向いているならば、この行列は

$$\delta_{ij} - \delta_{i1}\delta_{1j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

のように考えられる。つまり、単位行列から、今抜きたい方向への単位ベクトルの直積になっている行列 (いまの場合では

$$\delta_{i1}\delta_{1j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

となる) を引けば良い。ベクトル \vec{k} が一般の方向を向いているときはその方向の単位ベクトルは $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ であるから、引き抜くべき行列は $\frac{1}{|\vec{k}|^2} k_i k_j$ となる。つまり、一般のゲージ場からクーロンゲージを満たすゲージ場への射影演算子は運動量表示では、

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \quad (5.57)$$

と書ける。この射影演算子は

$$P_{ij} P_k^j = P_{ik} \quad (5.58)$$

のように、自乗すると元に戻るという性質を持っている (一度引き抜いたら、二度引き抜いても結果はいっしょ)。

よって、この射影演算子を使って射影された部分 (2成分) に対して正準交換関係を要求すればよいことになる。

結果として出てくる正準交換関係は、

$$[A^i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (5.59)$$

となる。この交換関係は、クーロンゲージを尊重したものになっている。なお、実際にはこのような計算は『拘束系の量子化』と呼ばれ、Diracによる一般論があり、それに従えば任意性なく正準交換関係を求めることができるが、ここではとにかく自由度が抜けるような式を探すという方法を使った。

この交換関係から導かれる A の伝播関数は

$$\langle 0|T(A^i(x)A^j(y))|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \frac{i}{k^2} e^{-ik(x-y)} \quad (5.60)$$

のように、射影演算子を含んだものになる。

5.2.3 相互作用ハミルトニアン

以上からこの系のハミルトニアンを求めると、 $H = H_m + H_{EM} + H_I$ と3つにわけて書くことができ、

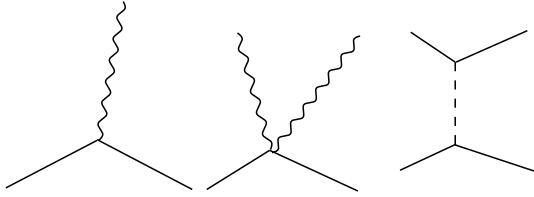
$$H_m = \frac{1}{2m} \int d^3\vec{x} \partial_i \psi^* \partial_i \psi \quad (5.61)$$

$$H_{EM} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\pi_i \pi_i + \partial_i A_j \partial_i A_j) \quad (5.62)$$

$$H_I = \frac{iq}{2m} \int d^3\vec{x} (A_i (\psi^* \partial_i \psi - \partial_i \psi^* \psi) - iq A_i A_i \psi^* \psi) \\ + \frac{q^2}{2} \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \psi^* \psi(\vec{x}) \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \psi^* \psi(\vec{y}) \quad (5.63)$$

最後の H_I が相互作用を表す項であり、その第1項は電流とベクトルポテンシャルの相互作用を、第2項はクーロン静電相互作用を表している。

ファインマン図には、



のような相互作用が現れることになる。

なお一つ補足しておく、上のような相互作用がある時、もし物質場 ψ が $\psi^*\psi = \lambda(\text{定数})$ のような分布をしていると、 H_I の中に

$$\frac{q^2\lambda^2}{2m^2}A_iA_i \quad (5.64)$$

のような項が現れる。この項は、あたかも A_i が $M = \frac{q\lambda}{m}$ の質量を持っているかのような効果を与える。つまり、この項の存在によって光子に質量が与えられる。この場合、光子は無限遠まで伝播せず、だいたい表皮深さ $\frac{1}{M}$ ぐらいまでしか浸透しなくなる。超伝導におけるマイスナー効果の説明としてこのような現象が起こっているとも考えることもできる。

ここで、前に書いた「電場の場合同種で斥力になるのはなぜか」を確認しておこう。静電場を伝えるのは A_0 であり、 A_0 の作用は、 $-\frac{1}{2}\partial_\mu A_0\partial^\mu A_0 + \dots$ となっていて、普通の Klein-Gordon 場の場合の $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \dots$ と逆符号なのである。つまり A_0 は後で出てくる「負ノルム」の粒子になっている。この符号の反転こそが、電場が同種で斥力となる理由である。

なお、電流と電流の間の力を伝えるのは A_i だが、こちらの方は $\frac{1}{2}\partial_\mu A_i\partial^\mu A_i + \dots$ となってやはり引力となるようになっている。

5.3 相対論的な場と電磁場の相互作用

5.3.1 作用

ここで、電荷 e を持った Dirac 粒子と電磁場の相互作用を考える。Dirac 粒子の作用は

$$I_{Dirac} = \int d^4x (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi) \quad (5.65)$$

であるが、この微分を共変微分に置き換える。 $\partial_\mu \rightarrow \partial - ieA_\mu$ となるので、作用に

$$I_{int} = \int d^4x e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (5.66)$$

を付け加えたことになる。電流 j が

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5.67)$$

と定義されていると思えば、(5.66) はちょうど $j^\mu A_\mu$ の形をしていて、正しく Maxwell 方程式を再現する。さらにゲージ場の作用

$$I_{gauge} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu\right) \quad (5.68)$$

を加える。

5.4 電磁場のローレンツ共変な量子化

先の節では Coulomb ゲージをとった場合について考えたが、以下でローレンツ共変な電磁場の量子化を考えて行く。先にも述べたように、このままでは4つの A に対し、運動量が3つしか出ない。実際、作用

$$I_{gauge} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right) \quad (5.69)$$

から計算してみると、

$$\pi_{A_\mu} = \frac{\delta I_{gauge}}{\delta \partial_0 A_\mu} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 \quad (5.70)$$

となるが、この式から明らかに $\pi_{A_0} = 0$ である。

一つの考え方は A_0 を力学的変数でなく、一つの補助場のように考える方法である。Coulomb ゲージを取る場合はこれに対応する。こうすると非物理的な自由度がなくなって非常に話が簡単になるが、一方で A_0 を特別扱いするためにローレンツ不変性が壊れてしまう。そこで、ゲージをローレンツ不変な形で固定していきたい。

5.4.1 ゲージ固定の問題

そこでゲージ固定を行わなくてはいけない。まず、単純にゲージ場の作用にゲージ固定条件を代入していく方法でやってみる。後で示すように、この方法は実はうまくいかない。

$$I_{gauge} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right) \quad (5.71)$$

の第2項は部分積分することによって $\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$ と書ける。よって Lorenz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ を取った場合のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_0 \partial^\mu A_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \partial_\mu A_k \partial^\mu A_k \quad (5.72)$$

と書ける。これは Klein-Gordon 場の作用とほぼ同じで、 A_k は単なる Klein-Gordon 場が3つあるだけと考えられる。 A^0 に関しては作用の符号が逆である点が問題となる。

これらの場の交換関係を考える。Klein-Gordon の場合に

$$[a(p), a^\dagger(q)] = \delta(p - q) \quad (5.73)$$

であったことを考えると、 A^k に関しては全く同じ、 A_0 に関しては逆符号となることがわかる。すなわち A^μ の生成消滅演算子 a^μ を定義すれば、その交換関係は

$$[a^\mu(p), a^{\nu\dagger}(q)] = -\eta^{\mu\nu} \delta(p - q) \quad (5.74)$$

となる。 $\mu = 1, 2, 3$ に対しては全く同じだが、 $\mu = 0$ に対しては符号が反対になっていることになる。

いま、最初に Lorenz ゲージを取ってしまったが、実際はこういうことはできない。なぜなら、今求めた交換関係と運動方程式からすると、4次元的な交換関係は Klein-Gordon の場合と全く同様に

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -i\eta^{\mu\nu} K^{-1}(x, y) \quad (5.75)$$

となってしまうが、この交換関係に $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ をかけると、

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(y)] = -i\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} K^{-1}(x, y) \neq 0 \quad (5.76)$$

となるので、条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ と矛盾するのである。よって、Lorenz 条件を強い条件と置いてはいけない。

この点は次の節で修正するが、その修正をした後でも交換関係がこうなるという結果は変わらないので、まずこの交換関係を考察し、その後に対処方法を考えよう。

この交換関係を使って1粒子状態のノルムを計算すると、

$$\langle 0|a^\mu(p)a^{\mu\dagger}(p)|0\rangle = -\eta^{\mu\mu}\delta(0) \quad (5.77)$$

となり、 $\mu = 0$ の場合、マイナスになってしまう。これは確率が負になることを意味し、物理的解釈ができない。このような状態のなす空間を不定計量の空間と呼ぶ。物理的解釈ができるためには、ノルムは正または0でなくてはならない。このような負ノルム状態を排除する必要がある。

Coulomb ゲージ ($\partial_i A_i = 0$) を取った場合、負の確率を産み出す可能性のある A^0 は物理的な場でなくなってしまうので、この問題は起きない。その替わり、ローレンツ不変性がないので苦労することになる。ローレンツ不変性を満たすように量子化を行うためには、どうしても以下に述べるようなトリックが必要になってくる。

5.4.2 補助場の導入

この処理の方法にはいくつかあるが、ここでは

$$I_{G.F.} = \int d^4x \left(\frac{\alpha}{2} B^2 + B \partial_\mu A^\mu \right) \quad (5.78)$$

を作用に付け加えると言う方法でやってみる。 B は Nakanishi-Lautrup 場と呼ばれる補助場である。 α はパラメータで、これが0であれば B に対する運動方程式から $\partial_\mu A^\mu = 0$ が出る。 $\alpha = 0$ の時が Lorenz ゲージに対応する (Landau ゲージと呼ばれることが多い)。

これを付け加えると、

$$\pi_{A_0} = B \quad (5.79)$$

という形で A_0 に対する運動量が求められる。 A の運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu B = -j^\nu \quad (5.80)$$

となる。 B に対する運動方程式は

$$\alpha B + \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.81)$$

であるので、これを使って B を消去すると、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -j^\nu \quad (5.82)$$

となる。特に $\alpha = 1$ (Feynman ゲージと呼ぶ) とすれば、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -j^\nu \quad (5.83)$$

となり、単なる Klein-Gordon 方程式となる。

補助場 B は結局 Lorenz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ の左辺の替わりのようなものである。これを 0 と置けば Lorenz ゲージを取るのと同様のことになる。しかし、強い等式として $B = 0$ と置いたのでは、先に述べた困難と全く同じことが起こる。

また、この場合の量子化を行ったとすると、交換関係は前節のもとと全く同じになり、負ノルム (負の確率) の状態が現れてしまう。このように変なことが起こってしまう理由は、最初から述べているように、電磁場 A が本来持っている自由度以上の自由度を持ってしまっていることによる。この結果、今考えている状態も物理的意味のある状態よりも広い。全状態の中から物理的状態 (確率が 0 以上である状態) を選び出してやる必要がある。つまり、等式としてではなく、状態に対する制限として $B = 0$ (または $\partial_\mu A^\mu = 0$) を要求すればよい。

全ての状態から物理的状態を選び出す条件が補助条件であり、Nakanishi-Lautrap 場を使って

$$B^{(+)}|phys\rangle = 0 \quad (5.84)$$

のように取る。ここで (+) は、正エネルギー部分 (つまり、消滅演算子の部分) を意味する。ここで $B^{(+)}$ でなく B 全体をかけて 0 とすると、これは B を強く 0 と置いたのと全く同じになってしまう。

この条件は ($\alpha B + \partial_\mu A^\mu = 0$ であるから)

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}|phys\rangle = 0 \quad (\text{Gupta-Bleuler の補助条件}) \quad (5.85)$$

と同等である。Gupta-Bleuler 条件から

$$\langle phys|\partial_\mu A^\mu|phys\rangle = 0 \quad (5.86)$$

が導かれる。つまり Lorenz 条件を強い条件ではなく、期待値が 0 になるという弱い条件に置き直していることになる。このようにすれば、 $[\partial_\mu A^\mu, *] = 0$ になる必要はなくなるので、交換関係と矛盾しなくなるのである。

ここで補助条件 (5.84) の妥当性をチェックしておこう。(5.80) に ∂^ν をかけることにより、 B が運動方程式

$$\partial^\nu \partial_\nu B = 0 \quad (5.87)$$

を満たすことがわかる。これは自由な (相互作用のない) Klein-Gordon 方程式なので、補助条件 $B^{(+)}|phys\rangle = 0$ は時間発展に対して不変である⁶。これは Lorenz 条件が時間発展しないことと同じことである。ということはすなわち、最初に物理的状態を選んでおくと、時間がたっても状態は物理的状態の中だけで変化し、決して非物理的な状態にはならない、ということになる。

この補助条件で負ノルムのモードが除去されていることを以下に示す。そのために、まずゲージ場 A を 4 つのモードにわけろ。Klein-Gordon の時と全く同様に

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a_\mu(\vec{k}) e^{-ikx} + a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right) \quad (5.88)$$

のように生成消滅演算子を定義した時、まず Lorenz 条件によって消えるモードを考える。Lorenz 条件は

$$\partial^\mu A_\mu = -i \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(k^\mu a_\mu(\vec{k}) e^{-ikx} - k^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right) = 0 \quad (5.89)$$

⁶後で示す非可換ゲージ理論では B は自由場の方程式を満たさないので、補助条件は別の形に書き換えなくてはならない。

]である。ここで、電磁場は質量が0であるので、 $k^0 = |\vec{k}|$ である。

$$b(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2k^0}} (k^0 a_0(\vec{k}) + k^i a_i(\vec{k})) \quad (5.90)$$

のように b を定義する。次にこれと独立なモードとして、

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2k^0}} (k^0 a_0(\vec{k}) - k^i a_i(\vec{k})) \quad (5.91)$$

を定義する。これらの交換関係は以下のとおりである。

$$[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0 \quad (5.92)$$

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \quad (5.93)$$

$$[a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (5.94)$$

$$(5.95)$$

A は全部で4つの自由度があるので、後二つ残っている。これら二つは横波モード a_{T_1}, a_{T_2} にとる。これらは a^0 を含まず、 k^i と直交する。 b, a の空間成分は k_i 方向を向いているので、これらと独立なモードとなる。結局

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a, b, a_{T_1}, a_{T_2}) \quad (5.96)$$

とモードを取り直した。この時交換関係の行列が

$$\begin{array}{c|cccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_0 & -1 & & & \\ a_1 & & 1 & & \\ a_2 & & & 1 & \\ a_3 & & & & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & a & b & a_{T_1} & a_{T_2} \\ \hline a & & 1 & & \\ b & & & 1 & \\ a_{T_1} & & & & 1 \\ a_{T_2} & & & & & 1 \end{array} \quad (5.97)$$

のように変化している。 a, b の部分が非対角となることに注意せよ。

この新しい演算子の組を使うと Gupta-Bleuler 条件は、

$$\partial_\mu A^{\mu(+)} |phys\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k (b(\vec{k}) e^{-ikx}) |phys\rangle = 0 \quad (5.98)$$

と書ける。これは全ての \vec{k} に対して

$$b(\vec{k}) |phys\rangle = 0 \quad (5.99)$$

を意味する。よって物理的状態 $|phys\rangle$ は a^\dagger を含んでいない (b^\dagger は含んでもよい。交換関係が対角でないことに注意せよ)。

a^\dagger モードは補助条件から存在しないので、物理的状態は一般に

$$|phys\rangle = |\Phi_0\rangle + b^\dagger(k)|\phi_1\rangle + b^\dagger(k_1)b^\dagger(k_2)|\Phi_2\rangle + \dots \quad (5.100)$$

のように、 b^\dagger 演算子の数で展開できる。ここで $|\Phi_n\rangle (n = 0, 1, 2, \dots)$ は横波光子のみが存在する状態である。

$b^\dagger(k)|\Phi_1\rangle$ との内積が0にならない状態は $\langle\Phi_1|a(k)$ であり、これは非物理的状態である。そのため、物理的状態の間で内積を取る限り、 $|\Phi_n\rangle (n > 0)$ の寄与は必ず消えてしまう。

よって物理的状態に限る限り、正か0のノルムを持つ状態だけがあり、負の確率は現れない。

ここで念のために「相互作用があった時に a^\dagger が表れることはないのか？」という点についてコメントしておく、相互作用は $j_\mu A^\mu$ という形になっていて、 j_μ は保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たしている。これは運動量表示で書くと、 $k_\mu j^\mu(k) = 0$ ということであるから、 A^μ の中の k^μ に比例する部分は、相互作用項の中に入っていない。よって a^\dagger が相互作用の結果として出現することはない。

最終的に正の確率を持って観測される光子のモードは a_{T_1}, a_{T_2} の二つの横波モードのみとなる。

5.4.3 ゲージ場に対する Feynman Rule

まずゲージ場の2点 Green 関数 $\langle 0|T(A^\mu(x)A^\nu(0))|0\rangle$ を求めよう。Klein-Gordon の場合に2点 Green 関数 $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$ が微分演算子 $\partial_\mu\partial^\mu + m^2$ の逆として求められたのと同様に、微分演算子

$$\left(\partial_\rho\partial^\rho\eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right) \quad (5.101)$$

の逆で表すことができる。すなわち、

$$\langle 0|T(A^\mu(x)A^\nu(0))|0\rangle = i(K^{-1})^{\mu\nu}(x) \quad (5.102)$$

とした時、 K^{-1} は

$$\left(\partial_\rho\partial^\rho\eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)(K^{-1})^{\nu\lambda}(x) = \delta_\mu^\lambda\delta(x) \quad (5.103)$$

と定義される。微分演算子が μ, ν という足を持ったテンソルとなっているので、その逆も2個の足をもったテンソルとなる。

まず両辺に $\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ikx}$ をかけて Fourier 変換すると、

$$-\left(k_\rho k^\rho\eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right)(K^{-1})^{\nu\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta_\mu^\lambda \quad (5.104)$$

となる。ただし、 $(K^{-1})^{\nu\lambda}(k)$ は $K^{-1}(x)$ の Fourier 変換

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ikx} (K^{-1})^{\nu\lambda}(x) \quad (5.105)$$

である。(5.104) から K^{-1} を求めるために、まず両辺に k^μ をかけてやると、

$$-\left(k_\rho k^\rho k_\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k^\mu k_\nu\right)(K^{-1})^{\nu\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}k^\lambda \quad (5.106)$$

$$-\frac{1}{\alpha}k_\mu k^\mu k_\nu (K^{-1})^{\nu\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}k^\lambda \quad (5.107)$$

$$-k_\nu (K^{-1})^{\nu\lambda}(k) = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{k^\lambda}{k^2} \quad (5.108)$$

のように $-k_\nu (K^{-1})^{\nu\lambda}(k)$ が求められるので、これを (5.104) に代入する。すると、

$$-k_\rho k^\rho (K^{-1})_\mu^\lambda(k) - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{k^\lambda k_\mu}{k^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_\mu^\lambda \quad (5.109)$$

$$-k^2 (K^{-1})_\mu^\lambda(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\delta_\mu^\lambda - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k^\lambda}{k^2} \right) \quad (5.110)$$

$$(K^{-1})_\mu^\lambda(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} \left(\delta_\mu^\lambda - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k^\lambda}{k^2} \right) \quad (5.111)$$

のようにして K^{-1} が求められるのである。結局 $K^{-1}(x)$ はこれを逆 Fourier 変換して、

$$(K_{\mu\nu}^{-1})(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{ikx} \quad (5.112)$$

となる。 $\alpha = 1$ とおいてやると、ちょうど質量のない Klein-Gordon の場合と同じものになっている (0 成分は反対符号となる)。

ゲージ固定項 $I_{G.F.}$ を入れていなかった場合、以上の計算はできない。この場合、 $\frac{1}{\alpha}$ の部分がなくなってしまうので、(5.108) の左辺が 0 になってしまうのである。

伝播関数が求められたので、Feynman Rule も同様に作ることができて、ゲージ場の線を

$$i \frac{1}{k^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (5.113)$$

とすればよい。

5.4.4 Coulomb ゲージを取った場合の計算

相対論的に不変ではないので扱いにくくなるのだが、あまり相対論的不変性が重要でないような場合にはこれはこれで便利なので、この場合について計算しておく。このゲージでは、 $\partial_i A_i = 0$ なので、運動方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial_\mu \partial^0 A^\mu = -j^0 \quad (5.114)$$

の第 2 項にある $\partial_\mu A^\mu$ を $\partial_0 A^0$ と置き換えることができる。この結果、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial_0 \partial^0 A^0 = -j^0 \quad (5.115)$$

すなわち、

$$-\partial_i \partial_i A^0 = -j^0 \quad (5.116)$$

という式が出る。この式には時間微分はないので、 A^0 はもはや力学変数ではない。実際、ラプラシアン演算子 $\Delta = \partial_i \partial_i$ は、適当な境界条件のもとでは逆が計算できるので、

$$A^0 = \frac{1}{\Delta} j^0 \quad (5.117)$$

と j^0 を使って求められてしまうことになる。ここで実際には $\frac{1}{\Delta}$ は

$$\frac{1}{\Delta}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (5.118)$$

のように定義して、

$$A^0(t, \vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{y} \int d^3\vec{k} \frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} j^0(t, \vec{y}) \quad (5.119)$$

と書く。こうやって求めた A^0 を作用に代入してしまうことにする。まず作用を

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_0 A_0 \partial^0 A^0 \\ &= -\frac{1}{2} \partial_0 A_i \partial^0 A^i - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A^0 - \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j \\ &= -\frac{1}{2} \partial_0 A_i \partial^0 A^i - \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j - \frac{1}{2} j^0 \frac{1}{\Delta} j^0 \end{aligned} \quad (5.120)$$

と書き直す。相互作用項にある $j^0 A^0$ についても同様に $j^0 \frac{1}{\Delta} j^0$ と書き直せるので、上の式の第3項と合わせて $\frac{1}{2} j^0 \frac{1}{\Delta} j^0$ が残ることになる。

この式の物理的意味を確認するために、 $\frac{1}{\Delta}$ を極座標を使って計算しよう。この式の定義は、

$$\Delta_x \frac{1}{\Delta}(x, y) = \delta^3(x - y) \quad (5.121)$$

であるから、フーリエ変換を使って、

$$\frac{1}{\Delta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{-1}{k^2} e^{ik(x-y)} \quad (5.122)$$

と書ける。

これを極座標で表す。 $\vec{x}-\vec{y}$ の方向が \vec{k} の z 軸方向となるようにすると、 $\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}) = |\vec{k}||\vec{x}-\vec{y}| \cos \theta$ と書き直せる。また積分要素は $d^3\vec{k} = dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta$ と直せるので、

$$\frac{1}{\Delta}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi k^2 \sin \theta \frac{1}{k^2} e^{ikr \cos \theta} \quad (5.123)$$

ただし、 $r = |\vec{x}-\vec{y}|$ である。この積分で、 k^2 は分母分子で消し合う。 ϕ 積分はただちに実行できる。 θ 積分は $t = \cos \theta$ とおくことによって $\int_0^\pi d\theta \sin \theta = \int_{-1}^1 dt$ と書き換えて、

$$\frac{1}{\Delta}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 dt e^{ikrt} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad (5.124)$$

$\frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr})$ の部分の二つめを $k \rightarrow -k$ と置き換えると、第1項と同じ形となり、積分域が $[-\infty, 0]$ に変わるので、これを使うと、

$$\frac{1}{\Delta}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{1}{ikr} e^{ikr} \quad (5.125)$$

となる。最後の積分は複素積分を使って評価する。公式として、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{ikr}{k}} dk = \pi i \quad (5.126)$$

となるので、

$$\frac{1}{\Delta}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (5.127)$$

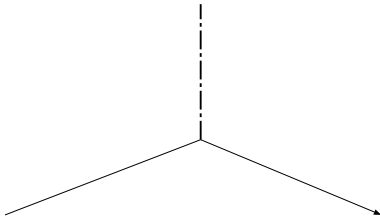
という答えが出る。これは静電ポテンシャルそのものであり、 j^0 で表現されている電荷の間に $\frac{1}{4\pi r}$ で表される位置エネルギーが存在していることを示しているのである。

残った A_i に関しては、

$$[A_i(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{x}')] = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.128)$$

のような交換関係で量子化される。この交換関係は、ゲージ条件 $\partial_i A_i = 0$ と、 $\text{div} \vec{E} = \rho$ に対応する条件 $\partial_i \pi_i = \rho$ の両方と矛盾がなく定義されている（たとえば $\partial_i A_i$ との交換関係は自動的に0になっている）。

5.4.5 相互作用



Dirac 場との相互作用は $\mathcal{L}_{int} = ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ で記述されている。これは $\bar{\psi}, \psi, A_\mu$ という3つの場の演算子の積であるから、3点の相互作用を表す。これは、左のような図で表現できる相互作用頂点を表す。

Klein-Gordon 場の場合、 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$ という置き換えで相互作用が得られたことを考えると、

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi &\rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi \\ &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ieA^\mu(\partial_\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial_\mu\phi) + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi \end{aligned} \quad (5.129)$$

のような形になるので、 $-ieA^\mu(\partial_\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial_\mu\phi)$ という項と、 $e^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi$ という項があり、3点および4点の相互作用が入っていることになる。

これらの相互作用はすべて、光子を吸収・放出する過程も考えることができるし、あるいは、二つの粒子が対消滅して光子になる、あるいはこの逆の対発生という過程と考えることもできる。

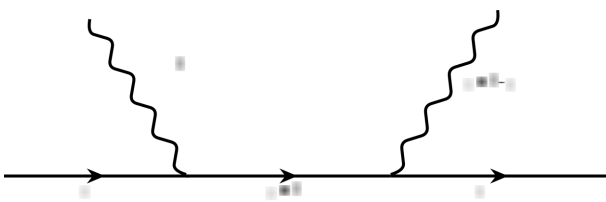
以下では電磁場の伝播関数を波線で表す。

電磁場と粒子の相互作用として、コンプトン効果を考える。入射粒子として、運動量 p を持った荷電粒子と、運動量 k を持った光子があり、これが相互作用をしたのち、運動量 q を持った荷電粒子と、運動量 $p+k-q$ を持った光子に変化したとする。つまり、荷電粒子と光子の衝突現象である。

というわけで、初期状態として、 $\psi_a(p)A^\mu(k)|0\rangle$ をとり、終状態として $\langle 0|\psi_b^\dagger(q)A^\nu(p+k-q)$ をとる。最低次数では、以下に書いてある二つのファインマン図が関係する。この二つは、どちらも

$$(ie)^2 \frac{i}{k^2} \left(\eta_{\mu\rho} - \frac{k^\mu k^\rho}{k^2} \right) \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right)_{ac} \mathcal{M}_{cd}^{\rho\lambda} \left(\frac{i}{\not{q} - m} \right)_{db} \frac{i}{(p+k-q)^2} \left(\eta_{\nu\lambda} - \frac{(p+k-q)^\nu (p+k-q)^\lambda}{(p+k-q)^2} \right) \quad (5.130)$$

という形に書くことができる。

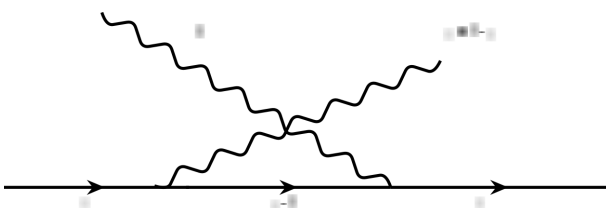


$\mathcal{M}_{cd}^{\rho\lambda}$ の部分はグラフから「外線」を取り外した部分である（外線の部分はどんなグラフでも共通なので、共通でない部分だけを考えていこうということ）。

左のグラフの場合、

$$\mathcal{M}_{cd} = \gamma_{ce}^\rho \left(\frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \right)_{ef} \gamma_{fd}^\lambda \quad (5.131)$$

となる。



一方、最低時にはもう一つのグラフを書くことができる。それが左のグラフの場合で、

$$\mathcal{M}_{cd} = \gamma_{ce}^\lambda \left(\frac{i}{\not{q} - \not{k} - m} \right)_{ef} \gamma_{fd}^\rho \quad (5.132)$$

となる。光子のベクトルの脚の付き方が逆になっていることと、内線を走る運動量が違っている。

さてここで、この散乱振幅がゲージによらないことの確認をしておこう。光子の伝播関数は α -ゲージでは $i\frac{1}{k^2}\left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$ であった（上の式では簡単のため、すでに $\alpha=0$ に置いている）。 α の違いはゲージの違いであるから、物理的な散乱振幅の中に α が入ってきてはいけない。ということはつまり、伝播関数のうち $\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$ に比例している部分が結果に残ってはいけないということである。そこで、(5.131) にこの部分がかかったものがゼロと見なせることを確認しておく。運動量 k を持っている光子は $\frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\rho} - \frac{k^\mu k^\rho}{k^2}\right)$ という形で入っているので、 $M_{cd}^{\rho\lambda}$ に k_ρ をかける。すると、

$$k_\rho \gamma^\rho = \not{k} = (\not{p} + \not{k} - m) - (\not{p} - m) \quad (5.133)$$

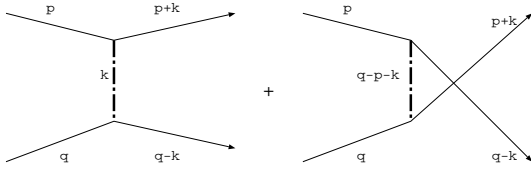
と直すことができる。このうち、 $\not{p} - m$ については、運動量 p をもった「外線」が運動方程式 (Dirac 方程式) を満たしているとすれば、 $\not{p} - m = 0$ とおける。そこで残った $\not{p} + \not{k} - m$ について考えると、これはちょうど M の中に含まれている $\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m}$ とキャンセルする。

一方、同じ計算を (5.132) に関してやれば、

$$k_\rho \gamma^\rho = \not{k} = (\not{q} - m) - (\not{q} - \not{k} - m) \quad (5.134)$$

とやることで、やはり M の中の $\frac{1}{\not{q} - \not{k} - m}$ が約分される。ただし (5.131) とは逆符号になるので、うまくキャンセルされて、トータルでは $k_\rho M^{\rho\lambda} = 0$ となることがわかるのである。これはつまり、電磁場の縦波成分がコンプトン散乱には寄与しないことを示している。

次に、正の電荷を持った粒子二つが散乱する場合を考える。最低次数の Feynman 図は



で表せる。この散乱振幅を計算すると、

$$\begin{aligned} & -e^2 \left(\frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \right)_{ab} \frac{i}{k^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(\frac{i}{\not{q} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{q} - \not{k} - m} \right)_{cd} \\ & -e^2 \left(\frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{q} - \not{k} - m} \right)_{ac} \frac{i}{(q-p-k)^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{(q-p-k)_\mu (q-p-k)_\nu}{(q-p-k)^2} \right) \\ & \times \left(\frac{i}{\not{q} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m} \right)_{bd} \end{aligned} \quad (5.135)$$

となる (粒子は可分別でないので、実際に計算する時には出て行く粒子の役割を交代したものも考慮する必要がある)。行列の添字は、運動量 $p, p+k, q, q-k$ を持つものがそれぞれ a, b, c, d というスピノルの脚がついているものとして計算されている。

真中の $\frac{i}{k^2}\left(-\eta_{\mu\nu} + (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$ はゲージ場の伝播を示すが、この伝播していくゲージ場 (光子) の中には、横波光子だけではなく、スカラー光子や縦波光子が入っている。Feynman 図の内線の部分にはこれらの非物理的粒子もちゃんと寄与するのである。しかし、この散乱振幅もやはりゲージにはよらない。証明はコンプトン効果の場合とほぼ同様にできる。

第6章 くりこみ

6.1 Feynman 図の発散

6.1.1 発散の評価

これまでの計算ではあえて触れずにいたが、実際には

$$\int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(q - p)^2 - m^2} \quad (6.1)$$

のような量は発散する。この発散をなんらかの形で処理しなければ、正しい答えはでない。

ここではこれらの発散の度合を、次数で評価する。例えば

$$\int d^4p p^k \quad (6.2)$$

のような量は、 p が大きい時、 p^{k+4} 次のオーダーで発散するはずである。(6.1) の場合は $\log p$ のオーダーで発散する。一方、

$$\int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(k - p)^2 - m^2} \frac{1}{(q - k - p)^2 - m^2} \quad (6.3)$$

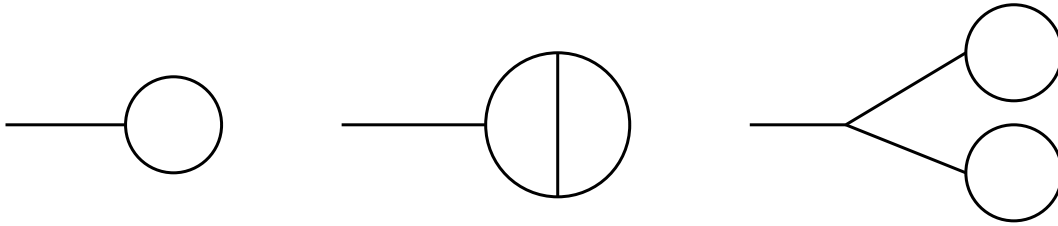
のような量は p^{-2} 次であり、発散しなくなる。

これらの積分は結局 p の次数で発散の度合が決まっていることに注意しよう。ところで、運動量 p は $[L^{-1}]$ の次元を持っている (今自然単位系 $c = 1, \hbar = 1$ を採用しているので、 $p = -i \frac{\partial}{\partial x}$)。

Klein-Gordon 場を考えた場合、作用の運動項 $\frac{1}{2} \int d^D x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ が無次元になる ($\hbar = 1$ の単位では、作用は無次元) ためには、 ϕ は $[L^{-\frac{D}{2}+1}]$ の次元を持たなくてはならない¹。 n 点関数 $\langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)) | 0 \rangle$ を考えよう。この次元は $[L^{-n\frac{D}{2}+n}]$ である。これを運動量表示で考えると、 n 個の座標を全て積分するので $[L^{Dn}]$ がかかる。結果の中の運動量保存の δ^D 関数が次元 $[L^D]$ であるからこれを取り除くと、 $[L^{n\frac{D}{2}+n-D}]$ という次元を持っている。一方、 n 点関数はかならず n 点の外線を含んでいるが、外線は運動量積分に含まれない。外線の Green 関数はひとつあたり $[L^2]$ の次元を稼ぐので、内線+頂点の部分の次元は、 $[L^{2n}]$ 分の次元を取り除いて、 $[L^{n\frac{D}{2}-n-D}]$ となる。この中に積分があるわけであるから、この次元のべきが負になると (運動量のべきが正になり) 発散の可能性がある。しかし、ここで複雑な相互作用ほどたくさん結合定数 g を含んでいることを考えにいれなくてはならない。例えば ϕ^3 の相互作用の場合、 $\frac{g}{3!} \int dx^D \phi^3$ が無次元であるためには g の次元は $[L^{\frac{D}{2}-3}]$ である。そして、 g は積分と無関係な定数である。よって、もし g が N 個入っていたとするなら、 $[L^{N\frac{D}{2}-3N}]$ の次元を稼いでくれるので、積分部分の次元は $[L^{(n-N)\frac{D}{2}-n-D+3N}]$ となる。

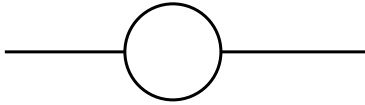
¹Fermion の場合、作用に $i\bar{\psi}\not{\partial}\psi$ の形で入るので、 ψ の次元は $[L^{-\frac{D}{2}+\frac{1}{2}}]$ となる。

もう少し具体的に見よう。 $D = 4$ とするとこれは $[L^{N+n-4}]$ となる。この場合、発散する可能性があるのは $N = 4$ まで (つまり $\mathcal{O}(g^4)$ まで) ということになる。あるいは $n = 4$ (外線4本) までである。 $n = 0$ は真空グラフであるから考えないことにする。 $n = 1$ の場合 $N = 1, 2, 3$ の場合が発散する可能性がある。実際に絵を書いて考えてみると



の3つの図が書ける。

$n = 2$ の場合は、 $N = 1, 2$ が有り得るが、 $N = 1$ ではどうしても絵が書けず、

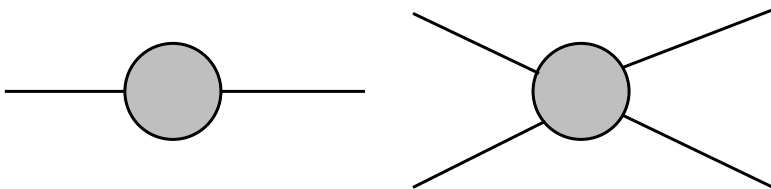


だけが発散する。 $D = 4$ の ϕ^3 理論では、発散する図はこれだけであり、これを処理しさえすればよい。

このように発散する図が有限でとどまってくれた最大の理由は、相互作用定数 g が $D = 4$ では $[L^{-1}]$ のように負のべきを持つことである。このため、相互作用定数が入れば入る程、積分の発散の次数が下がっていった。

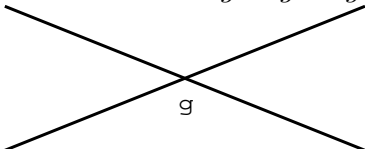
ϕ^3 でも $D = 6$ の場合、 g は無次元量となる。この場合発散の次数は $[L^{2n-6}]$ となり、 g のオーダーによらない。 $n = 3$ までが発散するので、図としては外線が3本になるところまでを考えればよい。ただし、このようなグラフは無限個ありえる。

ϕ^4 理論の場合、 g の次元は $[L^{D-4}]$ となり、 $D = 4$ でちょうど無次元である。積分の次元は $D = 4$ で $[L^{n-4}]$ であるから外線が4本までを考えればよい。 ϕ^4 では外線が奇数では常に0になるので、考えなくてはいけないグラフは



の2種類となる。ただし、図の斜線部には g の無限巾までの相互作用が入り得る。このことは、理論に現れる発散が常に ϕ^2 型か ϕ^4 型であることを示している。よって、質量や相互作用定数の再規格化 (くりこみ) によって発散が吸収できる可能性がある。

上にあげた例のように、相互作用定数の次元が長さで見て0または負のべきである場合、発散する図は有限個または有限種類となる。このような場合は、理論に現れる有限個のパラメータをずらすことによってこの発散を理論から除去することが可能である。たとえば上の ϕ^4 理論の場合、結合定数 g を $g \rightarrow g - \infty$ とずらしてやると、



で表される $\mathcal{O}(g)$ の図に負の無限大が現れる。この負の無限大を、 $\mathcal{O}(g^2)$ 以上を計算した結果出て来る無限大とちょうど同じ絶対値にしておけば、二つの図を足した結果が有限に留まる。

このような操作ができる場合を「くりこみ可能」(renormalizable) と呼ぶ。特に負のべきである場合は「超くりこみ可能」(super-renormalizable) と呼ぶ。

これに対し、相互作用定数が長さの正のべきの次元を持つ時、相互作用定数が増えれば増えるほど発散の度合もきつくなる。これは理論に現れる発散が無限個あることを意味する。すると、発散を吸収してくれるはずのべきパラメータも無限個必要となってしまう。このような場合を「くりこみ不可能」(non-renormalizable)と呼ぶ。もっとも有名な例は重力で、万有引力定数 G が $[L^2]$ の次元を持つため、くりこみは不可能である。また、4体 Fermi 相互作用は $g\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ のような項を考えると、4次元では g の次元が $[L^2]$ となってしまう、くりこみ不可能である。この4体 Fermi 相互作用は β 崩壊を表すものとして考えられたので、くりこみができないことは深刻な問題であった(ゲージ理論によりくりこみが可能となる)。

今は次元の勘定だけでくりこみ可能不可能を決めたが、実際には次元だけを見て発散するかどうかを定めることはできない。例えば次元勘定など、見かけの上では発散して見える図が、対称性などで相殺して有限部分のみが残ることなどが有り得る。超対称性を導入して重力の発散を弱くする超重力理論などはその例である。逆に、全体の次数だけ勘定すると発散していても、図の一部の図を取り出すと発散している場合もある。

以下で実際にどのように無限大を処理するかを示す。そのためには、計算のテクニックとして、「次元法」が必要である。

6.1.2 次元法

さて、くりこみの考え方を採用するにしても、まず発散をなんらかの形で有限化(regularize)しておかなくては、引き算することもできない。これには積分を $|p| \rightarrow \infty$ まで実行せずに $|p| = \Lambda$ で止める(切断)という方法や、

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - M^2} = \frac{M^2 - m^2}{(p^2 - m^2)(p^2 - M^2)} \quad (6.4)$$

と置き換えておいて、後で $M \rightarrow \infty$ の極限を取る (Pauli-Villars 法) などの方法がある。ここでは、積分などが比較的容易である、時空の次元をずらす、という方法を使う。

まず手始めに

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (6.5)$$

という積分を遂行することを考える。これは $O(p^{D-2})$ となるので、 $D \geq 2$ で発散しそうである。そこで D を小さくすれば発散の次数は下る(一般的には D を複素数にしてもよい)。そのため、一般の次元でこの積分を評価する。

この被積分関数は $p^2 = m^2$ のところに極があり、積分が面倒であることは前にも触れた。まず p^0 の積分を実行しよう。

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p^0 - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{p^0 + \omega - i\epsilon} \right) \quad (6.6)$$

として考えて行く。

まず係数 $\frac{1}{2\omega}$ は外して考えよう。複素積分で下半面を回ることにする。まず第一項の $\frac{1}{p^0 - \omega}$ の積分は、 $p^0 = \omega$ の極を拾い、回転は時計回りなので、 $-2\pi i$ の因子を出す。一方、半円上の積分は今回は0ではなく、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{x=R}^{x=Re^{-i\pi}} dx \frac{1}{x} = -\pi i \quad (6.7)$$

となる。積分結果の $-2\pi i$ はこれを含んでいるので除くと、第一項から $-\pi i$ の寄与が出る。

第2項に関しては留数が出ない。半円上の積分は第1項と同じで $-\pi i$ を出すが、一周分の積分は0なのだから直線部分の積分は πi という答である。第2項にはマイナス符号がついているから答は $-\pi i$ となる。

結局この積分の結果は、

$$\int dp^0 \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{\pi i}{\omega} \quad (6.8)$$

とまとめ、あとは

$$\frac{-\pi i}{(2\pi)^D} \int d^{D-1}\vec{p} \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (6.9)$$

を計算すればよい。

簡単のため、 $p^i = mx^i$ と置き換えよう。すると (6.9) は

$$-i \frac{m^{D-2}}{2(2\pi)^{D-1}} \int dx^{D-1} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.10)$$

となる。

この積分を極座標を使って書き直すと、角度部分の積分は $D-1$ 次元空間の単位球の表面積 $S_{D-1} = 2 \frac{\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)}$ となるので、

$$-im^{D-2} \frac{\pi^{(D-1)/2}}{(2\pi)^{D-1} \Gamma((D-1)/2)} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-2}}{(r^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.11)$$

という形になる。ここで $r = \tan \theta$ と置き直すと、 $1 + r^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $dr = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ を使って、

$$-i \frac{m^{D-2n}}{(4\pi)^{(D-1)/2} \Gamma((D-1)/2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \tan^{D-2} \theta \cos^{-1} \theta \quad (6.12)$$

さらに $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \tan^{D-2} \theta \cos^{-1} \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{D-2} \theta \cos^{1-D} \theta$ と置き直し、公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (6.13)$$

を使うことにより、

$$-i \frac{m^{D-2}}{2(4\pi)^{(D-1)/2} \Gamma((D-1)/2)} B\left(\frac{D-1}{2}, \frac{2-D}{2}\right) \quad (6.14)$$

さらに $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ より、

$$-i \frac{m^{D-2}}{2(4\pi)^{(D-1)/2} \Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (6.15)$$

となる。まとめると、

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{p^2 - m^2} = -i \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (6.16)$$

とまとまる。

今計算をミンコフスキー時空で行ったが、 $p^0 = ip^D$ として虚数の時間を使って同じ式を計算することもできる。この場合、

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{p^2 - m^2} = i \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{-p^2 - m^2} \quad (6.17)$$

となる。ただし右辺と左辺では $d^D p$ や p^2 の意味が違う。左辺では $d^D p = dp^0 dp^1 \cdots dp^{D-1}$, $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$ 、右辺では $d^D p = dp^1 dp^2 \cdots dp^D$, $p^2 = (\vec{p})^2 + (p^D)^2$ である。右辺は結局、 D 次元のユークリッド空間の積分になっているので、上で行ったと同じように極座標に直すと、 D 次元の球の表面積 $S_D = 2 \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$ がでてきて、

$$i \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{-p^2 - m^2} = -2im^{D-2} \frac{\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(D/2)} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-1}}{r^2 + 1} \quad (6.18)$$

さっきと同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr \frac{r^{D-1}}{r^2 + 1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \tan^{D-1} \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{D-1} \theta \cos^{1-D} \theta \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{D}{2}, 1 - \frac{D}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)}{2\Gamma(1)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

となるので、最終結果は

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{-p^2 - m^2} = -i \frac{m^{D-2}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \quad (6.20)$$

となって、ミンコフスキーと同じ結果が出る。このことを使って、最初からユークリッド空間を使って計算する場合も多い。

この公式を m^2 で $n-1$ 階微分すると、

$$(n-1)! \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = -i \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-n}}{(4\pi)^{D/2}} \left(\frac{D}{2}-1\right)\left(\frac{D}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{D}{2}-n+1\right) \Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) \quad (6.21)$$

となる。 $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ という公式を繰り返し使うと、

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = i(-)^n \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-n}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n)} \Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right) \quad (6.22)$$

という式を作ることができる。ここで n は自然数であったが、一般の実数に拡大して考えてもこの式は正しい。

例えば $n = 1, D = 4 - \epsilon$ とすると、

$$\frac{1}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \int d^{4-\epsilon} p \frac{1}{p^2 - m^2} = -i \frac{m^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (6.23)$$

となる。この最後の Γ 関数は

$$\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{-1 - \frac{\epsilon}{2}} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{\left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\epsilon}{2}} \quad (6.24)$$

となることから、 $-\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(1)$ という発散量になる ($\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取らなくてはいけない)。

Γ 関数は

$$\Gamma(1+z) = 1 - z\gamma + \frac{1}{2} [\gamma^2 + \zeta(2)] z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (6.25)$$

と展開できるので、これを使って計算をしていく。

6.2 具体例： ϕ^4 理論

6.2.1 Counter-term

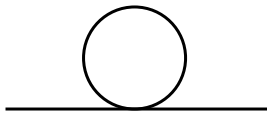
この節では4次元の ϕ^4 相互作用の理論のくりこみを考える。相互作用の影響により、理論に含まれる定数の値がずれるというのがくりこみの考え方で、今の場合、質量 m 、相互作用定数 g 、および場の演算子 ϕ の規格化の3つを調整することで相互作用の影響を計算に入れると同時に発散を除去できることが知られている。そこでこれを以下のように考える。

まず、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} g \phi^4 \quad (6.26)$$

から出発する。ここでの m, g などは、観測される質量や相互作用定数とは違うものになる可能性があることに注意しておく。

4次元の ϕ^4 理論では、前に次数を勘定した結果でわかるように、2点関数と4点関数でしか発散は出ない。そこでこの二つだけを考えればよい。 g のオーダーの低いほうから順に考えていく。 g のオーダーが1増えるごとに、Feynman図の中に頂点が増えて行く。まず $\mathcal{O}(g)$ では、頂点の一つしかない。このような場合、4点関数は積分を含まないので発散しない。2点関数は、



のような発散を含むFeynman図でかける。これを運動量空間での式で表すと

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{2} \frac{-ig}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (6.27)$$

となる。 $\frac{1}{2}$ は図の対称因子である。ここで外線を表す2個の $\frac{i}{p^2 - m^2}$ は常に現れるので省いて、内側にある積分を考える。これは先に述べた公式の $n = 1$ の場合なので、 $D = 4 - \epsilon$ ととくと、

$$\frac{1}{2} g \frac{1}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \int d^{4-\epsilon} q \frac{1}{q^2 - m^2} = -i \frac{g}{2} m^{2-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) \quad (6.28)$$

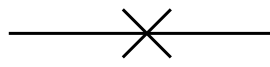
のような量となる。ここで $\gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) = -\frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(1)$ を使うと、上の式は

$$igm^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{\epsilon} \quad (6.29)$$

という発散を含んでいることになる。とりあえず有限部分のことは後で考えるとして、この発散部分を消すことを考える。そのためには、作用に相互作用項

$$-gm^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{\epsilon} \phi^2 \quad (6.30)$$

をつけくわえればよい。 ϕ^2 の前に $\frac{1}{2}$ がついているのは、こういう相互作用を入れて縮約を取る

ときにならず因子2が出るからである。この項をバツ印で表すと、のようなFeynman図が加わり、これがちょうど(6.29)を打ち消す。(6.30)はちょうど質量項と同じ形をしているので、この項を付加することは、質量を $m^2 \rightarrow m^2 + gm^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{\epsilon}$ と置き直したことに対応している。

これで $\mathcal{O}(g)$ のレベルでは発散はなくなった。なお、ここで打ち消されたのは発散している部分だけなので、有限部分は消されずに残る。よって観測される物理的質量は(あくまで $\mathcal{O}(g)$ までの計算ではあるが) m^2 でも $m^2 + gm^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{\epsilon}$ でもなく、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[m^2 + gm^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{\epsilon} - \frac{g}{2} m^{2-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] = m^2 \left(1 - g \left(\frac{\gamma + \log\left(\frac{m^2}{4\pi}\right)}{32\pi^2} \right) \right) \quad (6.31)$$

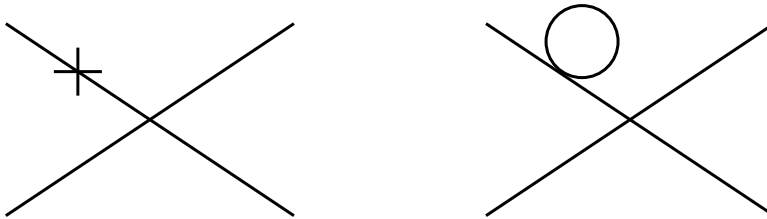
である。

ここで引き算のために採り入れた項を counter term と呼ぶ。今、発散部分だけを打ち消すように入れたが、これをどのように入れるかは物理的結果にはあまり関係がない。例えば有限部分まで含めて全て引き算してしまう、という計算もありえる。今ここでやったように、発散部分だけを引き算させるのを「最小引き算」(minimum subtraction) という。これに対し、物理的質量と m が一致するように有限部分まで含めて引く場合を「質量殻くりこみ」と呼ぶ。より一般的には $m^2 + (\text{引き算項})$ は有限であればどんな数でもいいので、これを理論のパラメータと見て、 λ^2 のように書く場合もある(これも一般化された質量殻くりこみである)。

ただし、引き算できるのは定数だけである。そうでないと質量という定数の置き換えという形に帰着できない。今の場合はもともと定数しか出ないのでこの点を気にする必要はなかった。

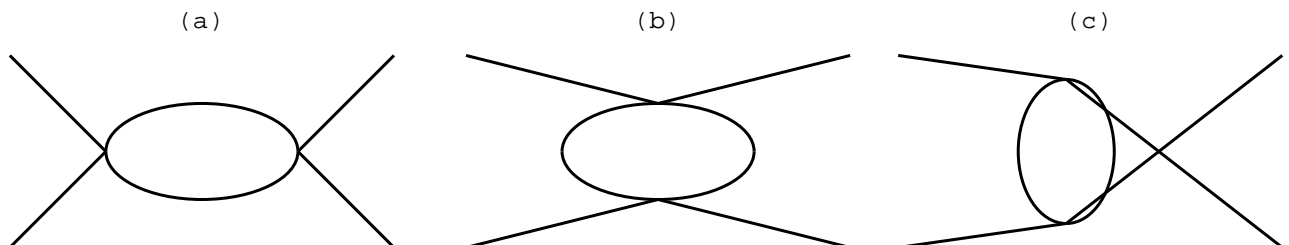
次に $\mathcal{O}(g^2)$ を考えてみる。

今度はまず4点関数から考える。 $\mathcal{O}(g^2)$ での4点関数は、まず



およびこれに \circ や \times をつける場所を他の足にしたものを考えなくては行けないが、この発散は相殺している(相殺するように $\mathcal{O}(g)$ の時点で操作済み)。この図のように、内線を1本切断することで簡単に二つの図に別れてしまうような図は、“1粒子既約でない”図と呼ぶ。1粒子既約でない図に現れる発散は、(切り離れた後の図は今考えているよりも g のオーダーが下がるので)その前の段階で処理できているはずである。よって以下では1粒子既約な図のみを考えていく。

1粒子規約な4点関数の発散は、



のような図になる。例えば (a) は

$$\frac{1}{2} (-ig)^2 \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{i}{(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2} \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \frac{i}{p_4^2 - m^2} \quad (6.32)$$

と表せる。外線の伝播関数を外したものを考えると、

$$\frac{1}{2} g^2 \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{1}{(P - q)^2 - m^2} \frac{1}{q^2 - m^2} \quad (6.33)$$

となる。ただしここで、 $P = p_1 + p_2$ と置いた。容易にわかるように、(b) では $P = p_1 + p_3$ と、(c) では $P = p_1 + p_4$ と置き直せばよい。

では実際にこの積分をやってみる。まず公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2} \quad (6.34)$$

を使って分母を一つにまとめる。すると

$$\frac{1}{2}g^2 \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{1}{[(P-q)^2 - m^2]x + (q^2 - m^2)(1-x)]^2} \quad (6.35)$$

となる。この分母を計算すると $q^2 - 2pqx + p^2x - m^2$ となるので、積分変数 q を $q \rightarrow q + px$ とずらす²。

$$\frac{1}{2}g^2 \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{1}{[q^2 + P^2x(1-x) - m^2]^2} \quad (6.36)$$

これは公式通りに計算できる。結果は、

$$\frac{1}{2}g^2 \frac{i}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [m^2 - p^2x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \quad (6.37)$$

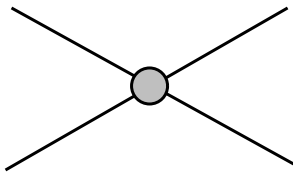
となる。この発散部分を取り出すと

$$\frac{1}{2}g^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} = g^2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (6.38)$$

となる。よって、作用に

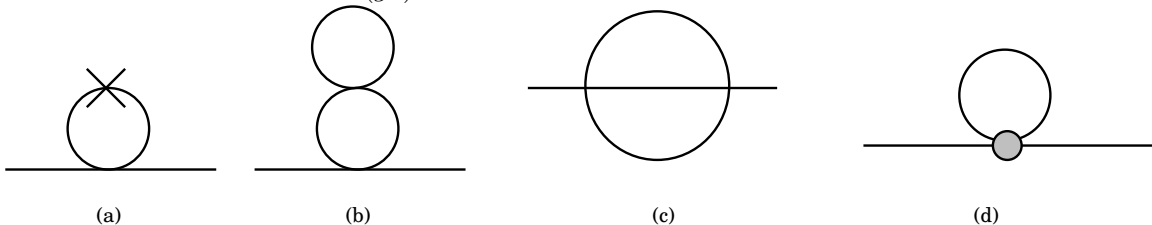
$$-\frac{g}{4!} \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \quad (6.39)$$

を付け加えることにより、この発散は除去できる(ここでは最小引き算の方法でやっている)。この付け加えた項を



のように図で表す。

次に2点関数を考える。 $\mathcal{O}(g^2)$ のみを考えると、



の4つの絵を考えればよい(1粒子既約でない図は考えない)。ここで(a)と(b)はちょうど発散が相殺するようになっている。

(d)に関しては積分の結果が結局定数となり、 $\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^2})$ になる counter term を付け加えることで消すことができそうである。

² こういうずらしが可能なのは積分が収束する場合だけである。発散積分では表面項が0でない。

最後に (c) を計算すると

$$\frac{-g^2}{3!} \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4q \int d^4r \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{i}{r^2 - m^2} \frac{i}{(p - q - r)^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (6.40)$$

となる。

この具体的計算は非常に面倒であるが、実際にやってみると

$$-\frac{g^2}{6(4\pi)^{4-\epsilon}} \Gamma(-1 + \epsilon) \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^{2-\epsilon}} \times \left[m^2 - \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1} p^2 \right]^{1-\epsilon} \quad (6.41)$$

となる。この発散部分を取ると、

$$-\frac{g^2}{6(4\pi)^4} \times \left(-\frac{2}{\epsilon} \right) \times \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2} \times \left[m^2 - \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1} p^2 \right] \quad (6.42)$$

となり、定数項と p^2 に比例する部分が出てくる。この p^2 に比例する発散を取り除くためには、ラグランジアン密度に

$$K \times \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (6.43)$$

のような項を付け加える必要がある。これは運動項 $\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ の係数 $\frac{1}{2}$ をずらす働きがある。

これをどのように解釈するかというと、場の演算子 ϕ の規格化のずれ、すなわち、 $\phi \rightarrow \sqrt{Z} \phi$ のように、 ϕ の規格化因子がずれた、と解釈する。

結局、ここまでの発散を打ち消すためには、

$$\mathcal{L}_{c.t.} = -\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (Z - 1) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{4!} \delta g \phi^4 \quad (6.44)$$

のように、作用に counter term を付け加えていけばよいことがわかった。これは結局もとの作用

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} g \phi^4 \quad (6.45)$$

を、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 + \delta m^2) \phi^2 - \frac{1}{4!} (g + \delta g) \phi^4 \quad (6.46)$$

のように書き直せ、と言っているのと同じである。 $\sqrt{Z} \phi$ を新しく Φ と置けば、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 + \delta m^2}{Z} \right) \Phi^2 - \frac{1}{4!} \left(\frac{g + \delta g}{Z^2} \right) \Phi^4 \quad (6.47)$$

と書いてもよい。

ここでは $\mathcal{O}(g^2)$ までの計算をしたが、ここまで発散は、 g, m, Z というパラメータの (無限大の) ずらしによって吸収することができた。このような方法で無限大を回避するのがくりこみである。

無限大を引いて無限大をなくして有限の結果を得るというのは数学的には許されない操作なので、くりこみという操作を嫌う人は多い。また、重力のようなくりこみ不可能な理論もあるので、くりこみを使わないで場の量子化を consistent に行おうという試みはいろいろとされている。たとえば supersymmetry は boson と fermion が常に対称に現れるような対称性であるが、

そのためにループ計算を行った時に両者の発散が相殺してくれ、supersymmetryがある理論ではくりこみがいらなくなる場合がある。新しい対称性を使って発散が出てこないようにしているわけである。string理論(素粒子を紐状のひろがりのあるものとする)でも対称性の高さのおかげで発散が落ちる。

また、重力の量子化を考えるならば、プランク長(10^{-33}cm)より短い距離(大きい運動量)は意味がないので、そこで自然なカットオフ(運動量積分の上限)が入るという考え方もある(この考え方では、カットオフによるregularizationは自然なものになる)。

くりこみという方法は、計算の為にテクニックとみられがちであるが、くりこみ群などの方法を使うと、この操作は物理的な相互作用への影響として考えることができ、単なる計算のテクニック以上のものを持っているという考え方もある。

6.3 具体例2 : Schwinger Model

6.3.1 作用と古典的対称性

くりこみ、すなわち量子効果が非常に重要となる例として、Schwinger Modelと呼ばれる模型がある。このモデルは2次元の量子電磁力学で、質量0のフェルミオンが電荷 e を持っているようなモデルである。

$$\int d^2x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \right] \quad (6.48)$$

のような作用から出発しよう。2次元の γ -行列は

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

と置こう。 γ_5 として、

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

を使う。この γ_5 は

$$\gamma^\mu\gamma_5 = \epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu \quad (6.51)$$

という性質を持っている。ただし、 $\epsilon_{\mu\nu}$ は $\epsilon_{01} = 1$ と定義した反対称テンソルである($\epsilon^0{}_1 = 1, \epsilon^1{}_0 = 1$)。

2次元なので、 $F_{\mu\nu}$ のnon-zero成分は一つしかなく、

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \quad (6.52)$$

のみである。

この作用は、もちろんゲージ変換

$$\psi \rightarrow e^{ie\theta}\psi \quad (6.53)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta \quad (6.54)$$

に対して不変であるが、同時にchiral変換

$$\psi \rightarrow e^{ie\theta_5\gamma_5}\psi \quad (6.55)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\nu\theta_5\epsilon^\nu{}_\mu \quad (6.56)$$

に対しても不変である。なぜならば、

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \partial_\mu (e^{ie\theta_5 \gamma_5} \psi) &= \gamma^\mu e^{ie\theta_5 \gamma_5} \partial_\mu \psi + \gamma^\mu ie \partial_\mu \theta_5 \gamma_5 e^{ie\theta_5 \gamma_5} \psi \\ &= \gamma^\mu e^{ie\theta_5 \gamma_5} \partial_\mu \psi + ie \partial_\mu \theta_5 \epsilon_\mu^\nu \gamma^\nu e^{ie\theta_5 \gamma_5} \psi\end{aligned}\quad (6.57)$$

となり、この第 2 項が A_μ の変換によるずれと相殺するからである。

この二つの不変性に対応して、二つのネーターカレント

$$j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (6.58)$$

$$j_{5\mu} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \epsilon_\mu^\nu j_\nu \quad (6.59)$$

$$(6.60)$$

が保存する。

6.3.2 量子化とカイラル・アノマリー

以下では Lorenz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ を取る。この場合、作用は

$$\int d^2x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \right] \quad (6.61)$$

となり、 A_1 に対しては Klein-Gordon 場と同じ形、 A_0 に対してはその逆符合の形となるので、ゲージ場の伝播関数は

$$T(A_\mu(x)A_\nu(y)) = -ig_{\mu\nu}K^{-1}(x,y) \quad (6.62)$$

と書ける。

フェルミオンの伝播関数は 4 次元同様に、

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = iS_F(x,y) \quad (6.63)$$

2 次元なので A^μ は 2 成分の量であるが、ゲージ変換が二つあるのだから、実は物理的自由度は全くない。そういう意味で Schwinger model は一種の toy model³ である。

2 次元では、ゲージ場 A^μ には次元がない。そのため、結合定数 e が長さ分の 1 の次元を持っていることになる。結合定数が負の次元を持っているので超くりこみ可能な理論である。実際発散するのは、ゲージ場の 2 点関数の 1-loop のみである。すなわち、

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int d^2q \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{i}{\not{q}} \gamma^\rho \frac{i}{\not{p}-\not{q}} \right) \frac{-ig_{\rho\lambda}}{p^2} \quad (6.64)$$

が 0 次の発散を出す。これより複雑になると e が入った分だけ次数が下がるので発散しない。まずトレース部分を計算すると、

$$\begin{aligned}\text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{i}{\not{q}} \gamma^\rho \frac{i}{\not{p}-\not{q}} \right) &= -\frac{\text{tr}(\gamma^\nu \not{q} \gamma^\rho (\not{p}-\not{q}))}{q^2(p-q)^2} \\ &= 2 \frac{q \cdot (p-q)g^{\rho\nu} - q^\nu(p-q)^\rho - q^\rho(p-q)^\nu}{q^2(p-q)^2}\end{aligned}\quad (6.65)$$

ただしここで、 $\text{tr}(\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta) = 2(g^{\rho\alpha}g^{\lambda\beta} - g^{\rho\lambda}g^{\alpha\beta} + g^{\rho\beta}g^{\lambda\alpha})$ を使った。さらにファインマンの式 (6.34) を使って分母をまとめて、 $q \rightarrow q + xp$ とずらしを行うと、trace 部分は

$$2 \int_0^1 dx \frac{(q+xp) \cdot ((1-x)p-q)g^{\rho\nu} - (q+xp)^\nu((1-x)p-q)^\rho - (q+xp)^\rho((1-x)p-q)^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} \quad (6.66)$$

³ 「おもちゃ」であって現実に即したモデルでないということ

この形まで持っていくと、 q の奇数次は奇関数なので積分から消える。結局求める積分は

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} \frac{2e^2}{(2\pi)^2} \int d^2q \int_0^1 dx \frac{(x(1-x)p^2 - q^2) g^{\rho\nu} - 2x(1-x)p^\rho p^\nu + 2q^\rho q^\nu - ig_{\rho\lambda}}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} \frac{-ig_{\rho\lambda}}{p^2} \quad (6.67)$$

の形になった。ここから、次元を D として次元法で評価する。積分の等方性から、

$$\int d^D q \frac{q^\rho q^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]} = \frac{1}{D} \int d^D q \frac{q^2 g^{\rho\nu}}{[q^2 + x(1-x)p^2]} \quad (6.68)$$

として、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{(x(1-x)p^2 - q^2) g^{\rho\nu} - 2x(1-x)p^\rho p^\nu + 2q^\rho q^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} \\ = & \int_0^1 dx \frac{\left(x(1-x)p^2 - \left(1 - \frac{2}{D}\right)q^2\right) g^{\rho\nu} - 2x(1-x)p^\rho p^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} \\ = & \int_0^1 dx \frac{\left(\left(2 - \frac{2}{D}\right)x(1-x)p^2 - \left(1 - \frac{2}{D}\right)(q^2 + x(1-x)p^2)\right) g^{\rho\nu} + 2x(1-x)p^\rho p^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} \\ = & \int_0^1 dx \frac{\left(2 - \frac{2}{D}\right)x(1-x)p^2 g^{\rho\nu} - 2x(1-x)p^\rho p^\nu}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} - \frac{\left(1 - \frac{2}{D}\right)g^{\rho\nu}}{q^2 + x(1-x)p^2} \end{aligned} \quad (6.69)$$

となる。 q 積分を実行すると、

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{1}{q^2 + x(1-x)p^2} = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \left(-p^2 x(1-x)\right)^{D/2-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (6.70)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \left(-p^2 x(1-x)\right)^{D/2-2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \quad (6.71)$$

となる。 $D=2$ では上の一つめの積分は発散しているが、その前に $1 - \frac{2}{D}$ が入っているので結局収束する。有限部分のみを計算して結果をまとめると、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{D}\right) \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{1}{q^2 + x(1-x)p^2} &= \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \left(-p^2 x(1-x)\right)^{D/2-1} \left(1 - \frac{2}{D}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &\rightarrow \frac{i}{4\pi} \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + x(1-x)p^2]^2} &= \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \left(-p^2 x(1-x)\right)^{D/2-2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\ &\rightarrow \frac{i}{4\pi} \left(-p^2 x(1-x)\right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.73)$$

この結果を入れて整理すると、

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} \frac{ie^2}{\pi} \left(g^{\rho\nu} - \frac{p^\rho p^\nu}{p^2}\right) \frac{-ig_{\rho\lambda}}{p^2} \quad (6.74)$$

という結果が出る。間に挟まっている $\frac{-ie^2}{\pi} \left(g^{\rho\nu} - \frac{p^\rho p^\nu}{p^2}\right)$ に注意する。ゲージ場 $A_\mu(p)$ を運動量表示で、 p_μ に比例する A_L と $\epsilon_{\mu\nu} p^\nu$ に比例する A_T に分けたとしよう (p^μ と $\epsilon_{\mu\nu} p^\nu$ は互いに直交するから、この分解は直交分解の形になる)。 A_L に対しては間にはさまった項は0になる。すなわち、くりこみの効果がきかない。 A_T に対しては、この項のうち $p^\rho p^\nu$ の部分が0になるから、 $\frac{ie^2}{\pi}$ の部分だけがきいてくる。 A_T に対して $g^{\mu\nu}$ が全て -1 になるとして考えると、(4.39)

で考えたような質量のずれが生じていることがわかる。 e の全オーダーを考えるならば 2 点関数は

$$\begin{aligned} \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \frac{-ie^2}{\pi} \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \frac{-ie^2}{\pi} \frac{i}{p^2} \frac{-ie^2}{\pi} \frac{i}{p^2} + \dots &= \frac{i}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^2}{\pi p^2} \right)^n \\ &= \frac{i}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{e^2}{\pi p^2}} \\ &= \frac{i}{p^2 - \frac{e^2}{\pi}} \end{aligned} \quad (6.75)$$

という形にまとまるので、 A_T はくりこみの結果質量 $\frac{e}{\sqrt{\pi}}$ を持つにいたったことになる。ゲージ場が質量を持つということはゲージ不変性が壊れていることを意味する。このように、古典論で存在していた対称性が量子論で破れてしまうことをアノマリー (anomaly) と呼ぶ。

この破れをより端的に表すのは、カイラル変換のネーターカレントが保存しなくなることである。通常ゲージ変換の保存カレントの期待値を計算する。今ゲージ場に関しては $A^\mu \rightarrow \langle A^\mu \rangle$ のように期待値に置き換えることができるものとすれば、1-loop レベルでの計算は 2 点関数の計算と同様になるので、

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-e}{\pi} \right) \int d^2k e^{-ikx} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \langle A^\nu(k) \rangle \quad (6.76)$$

のように書ける。これは ∂^μ をかけると 0 になる。

一方、カイラル対称性に対応するネーター・カレントは

$$\langle j_{5\rho}(x) \rangle = \epsilon_\rho^\mu \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-e}{\pi} \right) \int d^2k e^{-ikx} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \langle A^\nu(k) \rangle \quad (6.77)$$

であるから、 ∂^μ をかけても 0 にならず、

$$\langle \partial_\rho j_{5\rho}^\rho(x) \rangle = \epsilon^{\rho\mu} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-e}{\pi} \right) \int d^2k e^{-ikx} (-ik_\rho) \langle A_\mu(k) \rangle = -\frac{e}{\pi} \langle \epsilon^{\rho\mu} \partial_\rho A_\mu(k) \rangle \quad (6.78)$$

のようになる。

このようにアノマリーが現れる理由は、量子化の手続きの途中で常に対称性を尊重した計算を実行することができないからである。そもそも、古典論でゲージ不変性とカイラル・ゲージ不変性が両立するのは時空が 2 次元だったからである。次元法では次元をずらしてしまうため、ゲージ不変性は保っているがカイラル・ゲージ不変性を保ったまま計算することができない。では他の手法を使えばいいのでは、と思われるが、たとえば Pauli-Villars を使ったとすると、フェルミオンに質量を導入することになるので、やはりカイラル・ゲージ不変性を途中で壊してしまう。むりやりにカイラル・ゲージ不変性を保つような正則化を行うと、今度は普通のゲージ不変性の方が壊れてしまう。両方の不変性を満足させるような正則化方法はない。

よい正則化がないという事情から出現するため、アノマリーは物理的意味がない、と思われがちだが、実際には π 粒子の崩壊などでアノマリーの存在は物理的に観測できる。

6.4 経路積分によるアノマリーの計算

6.4.1 経路積分のメジャー

古典的対称性が量子論で破れる現象がアノマリーであるが、これは経路積分ではどのように現わされるだろうか。一般的な場 ϕ の経路積分 $\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x \mathcal{L}(\phi)}$ を考えて、これに $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ のような変換をしたとする。 $\int d^D x \mathcal{L}(\phi)$ がこの変換で不変だった (古典的対称性に対応する) とする。量子論で不変性が破れるとしたらその種は $\mathcal{D}\phi$ が $\mathcal{D}\phi \neq \mathcal{D}(\phi + \delta\phi)$ のように不変でないという可能性が考えられる。さっきの Schwinger モデルの場合で考えてみる。ただし、ここではユークリッド化した理論で考える。それゆえ、 $\gamma^0 \rightarrow i\gamma^2$ とおきかえ、 $\gamma_5 = i\gamma^2\gamma^1 = -i\gamma^1\gamma^2$ とする。

経路積分は

$$\int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\phi e^{i \int d^2 x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \right]} \delta(\partial_\rho A^\rho) \quad (6.79)$$

のようになる。このフェルミオンの積分メジャー $\mathcal{D}\psi$ の変換を見てみる。 ψ を、

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (6.80)$$

のように共変微分の固有値で分類した関数列 $\{\psi_n\}$ で展開するとする。 $\psi = \sum_n a_n \psi_n$ と展開されたとして、これをカイラル変換した $\psi' = (1 + ie\theta_5 \gamma_5)\psi$ は

$$\psi' = \sum_n a'_n \psi_n = \sum_n a_n \psi_n + ie\theta_5 \gamma_5 \sum_n a_n \psi_n \quad (6.81)$$

と展開されることになり、

$$a'_n = a_n + ie \sum_m \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 a_m \psi_m \quad (6.82)$$

と a_n と a'_n が関係づけられる。 $\bar{\psi}$ の方は同じように $\bar{\psi} = \sum_n \bar{a}_n \psi_n$ と展開したとすれば、

$$\bar{a}'_n = \bar{a}_n + ie \sum_m \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \bar{a}_m \psi_m \quad (6.83)$$

となる。ここで、もし γ_5 が入ってない変換 (通常の位相変換) ならば \bar{a} に対する式では第二項の係数は $-$ になる。つまり、今考えた展開の方法は位相変換に対する不変性を尊重したものになっていることに注意せよ。経路積分が $\prod_n da_n d\bar{a}_n$ という形で定義されていたとすると、

$$\prod_n da'_n d\bar{a}'_n = \det \left[\delta_{mn} + ie \int d^2 x \psi_n \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m \right]^{-2} \prod_n da_n d\bar{a}_n \quad (6.84)$$

という形にメジャーが変化する (位相変換ならば打ち消し合って変化はなくなる)。 $\det M = \exp \text{tr} \log M$ という式を使って、この行列式の部分を

$$\begin{aligned} & \det \left[\delta_{mn} + ie \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m \right]^{-2} \\ &= \exp \left[\sum_m \log \left[\delta_{mn} + ie \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m \right]^{-2} \right] \\ &= \exp \left[-2 \sum_m \log \left[\delta_{mn} + ie \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m \right] \right] \\ &= \exp \left[-2 \sum_m \left[ie \int d^2 x \theta_5 \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m \right] \right] \end{aligned} \quad (6.85)$$

と計算する。ここでこのまま計算すると単に無限大が出る。そこでここを λ_n の大きい部分をカットするような関数 $f((\lambda_n)^2/M^2)$ を入れる。 $f(x)$ は $f(0) = 1$ 、 $f(\infty) = 0$ および $x = 0, \infty$ において $f'(x) = 1$ を満たす関数である。計算終了後、 $M \rightarrow \infty$ をとる。

$$\exp \left[-2 \sum_m \left[i e \theta_5 \int d^2 x \psi_n^\dagger \gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2) \psi_m \right] \right] \quad (6.86)$$

今考えている固有関数の前では、 $\lambda_n \rightarrow i(\partial_\mu - i e A_\mu)$ と演算子に置き換えていい。ここでこの演算子をもう少し計算しておく、

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu(\partial_\mu - i e A_\mu) i\gamma^\nu(\partial_\nu - i e A_\nu) &= -\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} (\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial_\nu - i e A_\nu) - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial_\nu - i e A_\nu) \\ &= -(\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial^\mu - i e A^\mu) - \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [(\partial_\mu - i e A_\mu), (\partial_\nu - i e A_\nu)] \\ &= -(\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial^\mu - i e A^\mu) + \frac{i e}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \\ &= -(\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial^\mu - i e A^\mu) - \frac{e}{2} \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.87)$$

となる。最後の行では $\gamma_5 = -i\gamma^1\gamma^2$ から $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2i\epsilon^{\mu\nu}\gamma_5$ となることをつけた。ここまで計算した後で、固有関数展開を単なる平面波展開に直す。すると、

$$\begin{aligned} &\exp \left[-2 \sum_m \left[i e \theta_5 \int d^2 x \psi_n^\dagger \gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2) \psi_m \right] \right] \\ &= \exp \left[-2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \left[i e \theta_5 \int d^2 x e^{-i k x} \gamma_5 f \left(\left(-(\partial_\mu - i e A_\mu)(\partial^\mu - i e A^\mu) - \frac{e}{2} \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) / M^2 \right) e^{i k x} \right] \right] \\ &= \exp \left[-2 \frac{1}{(2\pi)^2} M^2 \int d^2 k \left[i e \theta_5 \int d^2 x e^{-i k x} \gamma_5 f \left(\left((M k_\mu - e A_\mu)(M k^\mu - e A^\mu) - \frac{e}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) / M^2 \right) e^{i k x} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.88)$$

第二行では $k \rightarrow M k$ とスケール変換して k を無次元量にした。この後トレースをとることを考えると、 $f(x)$ の中に含まれる γ_5 の奇数次しか残らない。ところが γ_5 の3次以上ということは M の-6次以下ということになり、あとで $M \rightarrow \infty$ ととることを考えるときかない。結局 $f(x)$ の項は $-\frac{e}{2} \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} / M^2 \times f'(k^\mu k_\mu)$ と置き換えてさしつかえない。以上より、

$$\begin{aligned} &\exp \left[-2 \frac{2}{(2\pi)^2} M^2 \int d^2 k \left[i e \theta_5 \int d^2 x e^{-i k x} \gamma_5 \left(-\frac{e}{2} \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} / M^2 \right) f'(k^\mu k_\mu) e^{i k x} \right] \right] \\ &= \exp \left[i \frac{2e^2}{(2\pi)^2} \left[\theta_5 \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \int d^2 k f'(k^\mu k_\mu) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.89)$$

と計算が続き (2成分のトレースで2が出ることに注意)、

$$\begin{aligned} \int d^2 k f'(k^\mu k_\mu) &= 2\pi \int_0^\infty dk k f'(k^2) \\ &= \pi \int_0^\infty dx f'(x) \\ &= \pi [f(x)]_0^\infty = -\pi \end{aligned} \quad (6.90)$$

となることを使えば最終結果は

$$\exp \left[-i \frac{e^2}{4\pi} \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \quad (6.91)$$

という形の答えが出る。これの意味するところは、変換をおこなった時、

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + i \bar{\phi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi \right]} \delta(\partial_\rho A^\rho) \\
\rightarrow & \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\phi' \mathcal{D}\bar{\psi}' e^{i \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + i (\bar{\phi} + ie \theta_5 \bar{\psi} \gamma_5) \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) (\psi + ie \theta_5 \gamma_5 \psi) \right]} \delta(\partial_\rho A^\rho) \\
= & \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-i \frac{e^2}{2\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} e^{i \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + i \bar{\phi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi + ie \partial_\mu \theta_5 \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi \right]} \delta(\partial_\rho A^\rho)
\end{aligned} \tag{6.92}$$

以上から $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi = j_5^\mu$ として、

$$\frac{-ie^2}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - ie \partial_\mu j_5^\mu = 0 \tag{6.93}$$

という保存則が出る。これは前に出した保存則 $\partial_\mu j_5^\mu = -\frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ と同じ結果である。

結論として、古典的対称性が量子論で破れる理由は、経路積分のメジャーの変換性に起因している。この時、 \det を計算する時にゲージ不変性の方を守るような正則化を行ったことが大事である。