相対論講義録2006年度

前野昌弘

平成18年8月10日

目 次

第1章　はじめに—なぜ相対論が必要なのか？

授業の始めに、この授業でどんなことをやるのか、どうしてそんなことを勉強しなくてはいけないのか、という点について、ざっと述べておく。

1.1　「相対論的」考え方

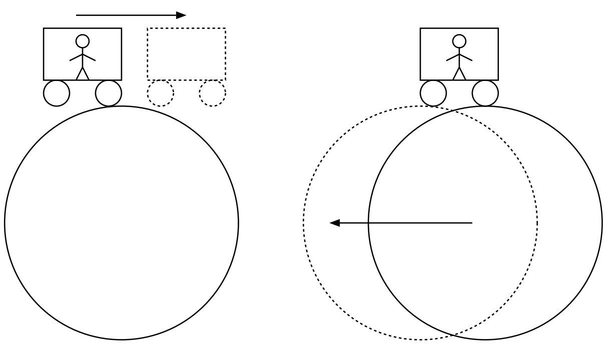
この授業の内容は名前の通り「相対論」である。相対論には特殊相対論と一般相対論があるが、ここで扱うのは特殊相対論の方である。「特殊」とつくから難しいと思ってはいけない。たいてい物理では「一般」とつくものの方が難しい。「一般」なものは解くのが難しいので、問題を「特殊」なものに限って解きやすくするのは、物理の常套手段である。相対論の場合も同様で、特殊相対論の方が圧倒的に簡単である。

「相対論」というのはどのような学問なのか。「相対」の反対は「絶対」である。相対論は「絶対」の否定として生まれた。この場合の絶対とは、ニュートンの言う「絶対空間」「絶対時間」の「絶対」である。ニュートンはニュートン力学を作るとき、宇宙には基準となる座標系が存在していると考えて、それを絶対空間と呼んだ。

ニュートンより少し前に、地球を中心とし、太陽がその回りを回っているという天動説から、太陽を中心とし、地球がその回りを回っているという地動説への変換（コペルニクス的転換と呼ばれる）があった。これは、当時の人が考えていた「絶対静止」の原点が地球から太陽へと移動したことに対応する。今では太陽は銀河系に属し、銀河系は回転しているし、さらに銀河系全体もグレート・アトラクターと呼ばれる大質量天体[1]に向かって落下している (らしい？) こともわかっている。もはや絶対静止の原点は太陽ではなく、銀河系ですらない。いやそれよりも、「絶対静止」などというものを考えてはいけない。むしろ、

世の中に「自分は絶対静止している」と主張できるものなどない

というのが相対論の主張である。



電車が動いているのか、宇宙全体が逆向きに動いているのか

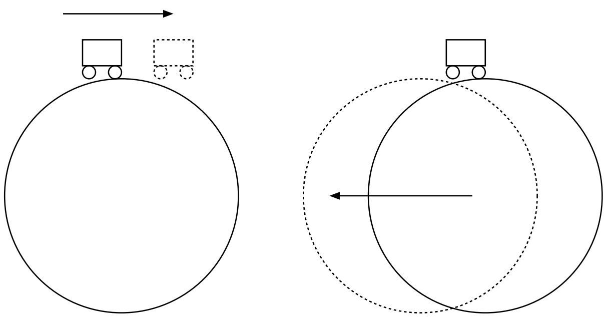
ここで、「宇宙で静止しているものは何かが判定できるか」という問題を考えてみよう。

話を簡単にするため、宇宙には地球とその表面の物体しかなく、地球は自転も公転もしていないとしよう。この孤独な地球の上にあなたが住んでいて、今電車に乗っているとする。電車が加速も減速もせず曲がりもせずにスムースに走っている時、電車の中であなたがする行動（本を読んだりあくびしたり、あるいはすいていればキャッチボールだって）は、家の中での行動と同じように、何の支障もなくできるはずだ[2]。この現

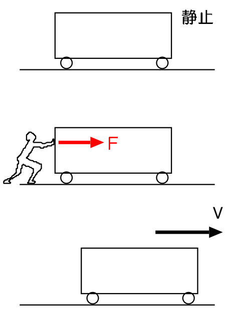
[1] グレートアトラクターは、約2億光年向こうにある正体不明の天体で、近くの天体はこの天体に向かって移動しているらしい。

[2] 電車が揺れている、などと言うなかれ。それは加速減速のうちだから、今はないとしている。

象を「宇宙が止まっていて、電車が等速運動している」と考えることもできるし、「電車が止まっていて、宇宙全体が逆向きに等速運動している」と考えることもできる。どちらで考えても、電車内で起こる物理現象は同じである。つまり、どっちが静止しているのか、判断する方法はないのである。



ここでもしかしたら、「**でも電車はモーターで動かしているが、だれも宇宙を動かしてないではないか**」と思う人もいるかもしれない。だがそう思った人は、絶対とか相対とか言う前に、ニュートン力学の理解が足りない。物体が動くのに、力はいらない。物体の運動を変化させる時（加速度がある時）に力が必要なのである。だから宇宙の全てが整然とある方向に等速運動している限り、誰も力を出す必要はない。整然とある方向に等速運動している宇宙の中で、宇宙と同じ速度で動いていた（ということはつまり「駅に停車していた」ということだ）電車が止まる（ということはつまり、「宇宙に対して動き出す」ということだ）ために力が必要なのである。もちろん現実の電車においてはまさつ力という「運動を妨げる力」が存在しているので、等速運動を続けるためにはモーターが力を出す必要がある。しかしこれは電車が止まっていて宇宙全体が動くという考えでも同様である。動き続ける宇宙からまさつを受けて動き出したりしないように、電車を止め続ける力をモーターが出しているのだ、と解釈できるのである。



左図の図のような運動（電車を人間が押したら動き出した）を地球静止説に立って解釈すれば、

静止している電車 (質量 m) を、人が F の力を出して Δt 秒間押した。電車の速度は V になったとすると、運動方程式は

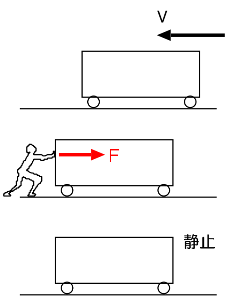
$$F = m\frac{V-0}{\Delta t} \tag{1.1}$$

となる。

となるだろう。

一方、同じ運動を、速さ V で右に動きながら観測したとしよう。すると、今度は最初電車が左に速さ V で走っていることになる。

この場合の解釈は、



地球も電車も、最初 $-V$ の速度で走っていた (マイナス符号は逆向きを表す)。人は力 F の力を Δt 秒出したので、電車は静止した。

$$F = m\frac{0-(-V)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

という式が成立している。

となるだろう。この二つの記述は結局は同じ式となり、等価である。だから、どちらを正しいかを判定することはできない。**どちらも正しい** のである。

どちらの記述でも同じになる理由は、運動方程式が「加速度」すなわち「単位時間あたりの速度の変化」で書かれていて、速度そのものには無関係だからである。また、もう一つ、ニュートンの運動の法則の第１法則（慣性の法則）も「**力を及ぼされていない物体は静止するか等速直線運動を続ける**」というものだから、「何が静止しているか」を判定することはできない。

この事実は、たいへんありがたいことでもある。力学の問題を解く時、いちいち「静止しているのは何なのか」を見定めなくてはいけないとしたらどうだろう？— 運動方程式をたてるたびに、地球の自転公転、太陽の固有運動、銀河系の回転、銀河系の運動を全部考慮に入れなくてはいけないなん

て、とてつもなくめんどうなことになるだろう[3]。そういうことを気にせずに「座標原点を床の上に置いて」などと適当な位置に原点を設定し、その原点がどんな運動をしていたかなどを気にしないで問題を解くことができるのは、運動方程式が加速度で書かれているおかげである。

逆にこのありがたい性質のおかげで「地球は太陽の周りを回っている」ということが直観的に納得しづらいものになっているのである[4]。天動説から地動説への転換の時、「太陽が動いているのではなく、地球が動いているのだ」ということが確立されるまでに長い時間がかかったことを考えてみれば、二物体が相対的に運動している時、ほんとうに運動しているのはどっちかを認識するのがいかに難しいかということがわかるだろう。なお、より厳密に言えば、「太陽・地球」系で動かないといっていいのは太陽でも地球でもなく、この二つの重心である[5]。ニュートンは太陽でも地球でもない、絶対静止の基準となる空間があるという仮定のもとにニュートン力学を作った。しかし実際には、ニュートン力学の成立のために絶対空間の仮定は必要ない。宇宙全体が平行に等速運動していたとしても、我々には力学的にそれを知る手段がないからである。より詳細な、数式を使った考察は次章からに回すが、とにかくここまででわかることは、力学においては「絶対空間」は存在していないらしい、ということである。

[問い 1-1] 小学生から、

> **「電車の中で垂直にジャンプすると、ジャンプしたその場所の床におりてくる。でも、電車はジャンプしてからおりるまでの間にも走っているんだから、着地する場所はジャンプした場所より後ろになるような気がする。どうしてそうならないの？」**

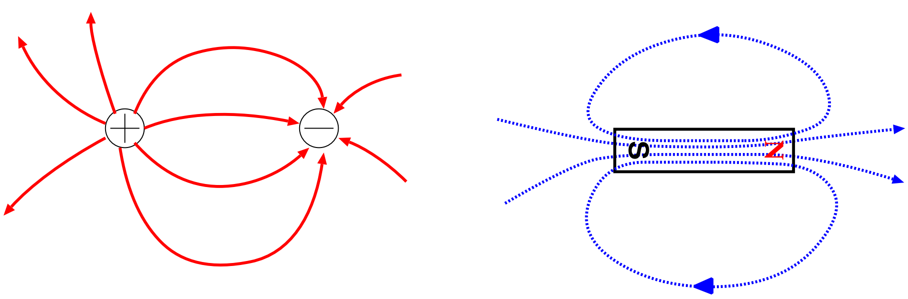
と質問されたら、あなたはどう答えるか？

1.2 電磁気学での「絶対空間」

19 世紀終わり頃、物理学者は力学に「絶対空間」がないことには気づいていたが、電磁気学では「絶対空間」があるのではないかと考えていた。光が電磁波と呼ばれる、電気と磁気の波であることはマックスウェルによって発見された。彼の名のついている４つの方程式

$$\mathrm{div}\vec{D}=\rho,\qquad \mathrm{div}\vec{B}=0,\quad \mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},\quad \mathrm{rot}\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{1.3}$$

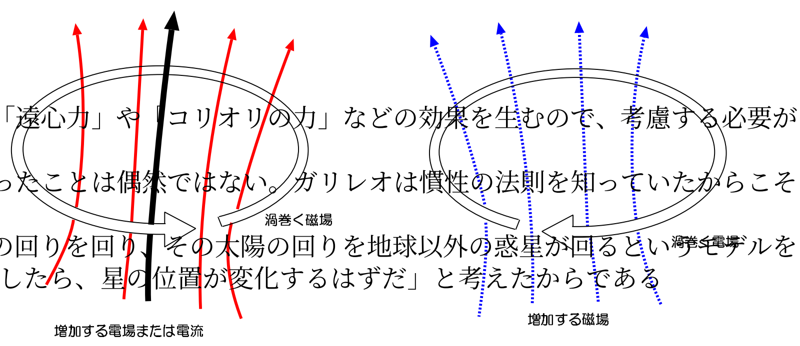
から電磁波の存在を導き出したのである。



細かい内容は別として、マックウェル方程式の意味するところを述べておこう。

$\boxed{\mathrm{div}\vec{D}=\rho}$:電荷 q クーロンがあるところからは q 本の電束が出るということ。$\vec{D}$ は電束密度すなわち単位体積あたりの電束。

$\boxed{\mathrm{div}\vec{B}=0}$:$\vec{B}$ は磁束密度。この法則は磁束は何物からも生まれないということ、つまり磁束



[3]厳密に考えると、自転公転などの回転運動は「遠心力」や「コリオリの力」などの効果を生むので、考慮する必要がある。

[4]慣性の法則を発見したガリレイが地動説をとったことは偶然ではない。ガリレオは慣性の法則を知っていたからこそ安心して地動説を取ることができたのである。

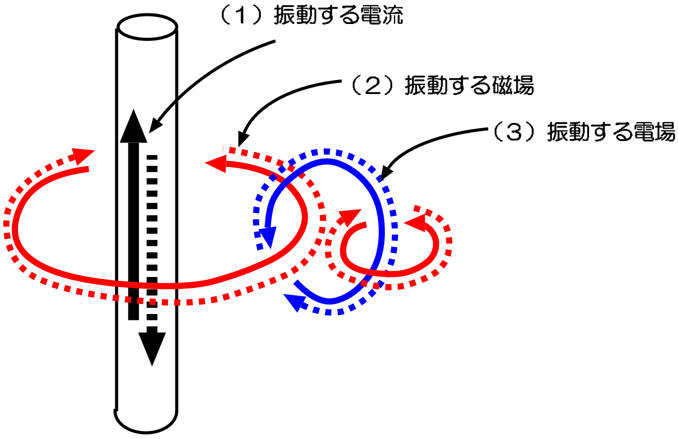
[5]ティコ・ブラーエは地球が静止して太陽がその回りを回り、その太陽の回りを地球以外の惑星が回るというモデルを唱えていたと言う。これは「地球が動いているとしたら、星の位置が変化するはずだ」と考えたからである。

は常にループをなしているということを示す。

$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}$：磁束密度が時間的に変化している時、その場所付近には磁束密度の増加している方向に対して左ねじの方向に電場が存在している。

$\boxed{\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}}$：電流がある時、および電束密度が時間的に変化している時、その場所付近には電流または電束密度の増加している方向に対して右ねじの方向に磁場が存在している。

この式で表される物理現象を組み合わせていくと、以下のようなしくみで電磁波が発生することがわかる。



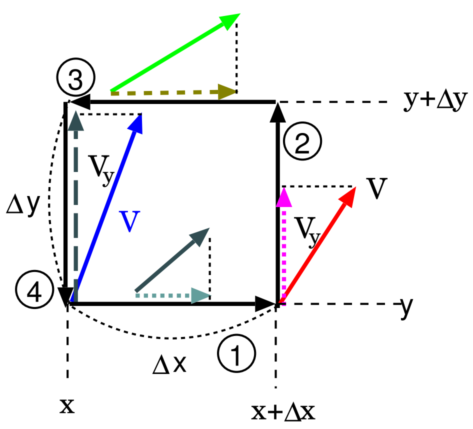
(1) ある場所に振動する電流または電束密度が発生する（たとえば電波のアンテナなら周期的に変動する電流を流している）。

(2)「電流」もしくは「電束密度の時間変化」は、周囲に渦をまくような磁場を伴う ($\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$)。

(3) 周囲の空間の磁場が時間変動には、さらにその周囲に渦をまくような電場を伴う ($\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$)。

以上がくりかえされることにより、空間の中を電場と磁場の振動が広がっていく。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。



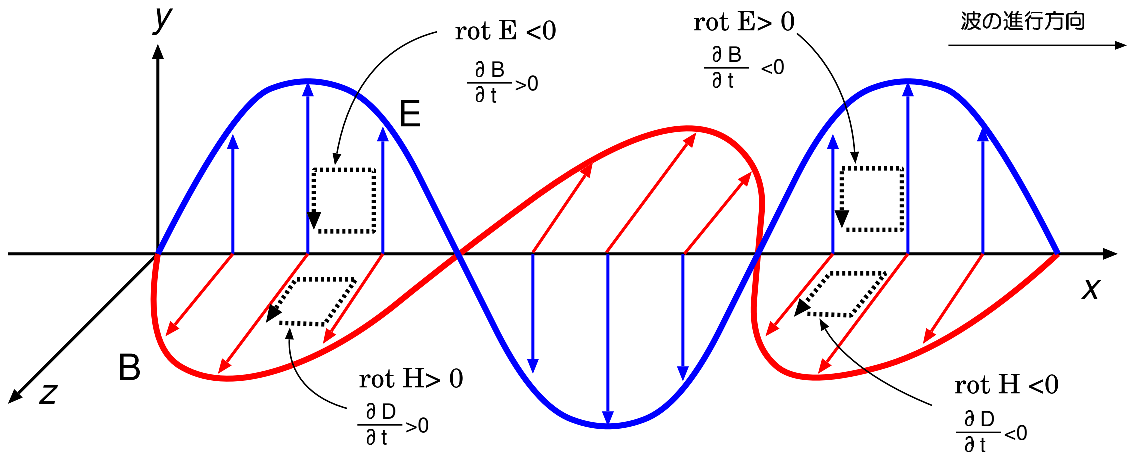
なお、図では rot がゼロでない状態の電場を、まるで渦を巻いているかのように書いたが、rot がゼロでないからと言って別に渦を巻く必要はない。もともと rot の定義は左の図のように、微小な四角形の辺の上を一周した時、ベクトル場が働く力だとしたらどれぐらい仕事をしてもらえるかを足し算したもの（最後に四角形の面積 $\Delta x \Delta y$ で割る）である。左の図の場合、

①x 方向に Δx 動くから仕事は $V_x(x,y)\Delta x$。
②y 方向に Δy 動くから仕事は $V_y(x+\Delta x, y)\Delta y$。
③x 方向に $-\Delta x$ 動くから仕事は $-V_x(x, y+\Delta y)\Delta x$。
④y 方向に $-\Delta y$ 動くから仕事は $-V_y(x,y)\Delta x$。

となって、この4つの和は

$$V_x(x,y)\Delta x + V_y(x+\Delta x, y)\Delta y - V_x(x, y+\Delta y)\Delta x - V_y(x,y)\Delta x \simeq \left(\partial_x V_y(x,y) - \partial_y V_x(x,y)\right)\Delta x \Delta y$$

である。定義がこのようなものだから、下の図のような平面波状態でも rot は存在する。ゆえに電場や磁場の時間微分も存在し、それによって波が進行する。



【補足終わり】

マックスウェルは彼の方程式を解くことにより、上で述べたような現象が起こって電場と磁場が波となって進行することを導いた。その波の速度も、マックスウェル方程式から求められ、真空中での電磁波の光の速度 c そのものであることがわかった。

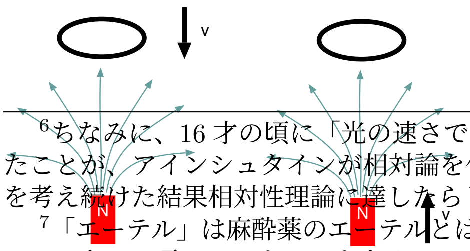
したがって、マックスウェル方程式が実験的に確認されていることは間接的に電磁波（光）の速度が c であることを保証することになる。ここで、この電磁気に関する物理法則（具体的にはマックスウェル方程式）には絶対空間があるのか？—という問題を考えてみよう。

音は、波であるという点では光と同じであるが、運動している人が見た場合と静止している人が見た場合で速度が違う。通常、音の媒質である空気が静止している時に観測される速度を「本当の音速」と考え、空気に対して動いている人の観測する音の速さは「みかけの音速」として扱う。空気に対して動いているというのは、空気が止まっていて人間が動いても（つまり電車に乗った人）、人間が止まっていて空気が動いても（つまり風の中に立つ人）同じである。どちらも、音速が速くなったり遅くなったりしているように感じるだろう。

さて、マックスウェル方程式に隠れている光速は、「本当の光速」なのだろうか？—そうだとすると、動きながら観測すると、それは「みかけの光速」へと変化するのだろうか？

もし、動きながら観測すると光速が変化するのだとすると、その「動きながら観測している人」にとっては、マックスウェル方程式は成立していないということになる（マックスウェル方程式は必然的に光速度 c を導くのだから！[6]）。

19 世紀の物理学者たちは、音（＝波）に対して空気（＝媒質）があるように、光（＝電磁波）にもその媒質があると考えていた。そしてそれを「エーテル[7]」と呼んでいた。では、光も「エーテルに対して動いている人」すなわち「エーテルの動きを感じる人」が観測すれば「みかけの光速」になるのではないかと考えるのは当然である。そこで、この「エーテルの風」を検出しようという試みが行われたのだが、その企てはことごとく失敗し、電磁気学にも「絶対空間」がない（あるいはあっても検出できない）ことがわかった。どのようにしてわかったのか、詳しい内容は後で解説する。とにかく、絶対空間は検出できなかった。



電磁波 (光) の速度以外にもう一つ、アインシュタインが疑問としたのは電磁誘導という現象をどのように解釈するかである。アインシュタインの考察した現象とは少し違うが、以下のような現

[6] ちなみに、16 才の頃に「光の速さで動いたら、電磁波は波の形が静止しているように見えるのか？」と疑問に思ったことが、アインシュタインが相対論を作るそもそものきっかけだったという話がある。アインシュタインはこの疑問を考え続けた結果相対性理論に達したらしい。

[7]「エーテル」は麻酔薬のエーテルとは同じ名前だが何の関係もない。アリストレテスが天を満たしている元素がエーテルであると言っていたのにちなんでいる。ちなみに綴りは Ether または Aether で、英語読みだと「イーサ」。ネットワークのイーサネットの「イーサ」はエーテルが語源である。

象を考えよう。磁石にコイルを近づける（左図)、あるいはコイルに磁石を近づける（右図)、このどちらを行ってもコイルには電流が流れる。この二つの現象は、「相対的に」考えるならば、全く同じものである。というのは、左図の状態を、コイルと同じ速さで同じ方向に動いている人がみれば、まさに右図の状態が見えるはずだからである。しかし電流の発生する原因の解釈は同じではない。

右図の場合、コイルに電流が流れる理由は、「**磁束密度の変化によって渦を巻くような誘導電場が発生したから**」($\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$) である。一方、左図の場合、電流が流れる理由は「**磁場中を電子が下向きに動いたので、ローレンツ力によって電子が動かされたから**」である。この時、ある場所の磁束密度 $\vec{B}$ は変化しないから、$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$ である。つまり電場の発生はない[8]。

くわしい計算は後でもう一度実行するが、どちらの立場で計算しても流れる電流は同じになる。このように、同じ現象のように見えるのに、違う筋道の説明が２種類ある。そしてどちらも、マックスウェル方程式を使った計算で正しい答が出る。となれば、「どんな立場でもマックスウェル方程式は成立する」と考えたいところである。

1.3　相対論の必要性

ニュートン力学の話で述べたように、絶対空間がないということは「自分がどんな運動をしながら物理を考えているのか」に無関係に問題を解くことができるということであった。もしエーテルが存在し、エーテルが止まって見える人に対してのみマックスウェル方程式が成り立つのだとすると、我々はまず「今我々はエーテルの静止系にいるのか否か」を判断しなくては、電磁気の実験を安心して行えないことになる。

ところが実験の示すところによれば、安心してマックスウェル方程式をつかってかまわないし、光速度についてもどういう立場で測定しても同じである。ここで注意しておくが、大事なのは、「どんな立場でもマックスウェル方程式が成り立つ」ということである。「どんな立場でも光速度が一定」ということはその大事なことの一部に過ぎない。

相対論の目指すことは、「どんな立場で見ても物理法則は同じである」ということである。動いている場合と止まっている場合は区別できず、「動いている時のための物理法則」を別に用意する必要はない。ここでみたように、相対論以前の知識で考えると、力学の法則はそうなっているが、電磁気の法則はそうなっていないように見える。

そこで、「**力学的に見ても電磁気的に見ても、絶対空間が存在しないような理論はどんなものか？**」という問いが生まれる。理論的にも実験的にも電磁気学に絶対空間が存在しない（少なくとも、感知できない）ことがわかっている以上、電磁気学から絶対空間を消すことが必要なのである。そういう意味で、電磁気学は相対論なしには不完全なのであって、上の疑問はなんとかして解決されねばならない。その矛盾を解消するための新しい考え方が相対論である。アインシュタインによる特殊相対性理論の最初の論文のタイトルは「運動する物体の電気力学について」(Zur Elektrodynaik bewegter Körper) という、どちらかというと地味なものであるが、それはこのような電磁気に関する疑問から話が始まっているからである。

具体的にどのように相対論がこの疑問に答えたのかはこの講義の中で明らかにしていく。とりあえずここまででわかるように、その理論は動きながら見ると磁場が電場に見えたり、その逆が起こったりと電場と磁場をまじりあわせるような、そういう理論になる。しかし最終的結果はそれだけにと

[8]左図の場合でも、「コイルを通る磁束」が増加したから起電力が発生した、と考えて問題を解く場合があるが、それは右図と同じ結果が出ることを知っているからできることであって、電場が発生しているのではない。

どまらない。電磁気学から絶対空間がなくなるように理論を修正すると、結果として力学も修正されてしまう。それどころか、物体の長さを測る尺度というものが観測している人の状態によって変化しなくてはいけないことがわかる。具体的には「運動しながら見ると（あるいは物体が運動すると）物体が縮む」のである。さらに、相対性理論は「絶対空間」のみならず「絶対時間」も否定することになる。立場が違えば時間すら、同じものではないことがわかったのである。「運動していると時間が遅くなる」という結果も出るし、「ある人にとって同時に起こったことが、別の人にとっては同時ではない」ということも起こる。

具体的にどのようにしてこのような（一見）不思議な結果が出てきたのかは後で詳しく述べる。ここまでの話を聞くと、ずいぶんおかしな、突拍子もないことをやっているように思えるのではないかと思う。しかし実際には、相対論ができあがる過程は非常に確実なものであり、一歩一歩理解していけば難しいところも論理の飛躍もない。ちゃんと講義を最後まで聞いていけば、あなた方も16才のアインシュタインの疑問に答えることができるはずである。今回だけ聞いて「わからない〜」と根をあげないように。

第2章　座標変換と運動方程式

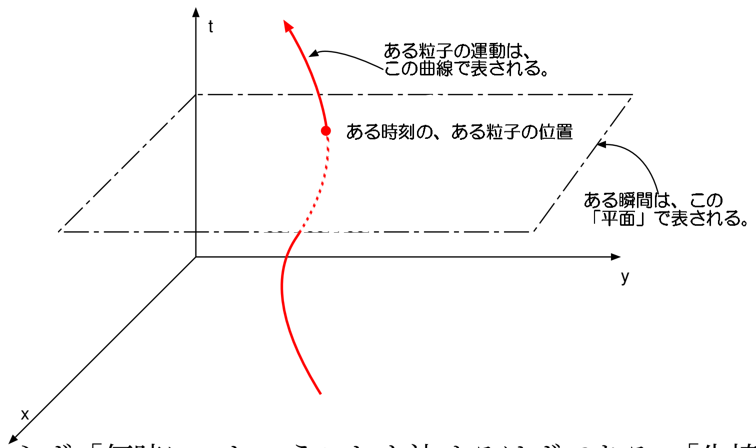
第１章の前半では、力学の法則が相対的であること、つまり絶対空間が存在しない（少なくとも、感知できない）ということを説明した。この章では、そのことを数式を使って考えていく。そのために、座標系の変換ということについて勉強する。

物理を記述するにあたって、座標系は大事である。というより座標系を置かないと何も始まらない。相対性、すなわち「見る立場が違っても物理法則は変わらない」ということは数学的言葉を使えば「座標系を変換しても物理法則は変わらない」と表現できる。よって相対論を理解するには、座標系を変換する（ある座標系から別の座標系に移る）ということの意味を理解することが必要である。この章では相対論以前のニュートン力学の範疇において、座標変換と力学の法則の関係を整理しておくことにする。

2.1　座標系と次元

座標系というのは、物体の位置を指定するための道具である。たとえば将棋盤の駒を「７六歩」などと表現するが、これは左から７番目、下から６番目のますに歩を進めるという意味で、「7」と「六」という二つの数字で場所を指定している。力学の問題のほとんどは「ある物体がどこにいるかを予言する」ということなので、まずは「どこにいるか」を数学的に表現する方法が必要なのである。

将棋盤の例なら二個の数字を使って場所を表したが、物理の一般の問題ではもっと多くの数字を使って物体の位置を表現することが必要になる。物体の位置を指定するのにどれだけの数を指定しなくてはいけないかを「次元」という。将棋の駒ならば二つの数字でOKなので、２次元である。一般に空間の中にいる物体の位置を指定するには３つの数字が必要であり、これを「３次元の空間」のように表す。



相対論では、４次元、すなわち４つの座標を使って運動を記述するということが大事になる。「次元」という言葉はずいぶんいろんな意味に使われていて[1]、一般社会においては「４次元」という言葉は特に謎めいたイメージを持たされている。しかしここで言う「次元」というのは「いくつの数を指定すれば系の状態が決まるか」という意味であって、それが「４」であるということは、別に不思議なことではない。例えば待ち合わせをする時、「じゃあ、生協食堂前で会おう」では待ち合わせはできない。かならず「何時に」ということも決めるはずである。「生協食堂前」を指定するのに数字を使うとしたら、３つの数字が必要である[2]。これに時刻を足して４つ

[1]「その式、左辺と右辺で次元が違うじゃないか」「３次元空間で考えましょう」「そんな次元の低い話はしてないんだよ！」全部、意味が違うのに「次元」という同じ言葉が使われている。

[2] 例えば、「北緯何度、東経何度、標高何メートル」。あるいは「ここから東に何メートル、南に何メートル、下に何メートル」。

の数字を指定して始めて待ち合わせが成立する。つまりこの場合必要な数字は4つ。これを「4次元」と言う[3]。

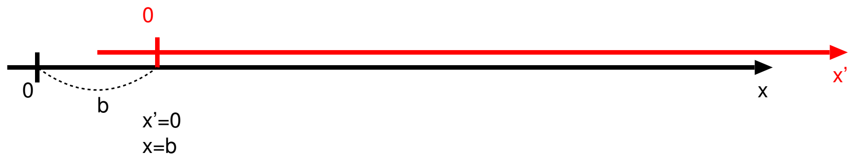
物体の位置だけを問うのなら、3次元でいい。ニュートン力学の世界では、3次元空間と1次元の時間は完全に切り放されて、別個に存在している。相対論的世界では、空間と時間の間に少し関係が生じてくる。そのため、相対論の話をする時には4次元的記述が好まれる（と、今言ってもわからないだろうけどれど、授業が進むにつれてわかってくるはずである）。

以上のように、4次元と言っても別に怖いものでもなんでもなく、物体の位置と時間を指定するには4つの座標が必要だ、と言っているだけのことである。我々の住んでいるこの宇宙は3次元空間＋1次元の時間で、「4次元時空」と呼ばれる。時間だけは多少違うので、「3＋1次元時空」という呼び方をする人もいる[4]。だから、「4次元」と言われただけで不必要に「難しい話が始まる」と緊張する必要はない[5]。

座標の取り方はいろいろあるが、ここでは一番簡単な直交座標、すなわち互いに垂直な空間軸 x, y, z をとることにしよう。これに時間 t をあわせて、座標は4つ (x, y, z, t) である。ある一つの物体の運動は、この「4次元時空」の中の線で表されることになる。図の「ある時刻のある粒子の位置」を表すには4つの数字が必要だということである（図では z 座標を省略している）。なお、「ある時刻の宇宙」はこの4次元時空のうち、$t =$（ある一定値）に限った部分ということになる。ほんとは3次元分の広がりがあるが、図では z 軸が書かれていない分、2次元の面のように描かれている。この面を「面のようだが3次元分ある」ということで「超平面」（hyper surface）と呼ぶ。

2.2 1次元空間の座標変換

簡単のため、まず空間座標は x だけ考えて、y, z は無視して考えることにする。つまり1次元空間、時間を合わせて2次元（1＋1次元）時空である。1次元での空間座標は x 一つで、どこかに原点を選び、あとは軸の向き（1次元なので左か右か二つに一つ）を選べば、原点から軸の正の方向に何メートル行った場所か、ということで位置を指定できる（ここでは「メートル」と書いたが、もちろん「フィート」でも「尺」でも「オングストローム」でも「光年」でも支障はない）。



まず簡単な座標変換として、原点の移動を考えよう。新しい座標系 x' 系の原点が古い座標系 x 系で表して $x = b$ という場所にあるとする。座標系の向きと目盛りの幅は同じであるとすると、この二つの座標系は $x' = x - b$ という関係で結び付いていることになる。この場合、二つの座標原点は互いに運動していない。x' 座標系の原点は x 座標系の原点よりも右（つまり、正の方向）にあるのだが、式の上では $x' = x - b$ と引き算される形になっている。勘違いして $x' = x + b$ とやってしまうことが多いので注意しよう。「$x' = 0$ が $x = b$ に対応する」ということに注目して、そうなるように式を作るならば $x' = x - b$ でなくてはいけないことが納得できるだろう。

---

[3]「空中に浮いて待ったり、地面に潜って待つことなどありえないのだから高さや標高は省略してよい」と考えると次元は一つ減って3次元になる。ただしこの場合1階と2階で互いに待ちぼうけを食わされる可能性がある。

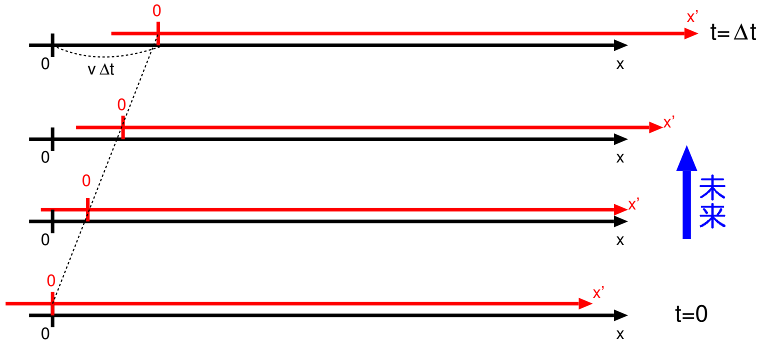
[4]この話をすると必ず「ドラえもんの4次元ポケットはどうなっているのですか」という質問が出る。そんなことは藤子不二雄先生に聞いてほしい。おそらく、「4次元ポケット」の4次元は、空間だけで4次元なのだろうとは思うが。

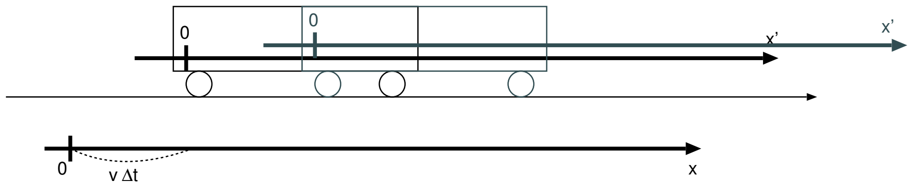
[5]たまにいるのだ、「4次元ってのはものすごいことなんだ」と思い込んでいる人が。そういう人はむしろ、この話をきいてがっかりすることになる。

次に座標の原点自体が刻一刻と等速度 v で移動している場合を考える。この場合、$b = vt$ と考えて、

$$x' = x - vt \tag{2.1}$$

という変換則に従っている。この座標系 x' は、いわば速度 v で走る電車の内部の座標系である。電車内でみると静止している $x' = 0$ という点は、外からみると、$x = vt$ で表される。つまり、等速運動して移動している点に見える。





ここであげた式では $t = 0$ で x と x' の原点が一致しているとしたが、もちろん一般には一致する必要はなく、$x' = x - vt - b$ でよい。この形でも x' 座標系の原点が x 系でみると等速運動しているという点は同じである。

この時、x 系と x' 系で、時間は変化しないと考えられるので、

$$t' = t \tag{2.2}$$

である。あたりまえのことのようであるが、これは重要な（後で変更をせまられることになる）式である。このような互いから見て、相手の座標原点が等速で運動しているような座標系の間の座標変換をガリレイ変換と呼ぶ。

2.3 速度、加速度のガリレイ変換と運動方程式の不変性

さて、「電車内でも外部でも同じ物理法則が成立する」ということを、今考えたガリレイ変換と力学の法則を使って確かめよう。

ニュートンの運動方程式は（1次元であれば）$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F$ と書ける。右の囲みに書いたように、加速度はガリレイ変換で変化しないので、運動方程式の形は x 系でも x' 系でも変化しない。つまり、互いに等速運動している二つの観測者は、どちらも同じ運動方程式を使って運動を記述できることになる。運動方程式に加速度という「速度の変化」だけがあらわれていることから、当然の結果である。

二つの座標系で、同じ運動を記述してみる。x 系と x' 系は原点が一致しているものとする（上の $b = 0$）。今 x 系で時刻 $t = 0$ に原点に静止していた質量 m の物体に、力 F を Δt の間加え続けたとする。x 系および x' 系で成立する運動方程式は

$$F = m\frac{d^2x'(t)}{dt^2} \quad \text{または} \quad F = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{2.4}$$

ガリレイ変換の一般式 $x' = x - vt - b$ という変換式を微分していくと、

$$
\begin{gathered}
x' = x - vt - b \\
\downarrow \\
\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \\
\downarrow \\
\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

となり、加速度はどちらの座標系でも同じ。

と書ける。これを t で２回積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{F}{m}\\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{F}{m}t + C_1\\ x(t) &= \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C_1 t + C_2\end{aligned} \tag{2.5}$$

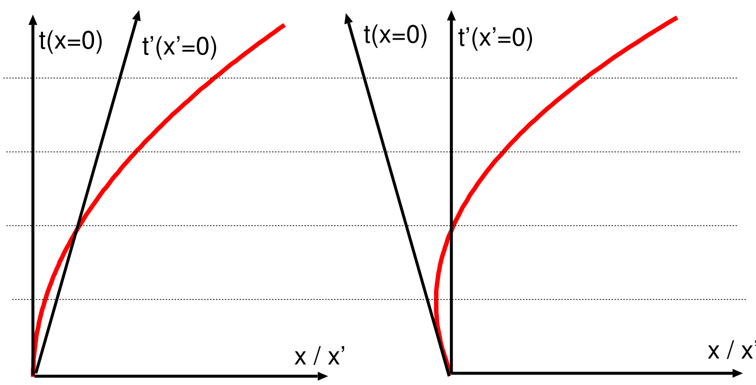
となる (C_1, C_2 は積分定数)。

x 系で考えるならば、$x(t)$ の初期値（平たくいえば $x(0)$）は 0、初速度（$\dfrac{dx(0)}{dt}$）も 0 であるから、C_1, C_2 はともに零となる。

x' 系での運動を考えるには、二つの方法がある。今求めた解をガリレイ変換するという方法と、x' 系での初期値を用いて C_1, C_2 の計算をやり直す方法である。ガリレイ変換ならば、

$$x'(t) = x(t) - vt = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 - vt \tag{2.6}$$

と公式どおりに求まる。x' 系での初期値を考えるならば、x 系で静止している、ということは x' 系でみると v の速さでバックしているということになるので、$x'(0) = 0, \dfrac{dx'(0)}{dt} = -v$ となって、$C_1 = -v, C_2 = 0$ となる。結果は、上の式と同じである。



二つの結果を、x 系と x' 系でグラフにしてみたものが左の二つの図である。x 系で見ると「静止した状態の物体が速度を少しずつ増しながら離れていった」と見える運動であるが、x' 系でみると、「最初左へ走っていた物体がだんだん遅くなり、やがて止まって今度は右向きに走りだし、自分の前を通りすぎてどんどん右へと速度を増しながら離れていった」ということになる。等速運動している自転車を、後から発車した自動車があっという間に追い抜いていった、という状況である。

上のグラフで、$t = t'$ なのに t 軸と t' 軸が同じ軸でないことをおかしく思う人もいるかもしれないが、t 軸というのは $x = 0$ で表される線であり、t' 軸というのは $x' = 0$ で表される線であることに注意せよ。つまり t 軸と t' 軸が同じ方向を向かないのは x と x' にずれがあるからなのである。この二つのグラフは、グラフを水平方向 (x 方向) に、高さ (t 座標) に比例した距離だけ横にずらしていくことによって互いに移り変わる。つまり、３＋１次元空間のうち、３の部分（空間あるいは超平面）を時間に応じて動かしていくという変換を行っていることになる。

[問い 2-1] x' 座標系で見て速度 V' で動いている物体に関しては $x' = V't' + b$(b は定数) が成立する。これとガリレイ変換を使って、x 座標系でこの物体がどのような速度を持つかを計算せよ。

前の章で強調した、「絶対静止しているかどうかは判定できない」というのは、今示したように、互いにガリレイ変換で移ることができる座標系であれば、どこでも同じ法則が成り立っているからである。物理法則（この場合ニュートンの運動方程式）にあらわれるのは加速度であり、上のグラフでいえば、物体の運動を表す線の傾きがどの程度変化しているか、つまりは線の曲がり具合いである。ガリレイ変換は線の傾き（つまりは速度）を一定値だけ変えるが、その時間的変化量（曲がり具合い）を変えない。そのため、物理法則は変わらない。

今あなたが電車外にいて、「静止しているのは私である」という仮定のもとに運動方程式を解いて、ある物体の運動を求めたとする。しかし電車内にいる誰か別の人が「静止しているのは俺の方だ」と言って同様のことを行ったとしても、結果は同じになる。ではあなたとこの人の、どっちが正しいのか。もちろん、判定不可能である。

ガリレイ変換の物理的意味は、一つの物理現象を見る時、観測者が運動しながら見るとどう見え方が変るか、ということにある。ガリレオ・ガリレイの時代と言えば、天動説から地動説への変換の真っ最中であった。つまり、「地球が静止していると考えて天体の運動を考える」立場と「太陽が静止していると考えて天体の運動を考える」立場のどちらが正しいのかが論争の焦点となっていた。ガリレイ変換は等速直線運動どうしの変換であるから太陽と地球（円運動している）には直接当てはまらないが、地球の運動方向の変化が十分小さくなるほど短い時間で近似して考えれば「地球が静止している」座標系と「地球が運動している」座標系の変換はガリレイ変換で表せる。

2.4 「慣性系」の定義

以上でわかるように、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換によって不変である。しかし例えば座標系原点を等加速度運動させたりすると、もはや新しい座標系では運動方程式が成立しなくなる。

そこで、ニュートンの運動方程式が成立する座標系を特別に「慣性系」と呼ぶ。ニュートンの運動方程式は上の座標変換で不変である。つまり、上の座標変換は、慣性系を別の慣性系に移すような座標変換である、ということが言える。

たとえば地球表面に固定した座標系は厳密には慣性系ではない。地球の回転によって、コリオリ力および遠心力というみかけの力が働く。また、慣性系 x に対して加速度運動しているような座標系

$$x' = x - \frac{1}{2}at^2 \tag{2.7}$$

を導入したとすると、この x' 系での運動方程式は

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2} + a\right) = F \tag{2.8}$$

あるいは

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F - ma \tag{2.9}$$

となってしまう。つまり x' 系は慣性系ではなく、運動方程式の力の部分に余分な項 $-ma$ がつく。この項は「慣性力」と呼ばれる。加速している物体（発進する車など）の上の観測者が加速と逆向きに力が働いているように感じるのが、この慣性力のもっとも単純な例である。このような加速度のある座標系は特殊相対論ではあまり扱われないが、一般相対論では非常に重要になる。

[**問い 2-2**] 今、遊園地にあるフリーフォールの中での運動を考える。外から見ると、物体には重力が働くので、運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{2.10}$$

である（y は上向きを正としてとった鉛直方向の座標）。フリーフォールも加速度 g で自由落下運動しているとして、フリーフォールが静止しているような座標系を設定し、その座標系で立てた運動方程式には重力の影響がないことを示せ。

とりあえず慣性系でない座標系のことは横に置いておくとして、

ガリレイ変換によって移り変わるどの慣性系においても、同じ運動の法則が成立する。

という原理を「**ガリレイの相対性原理**」と呼ぶ。この法則の「運動の法則」の部分を電磁気学を含めた「物理法則」に書き換えたいというのが相対論の目標である。後で詳しく述べるが、その目標達成のために「ガリレイ変換」の部分も「ローレンツ変換」に書き換えられることになる。

> **ローレンツ変換によって移り変わるどの慣性系においても、同じ物理法則が成立する。**

というのが「**特殊相対性原理**」である[6]。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

2.5　絶対空間に対するマッハの批判

ニュートンはニュートン力学を構築する時、「絶対空間」すなわち物体が静止していることの基準となる空間を仮定した。つまり、「静止している」ということが定義できるとしたのである。マッハはこれを批判し、「物体が静止しているかどうかを判定することはできない」と主張した。実際ニュートンの運動方程式はガリレイ変換で不変なのだから（動きながら見ても物理法則は変らないのだから）運動を見ているだけではその物体が静止しているかどうかを判定することはできない。観測者自身すら、止まっているのかどうかが判定できないからである。

この「動いているかどうか判定できない」というのは等速直線運動の場合に限る。たとえば観測者が回転運動をしていれば、遠心力を感じるので、遠心力があるか否かを実験することで「自分は回転しているのか」を判定することができる（数式上で言えば、先の計算のθが時間の関数であれば、運動方程式は不変ではない）。つまり、「静止系か否か」は実験で判断できないが「慣性系か否か」は判断できる、ということになる。

しかしマッハはこの考え方も批判していて「自分が静止していて宇宙全体が回転していたとしても遠心力が働くかもしれない」と述べている。たとえばバケツをぐるぐる回すと中の水面の中央がくぼむ。これは「バケツの回転による遠心力で水が外へ追いやられるから」と説明されるのが普通である。そして「バケツが回転している」と判断できることは絶対空間がある証拠であると考えられていた（これを「ニュートンのバケツ」と呼ぶ）。しかし、バケツが静止していて宇宙全体が回転していたとしても同じことが起こるかもしれない、「そんなことは起こらない」という根拠はどこにもないとマッハは言うのである。今のところ（？）、誰も宇宙全体を回転させるような実験はできないので、この真偽はもちろんわからない。マッハは「各々の物体がどのように運動するかは、まわりにある物体全体との相互作用によって決まるべきだ」という思想（マッハ原理と呼ばれる。アインシュタインもこの原理の信奉者だった）を持っていたので、安易に絶対空間を導入することに批判的だったのである。

マッハの批判から学ぶべきことは「**観測されていないことを固定観念で「決まっている」と思い込んではいけない**」ということである[7]。ニュートンは実際には観測することができない「絶対空間」をあると仮定してニュートン力学を作った（実際にはこの仮定は必要ではない）。「絶対空間」が存在することは人間の感覚にはなんとなく、合う。だが、感覚を信用することは危険である。「物体に働く力は、物体の速度に比例する」という、人間の感覚に合うアリストテレスの理論が長い間信じられてきた（が間違っている）ということを思い出さなくてはいけない。

【補足終わり】

2.6　２次元の直線座標の間の変換

一つ次元をあげて、２次元空間の場合で考えてみる。２次元、３次元の場合の座標変換の考え方は、いずれ４次元時空での座標変換を考える時のガイドラインになるからである。

[6] さらに「一般座標変換によって移り変わるすべての座標系のおいてすべての物理法則が成立する」となると「一般相対性原理」。これを実現するのが一般相対論。

[7] このあたりの「心」は量子力学にもつながるかもしれない。ただし、マッハ自身は量子力学どころか、分子論に対しても批判的であった。つまりは全てを疑ってかかる人だったのだろう。

二つの空間座標を x, y とすると、x, y に対して別々の平行移動を行う座標変換

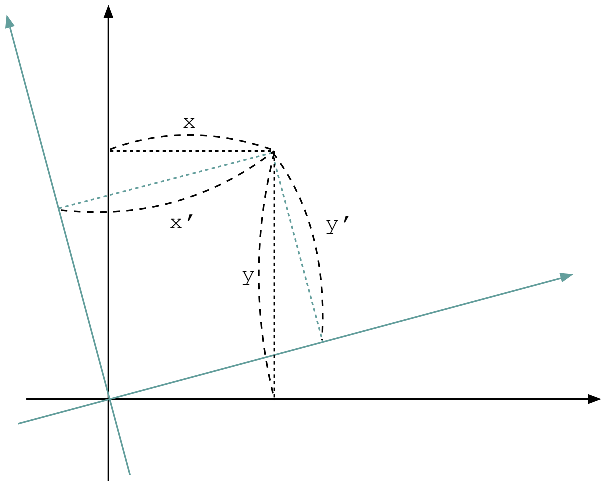
$$x' = x - a, \quad y' = y - b$$

であるとか、それぞれ別の速度でガリレイ変換する座標変換

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t$$

などがある。

しかしここまでは１次元の話を重ねているだけで面白味がない。２次元ならではの座標変換は、右の図のような、座標軸の回転である。



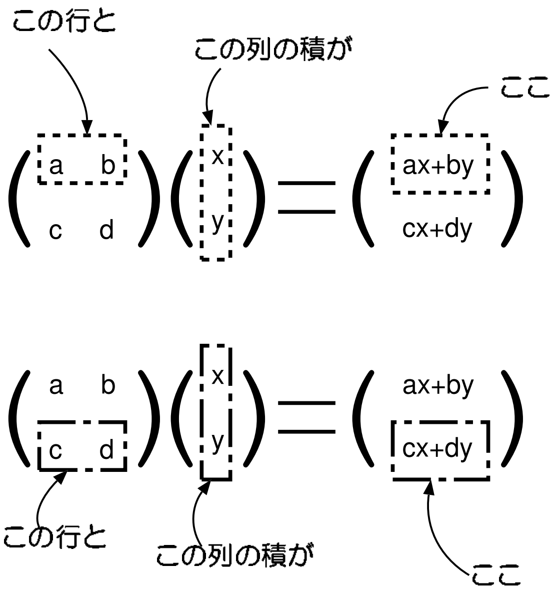
$$\begin{aligned} x' &= \quad x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{2.11}$$

> **[問い 2-3]** 右の図に適当に補助線を引くことにより、(2.11) を図的に示せ。

(2.11) は、行列を使って

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

と書くこともできる。



行列と列ベクトル[8]の計算のルールは、左の図である。このルールを (2.12) に適用すれば、(2.11) が出てくる。

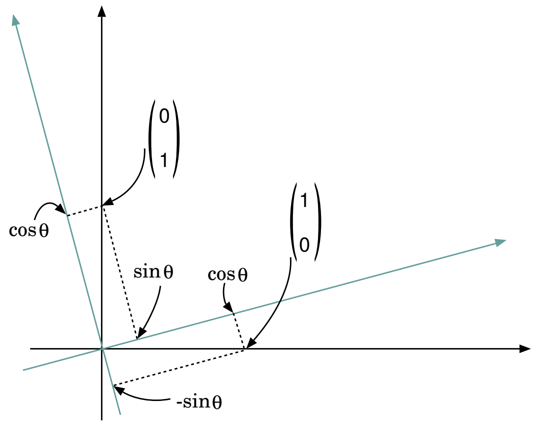
$(x, y) = (1, 0)$ という点と、$(x, y) = (0, 1)$ という点が (x', y') 座標でみるとどう表せるかを考えよう。行列計算で書けば、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

となる。つまり行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を座標変換した結果の $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ と、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を座標変換した結果である $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ を横に並べて作った行列であると考えることができる。$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は互いに直交し、それ自体の長さは１である。したがって、$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ も互いに直交して長さは１である。「長さが１である」という性質や「直交する」という性質はどの座標系で見ても ((x, y) 座標系でも (x', y') 座標系でも) 同じだからである。

[8] 縦に並んでいるのを「列ベクトル」、横に並んでいるのを「行ベクトル」と呼ぶ。「行」と「列」という漢字には横線２本、縦線２本がそれぞれ含まれているので「縦線が含まれている『列』が縦のベクトル」と覚えておくとよい。



回転であるから当然であるが、この式は

$$(x')^2 + (y')^2 = x^2 + y^2 \tag{2.15}$$

を満足する。つまり、原点からの距離（上の式は距離の自乗）はこの変換で保存する。これを行列で考えよう。まず、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \tag{2.16}$$

のように、行ベクトルと列ベクトルのかけ算という形で距離の自乗を表現する。列ベクトルの座標変換は (2.12) だったが、行ベクトルの座標変換は

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta & -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

と書ける。(2.12) と場合とは行列の並び方が変わっているものになっていることに注意しよう（具体的に行列計算をしてみればこれで正しいことはすぐにわかる）。この、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

のような並び替えを「転置 (transpose)」と呼び、行列 A の転置は A^t という記号で表す。転置は $a_{ij} \to a_{ji}$ と書くこともできる。a_{ij} とは「i 番目の行の、j 番目の列の成分」であるから、i と j を入れ替えるということは行番号と列番号を取り替えることである。ゆえに、転置を「行と列を入れ替える」とも表現する。

この式を使って、$(x')^2 + (y')^2$ を計算すると、

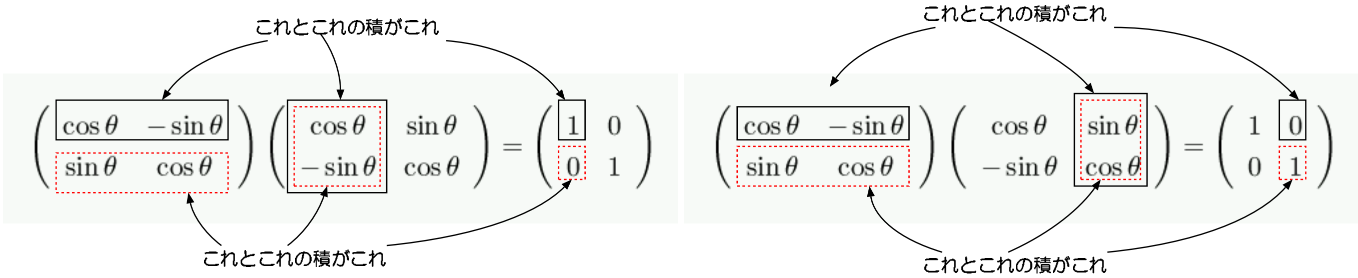
$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

となるが、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

となることを考えると、$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ すなわち、$(x')^2 + (y')^2 = x^2 + y^2$ になることがわかる。このように必要な部分だけを計算できるのが行列計算のメリットの一つである。

(2.20) が成立することは、直接的計算でももちろんわかるのだが、ベクトルの意味を考えればその意味が明白に理解できる。



上の図のように、行列のかけ算というのは結局、行ベクトルと列ベクトルの内積の計算を繰り返すものである。そして、$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が「互いに直交して長さが１であるような二つのベクトルを横に並べたもの」であり、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は同じベクトルを縦に二つ並べたものである。計算の結果１になるのは「自分自身との内積」すなわち「ベクトルの長さの自乗」を計算している部分で、０になる部分は「直交している」というところを計算している部分である。

今の一例に限らず、回転を表すような行列は「互いに直交して長さが１になるベクトルを並べたもの」という性質を持っていなくてはならない。

逆に、(2.15) を満足するような座標変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

と書けていたとすると、二つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ は、どちらも長さが 1 で、互いに直交しなくてはいけない。このような条件を満たしている行列を直交行列といい、A が直交行列であれば、$A^t A$ は単位行列となる。

直交行列であれ、というだけの条件では回転の行列になるとは限らない。たとえば、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は直交行列であるが、その物理的内容は回転ではなく、y 軸の反転である。直交行列で、かつ行列式が１であるという条件を満たす場合、その行列は回転を表す。

[問い 2-4] 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ はどんな座標変換を表す行列か。図で表現せよ。

[問い 2-5] 直交行列の行列式は 1 か -1 か、どちらかであることを以下を使って示せ。

1. 二つの行列 (A, B) の積 (AB) の行列式 $(\det(AB))$ は、それぞれの行列式の積 $(\det A \det B)$ である。
2. 転置しても行列式は変わらない $(\det A = \det(A^t))$。

[問い 2-6] 今考えた直交行列 A の行列式 $\det A$ には、どのような幾何学的意味があるか。その意味を考えて、$\det A$ が 1 または -1 であることの意味を説明せよ。
ヒント:行列式 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ は、ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ の何 ???

2.7　テンソルを使った表現

以上のような多次元の計算をする時、いちいち x 座標はこう、y 座標はこう、と式を並べるのは面倒なので、約束ごととして、$x^1 = x, x^2 = y$ のように x の肩に添字 (「足」と呼ぶこともある) をつけて表すことが多い。x^1 は「x の１乗」と、x^2 は「x の２乗」と間違えやすいので注意すること[9]。この書き方を使うと、(2.21) は

$$x'^i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x^j \tag{2.22}$$

と書ける。二つの行列の積

[9] 添字は肩でなく下につけて x_1, x_2 とする場合もある（この場合を「下付き添字」などと言う)。上付き添字と下付き添字は厳密には意味が違う。その差はこの講義の後半で出現する予定。実は厳密に考えると、(2.21) は $x^i = a^i{}_j x^j$ のように書かなくてはいけない。今考えている２次元や３次元で直交座標を使っている場合ではそこまで厳密にしなくても支障無い。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

は成分で書くと、

$$\begin{array}{c} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=c_{11}, \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=c_{12}, \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=c_{21}, \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=c_{22} \end{array} \quad \to \quad a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}=c_{ik} \quad \to \quad \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk}=c_{ik} \tag{2.23}$$

と書ける。この時、前の行列 (a_{ij}) の後ろの添字[10]（この場合 j のこと。列に対応）と後ろの行列 (b_{jk}) の前の添字（同じく j のこと。行に対応）が同じものにそろえられて足し算されていることに注意せよ。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が直交行列であるという条件 $(A^tA=I)$ を考えよう。

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^t)_{11} & (a^t)_{12} \\ (a^t)_{21} & (a^t)_{22} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

であるから、$A^tA=I$ は

$$\sum_{j=1}^{2}(a^t)_{ij}a_{jk}=\sum_{j=1}^{2}a_{ji}a_{jk}=\delta_{ik} \tag{2.25}$$

と書ける。ただし、δ_{ik} は $i=k$ の時 1、それ以外の時 0 ということを意味する記号で、クロネッカー・デルタと呼ばれる。つまりは単位行列をテンソルで表したものである。

この最後の式では前の添字どうしが同じになっていることに注意しよう。だから、$\sum_{j=1}^{2}a_{ji}a_{jk}$ を見て、「行列 A と行列 A の掛け算」だと思ってはいけない。上で述べたように行列の掛け算ならば「前の行列の後ろの添え字と、後ろの行列の前の添え字をそろえる」ろいうのがルールなので、A と A の掛け算ならば、$\sum_{j=1}^{2}a_{ij}a_{jk}$ なのである。a_{ij} を a_{ji} と置き換えるので、$\sum_{j=1}^{2}a_{ji}a_{jk}$ は「A^t と A の掛け算」と考えなくてはいけない。

以上のように、行列計算とテンソル計算の間の翻訳をする時には、添字の付き方に注意することが必要である。$\sum_{j}a_{ij}b_{jk}$ のように「前のテンソルの後ろの添字と後ろのテンソルの前の添字で和が取られている」時、素直に行列のかけ算に書き直せる。それ以外の時は転置などをとることが必要である。

さらに書くときに楽をするために、「同じ添字が 2 回現れたら、その添字に関して和がとられているものとする」というルール[11]を採用して、$\sum$ を省略することがある。その場合、(2.21) は

$$x'^i=a_{ij}x^j \tag{2.26}$$

と書けるし、(2.25) は

$$a_{ji}a_{jk}=\delta_{ik} \tag{2.27}$$

と書ける。

[10] テンソルの添字のことを「足」と表現することもよくある。

[11] 始めたのはアインシュタインなので、「アインシュタインの規約」と呼ぶ。アインシュタイン本人は「私の数学への最大の貢献」と冗談混じりに自画自賛している。

このように上や下に添字のついた量を「テンソル」[12]と呼ぶ（テンソルの正しい定義は後で行う）。以後この講義ではこの書き方をすることも多い（しばらくは併記するようにする）。どの書き方もたいへん大事なので、どれも使えるようになって欲しい。たとえば、行列で書いて

$$(x^1 \quad x^2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

となる式は、テンソルで書くと、

$$\sum_{i,j} x^i a_{ij} X^j \quad \text{または} \quad x^i a_{ij} X^j \tag{2.29}$$

となる。このような翻訳がさっとできるようにならないと困る。

このような回転に関しても、運動方程式の形が変わらないことを確認しよう。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{2.30}$$

から、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt^2} = & \ m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + m\frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta \\ = & \ F_x\cos\theta + F_y\sin\theta \end{aligned} \tag{2.31}$$

同様に

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta \tag{2.32}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} F_{x'} = & \ F_x\cos\theta + F_y\sin\theta \\ F_{y'} = & \ -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta \end{aligned} \tag{2.33}$$

を「回転された力」と考えれば[13]、

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'}, m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} \tag{2.34}$$

が成立し、回転前と同じ運動方程式が成立している。

このことも、行列およびテンソルを使った書き方で示しておく。

行列を使って書くならば、運動方程式が

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

と書かれていて、回転した座標系では、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

と書かれる、ということになる。角度 θ が時間 t によっていなければ、この二つの式は等しい。また、$a_{11} = a_{22} = \cos\theta, a_{12} = -a_{21} = \sin\theta$ として a_{ij} を使って表すならば、運動方程式は

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i \tag{2.37}$$

[12] 足の数をテンソルの階数と言う。ベクトルは足が一個ついているので「一階のテンソル」と言う。a_{ij} は二階のテンソル。

[13] これは座標というベクトルと力というベクトルが同じ形の変換をしなさい、ということなので、reasonable である。

から

$$ma_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2} = a_{ij}F^j \tag{2.38}$$

と変わる、ということになる。a_{ij} が時間によらなければ、この二つは等しい。

回転の場合、運動方程式の全体の形は変わらないが、個々の成分の値は変わる (x 成分が F_x から $F_x\cos\theta + F_y\sin\theta$ になるように)。このような場合は「不変 (invariant)」とは言わず「共変 (covariant)」という言い方をする。ニュートンの運動方程式は回転に対して共変である。

行列表示あるいはテンソル表示では、「変換」を表す部分が行列だったり a_{ij} だったりして、式の中で一カ所に集まって表現されている。そのため、何かの「変換」を行うことで新しい座標系での運動方程式が出ている（しかも、その「変換」は左辺も右辺も同様に行われる）ということがわかりやすいかと思う。

2.8　運動方程式を不変にする３次元の座標変換

今度は３次元を考えて、運動方程式が不変になるような座標変換のを考えると、それもやはり、ガリレイ変換と回転の合成で考えることができるであろう。ガリレイ変換の方は自明であろう。回転もほぼ自明ではあるが、一応式で表しておこう。

一般的な回転を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\text{テンソル表示なら、} x'^i = a_{ij}x^j) \tag{2.39}$$

のように行列で表してみよう。この行列を３つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ に分解する。この３つは互いに直交し、長さが１のベクトルになる。このことから、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{テンソル表示なら、} a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}) \tag{2.40}$$

が結論できる。つまり直交行列であるという点で、２次元の場合と同様である。

回転によって３次元の運動方程式が共変であることは、

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i \quad \to \quad ma_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2} = a_{ij}F^j \tag{2.41}$$

のように考えれば、２次元の場合と全く同様であることがわかる (ただし、i, j の和は $1, 2, 3$ で取られているところが違う)。a_{ij} は時間によらない定数でなくてはならないことも同じである。

３次元の具体的な回転は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

で表される３つの２次元回転の組み合わせで作ることもできる。回転を表すパラメータとしては、回転軸を指定するのに２つ、回転角度を指定するのに１つで、合計３つのパラメータがいる。

この章では数学的準備をしたので、いよいよ次の章から相対論へとつながる物理、すなわち電磁気学の相対性を考えていこう。

第3章　電磁気学の相対性

3.1　電磁波は静止できるのか？

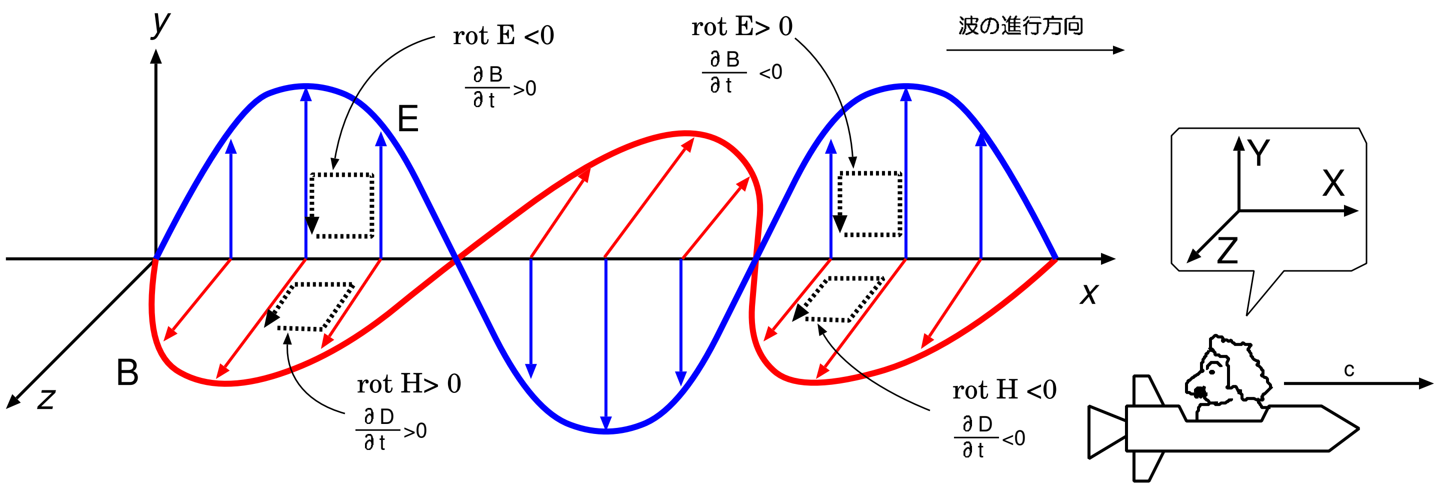
前にも書いたが、アインシュタインが後に相対論へと続く道の中で、最初に抱いた疑問は「光の速さで飛ぶと波の形をした静電場や静磁場が見えるんだろうか？」だったと言う話がある。例えば x 方向に伝播する電磁波

$$E_x = E_z = 0, E_y = E_0 \sin k(x - ct), B_x = B_y = 0, B_z = \frac{E_0}{c} \sin k(x - ct) \tag{3.1}$$

は真空中のマックスウェル方程式

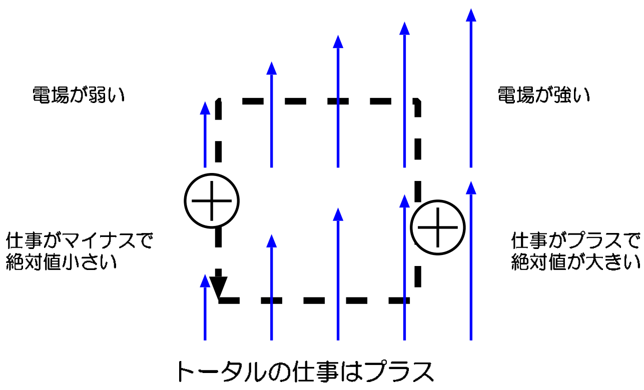
$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad & \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad & \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.2}$$

の解である。



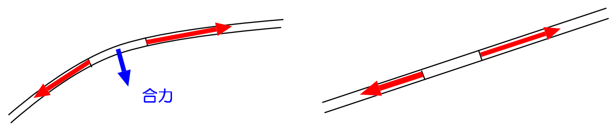
ここで、$\mathrm{rot}\vec{E}$ および $\mathrm{rot}\vec{B}$ と電磁波の進行との関係をまとめておく。$\mathrm{rot}\vec{E}$ の物理的意味は、「その地点の周辺で電荷 q を、微小な面積 ΔS をなす周回路で一周させた時、電場が q に対してなす仕事は $q\mathrm{rot}\vec{E}$ になる」と考えることができる。静電場では、$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ であるので、この仕事は 0 になる。ここでもし仕事を得ることができたとすると、同じところを電荷をぐるぐる回すことでどんどんエネルギーを得ることができる。つまり、「静電場では $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$」というのはエネルギー保存則であると解釈できる。磁場が増加している時は $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ となる[1]。

[1] この場所で電荷を周回させると電荷がエネルギーを得ることができるということになる。しかしもちろん、エネルギー保存則が破れているわけではない。磁束密度を増加させるために投入されているエネルギーの一部が電荷に与えられているだけのことである。



上の図に書かれている四角の回りに電荷を周回させたとすると電場から仕事をされることになる。それは図の左側の辺と右側の辺で電場の強さが違っていることからわかる（上と下の辺では電場と運動方向が垂直なので仕事は0）。その場所では、磁束密度が増加または減少する。この「電場の rot →磁場の時間変化」という関係と同様に「磁場の rot →電場の時間変化」という関係が成立するので、電場と磁場は空間変動が時間変動を生み、時間変動が空間変動を生むという形で波が進行していく。

弦の振動や、水面にできる波などに関しても、この「空間的変動が時間的変動を生む」というメカニズムが波を進ませる原動力である。



弦の振動の場合を考える。ピンと張られた弦には張力が働いている。張力は常に弦の方向に働く。曲がった状態にある弦の微小部分を考えると、両方からの張力の合力は弦の曲がりを解消しようとする方向に向く。まっすぐな状態になると、弦には全体としては力が働かなくなる。ゆえに、弦はまっすぐになろうとする（つまり「復元力を持つ」）。水面にできる波も同様で、何かの原因で水面に盛り上がったりくぼんだりしている部分があると、盛り上がった部分を下げ、くぼんだ部分を上げるように水が移動する。弦の振動でも水面でも共通する大事なことは「空間的な変化が時間的変化を生む」という物理現象が「波の伝播」という現象を引き起こしているということである。自然界には、何かに不釣り合いがあるとそれを正そうとする力が働くようで、その力により振動や波が発生する。自然界のあちこちで「波」が発生するのはそのおかげである。

すでに述べたように、電磁気についても、同じ原則が成立している。よって、「波の形をしているが振動しない電磁場」というのは、「両端を引っ張られているのに、曲がったままで直線に戻ろうとしない弦」や「一部がいつまでも盛り上がったまま、崩れもしない水面」と同じぐらい不思議な現象なのである。18歳のアインシュタインを悩ませたのも不思議ではない。

さて、光速度で走る人から見た電磁波の問題に戻り、より具体的に「止まった電磁波はあり得ない」ことを確認しておこう。電磁波を速度 c で走りながら見たとすると、その観測者にとっての座標系 (X, T) は速度 c でのガリレイ変換を施した座標系

$$X = x - ct, T = t \tag{3.3}$$

だと考えられる。座標の変換だけを行えばよいのだとすると（つまり、電場や磁場は座標変換しても同じ値を保っているとすると）、この系での電場と磁場は

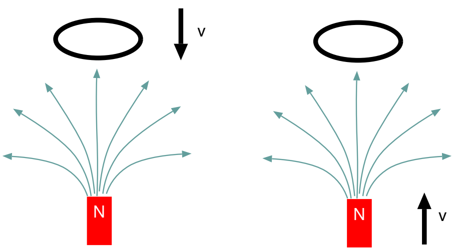
$$E_X = E_Z = 0, E_Y = E_0 \sin kX, B_X = B_Y = 0, B_Z = \frac{E_0}{c} \sin kX \tag{3.4}$$

となり、波の形をして止まっている電場と磁場が見えるように思われる。しかし、この解はマックスウェル方程式を満たさない。例えば $\mathrm{rot}\vec{E}$ の Z 成分は $\partial_X E_Y = kE_0 \cos kX$ となり、ゼロではない (図に点線で書き込んだ正方形を一周すると、電場は仕事をする！) が、$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial T} = 0$ である。これでは $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を満たせないのである。

したがって、マックスウェル方程式かガリレイ変換か、どちらかを修正しない限り、我々のこの宇宙は記述できないことがあきらかになるのである。ではどちらを修正すべきかを考えねばならない。

もちろん最終的に決め手となるのは実験なのだが、次の節ではマックスウェル方程式の方に有利な証拠をまず述べよう。

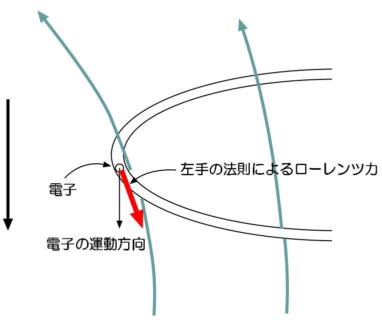
3.2 電磁誘導の疑問

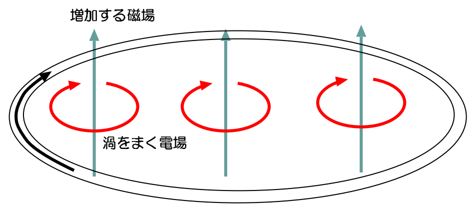


第1章で概要だけ述べた、電磁誘導に関する疑問について、ここでくわしく考えておこう。図のように、二つの現象を考える。左の図では、コイルが磁石に近づき、右の図では、磁石がコイルに近づく。二つの現象は、見る立場を変えれば同じ現象であり、結果として「コイルに時計まわりの電流が流れる」という点でも同じである。しかし、その記述は同じではない。

右図の場合であれば、それはコイル内の磁束密度が時間変化するということからくると解釈される。すなわち Maxwell 方程式の $\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ にしたがって、磁束密度が変化している場所には電場の渦が発生していて、その電場によってコイル中の電子が力を受け、電流となる。よく知られているように、この時に発生する電位差は、ファラデーの電磁誘導の法則 $V=-\frac{d\Phi}{dt}$ によって求められる。ここで Φ は回路内をつらぬく磁束であり、V の符号は Φ に対して右ネジの向きに電流を流そうとする時にプラスと定義される[2]。

> **[問い 3-1]** $\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ から $V=-\frac{d\Phi}{dt}$ を導け。





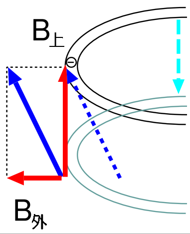
この時に起こっていることはあくまで「磁束密度の変化→電場の発生」という現象である。

では左図はどう解釈されるか。この場合は各点各点の磁束密度は変化していないので、電場などは発生していない。$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ の右辺はまじめに書くと $-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(x,y,z,t)$ であり、ある一点 (x,y,z) にある磁束密度の時刻 t での値の時間微分 $\times(-1)$ である。コイルの方が動く時、これは0である。「コイルを通る磁束は時間的に変化しているのではないか」と疑問に思う人がいるかもしれない。確かに変化しているが、この式の $\vec{B}$ は「ある点 (x,y,z) の時刻 t での磁束密度」という意味なのであって、「コイルを通る磁束の磁束密度」という意味はないのである。

ではコイルが動く場合にも電流が発生するのはなぜか。磁場中を電荷 q が速度 $\vec{v}$ で運動すると磁場とも運動方向とも垂直な方向にローレンツ力 $q\vec{v}\times\vec{B}$ を受ける。この力は電子がコイルをぐるぐるとまわすような方向に働くので、電流が流れる。つまりこの場合、電場などは発生していないが、磁場によって電子が力を受けることによって、電位差が発生したのと同じ効果があらわれて電流が流れていることになる。

---
[2]角運動量 $\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}$ など、回転に対応するベクトルの向きはこのように決めるのが普通である。

[問い 3-2]
この考え方で、電子に働く力を計算し、電子が回路を一周する間にこの力がする仕事を計算せよ。この仕事を単位電気量あたりに直したものが、$V = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ と等しいことを導け。
ヒント：磁場 $\vec{B}$ は真上を向いていないので、上向き成分 $B_{上}$ と外向き成分 $B_{外}$ に分けてみよ。電子に働く力に貢献するのは $B_{外}$ の方であるから、$B_{外}$ を使って仕事を計算せよ。一方、コイルが動いたことによってコイル内から出る磁束（=磁束密度×面積）がどうなるかを、図から計算してみよ。

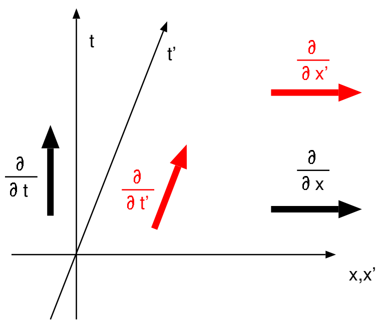


このように、マックスウェル方程式を使った計算では、どちらの立場にたっても同じ答が出てくる。これはたまたまうまく行っているなのか、それとも必然的にそうなっているのか？
もちろん、「たまたま」などではなくこうなることには意味がある、というのが相対論の立場である。それはつまり「マックスウェル方程式はどの慣性系でも正しい物理法則である」ということに他ならない。今ではその立場が広く認められているわけだが、相対論ができあがる前には「マックスウェル方程式ではない方程式が必要だ」という考え方もされた。次の節でその方程式について説明しよう。

3.3　マックスウェル方程式をガリレイ変換すると？

電磁波の発見者としても名高いヘルツ (Hertz) は、動いている人から見たらマックスウェル方程式はどのように変化するのか、ということを考えて、マックスウェル方程式をガリレイ変換した方程式を導いている。
３次元のガリレイ変換を

$$x'^i = x^i - v^i t \text{ または } x^i = x'^i + v^i t', \quad t' = t \tag{3.5}$$



と置く。そして、この (x', t') 座標系では普通のマックスウェル方程式が成立するとしよう。では (x, t) 座標系ではどんな方程式が成立するだろう？
これは座標変換 $(x^i, t) \to (x'^i, t')$ であるが、この時微分 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial t}$ はどのように変化しなくてはいけないかを考えてみる。一般的な微分の公式から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'^i} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial t}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial t}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^1}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{3.7}$$

がわかる（アインシュタインの規約をつかって簡略化して書いた）。
つまり、x による微分と x' による微分は同じもので、t による微分と t' による微分が変化する。座標は x が変化して t は変化していないのだから、奇妙に思えるかもしれない。しかし $\dfrac{\partial}{\partial t} \neq \dfrac{\partial}{\partial t'}$ であることは、$\dfrac{\partial}{\partial t}$ が「x を一定として t で微分」であり、$\dfrac{\partial}{\partial t'}$ が「x' を一定として t' で微分」であることを考えれば、納得がいくだろう。上図からわかるように、「x 一定として t が変化する」場合と「x' 一定として t' が変化」する場合では移動方向が違うのである。

逆に、$\dfrac{\partial}{\partial x}$ が「t を一定として x で微分」であり、$\dfrac{\partial}{\partial x'}$ が「t' を一定として x' で微分」であることを考えれば、この二つは同じものであることも納得できる。

[問い 3-3] $x'^i = x^i - v^i t$ に $\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t} + v^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ をかけると 0 になることを確認せよ。

では方程式を作っていく。ここで、電場や磁場の値は運動しながら見ても変化しない（どちらの座標系でも同じ値を取る）と仮定する。空間微分は変化しないから、$\mathrm{div}\vec{B}=0$ や $\mathrm{div}\vec{E}=0$ は x' 系でも x 系でも同じ式である。時間微分を含む方程式である $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ などを考えていこう。

(x', t') 座標系を「マックスウェル方程式が成立する座標系」と考えたので、たとえば z 成分の式として、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B_z}{\partial t'} \tag{3.8}$$

が成立している。これをガリレイ変換すれば、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x\frac{\partial B_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial B_z}{\partial y} - v_z\frac{\partial B_z}{\partial z} \\
&= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x\frac{\partial B_z}{\partial x} - v_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial B_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial B_y}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial B_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial B_y}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ここで、１行めから２行目では $\dfrac{\partial B_z}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial x} - \dfrac{\partial B_y}{\partial y}$ （$\mathrm{div}\vec{B}=0$）を使った。

$\vec{v}\times\vec{B}$ というベクトルを考えると、これの y 成分が $v_z B_x - v_x B_z$ であり、x 成分が $v_y B_z - v_z B_y$ である。ゆえに上の式は

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\times\vec{B})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{v}\times\vec{B})_x \tag{3.10}$$

となる。x, y 成分に関しても同様の計算をすれば、この３つの式が

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{3.11}$$

とまとめることができることがわかる。ここで、計算の途中で $\vec{v}$ と微分の位置を取り替えていることに注意。これは $\vec{v}$ が定数で、微分したら零だからできることである。$\vec{B}$ と微分との順番は安易に取り替えてはならない。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

ベクトル解析を使って計算するならば、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{B} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + (\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0})\vec{v}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

と、０になる項を付け加えた後で、公式

$$\vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R}) = \vec{Q}(\vec{P}\cdot\vec{R}) - (\vec{P}\cdot\vec{Q})\vec{R} \tag{3.13}$$

を使えばすぐに (3.11) を出すことができる。ただし今の場合は $\vec{P}=\vec{\nabla}, \vec{Q}=\vec{v}, \vec{R}=\vec{B}$ であるが、$\vec{\nabla}$ によって微分されるのは $\vec{B}$ だけだという点に注意しよう。

同じ計算をテンソルを使ってやることもできる。ただし、そのためには外積をテンソルで書くと、外積 $\vec{A}=\vec{B}\times\vec{C}$ が $A_i=\epsilon_{ijk}B_jC_k$ となることを知っていなくてはいけない。

ここで ϵ_{ijk} は i,j,k について完全反対称（$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{ikj}=-\epsilon_{kji}$）で、かつ $\epsilon_{123}=1$ であるようなテンソルである。つまり、$\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1$（添え字が 123 の偶置換）で、$\epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1$（添え字が 123 の奇置換）であり、それ以外は 0 である。この記号を使うと、

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}E_k &= -\frac{\partial}{\partial t}B_i - v_j\frac{\partial}{\partial x^j}B_i \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}B_i - v_j\frac{\partial}{\partial x^j}B_i + v_i\frac{\partial}{\partial x^j}B_j\end{aligned} \tag{3.14}$$

のように書くことができる。$\mathrm{div}\vec{B}=\frac{\partial}{\partial x^j}B_j=0$ であることを使って最後に 0 を足している。この最後の 2 項は、添え字を適当につけかえることで、

$$-v_j\frac{\partial}{\partial x^j}B_i + v_i\frac{\partial}{\partial x^j}B_j = \left(\delta_{km}\delta_{il}-\delta_{kl}\delta_{im}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}v_lB_m \tag{3.15}$$

のように書ける（右辺から左辺への変形は容易なので、確認すればよい）。

ここで、$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}$ という公式を使う。この式の意味することは、「$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ は、$j=l$ で $k=m$ の時は 1 になり、$j=m$ で $k=l$ の時は -1 になる（ただし、$j=k=l=m$ の時は 0)」ということである（これは式の意味を考えると納得できる）。これによって、

$$-v_j\frac{\partial}{\partial x^j}B_i + v_i\frac{\partial}{\partial x^j}B_j = \epsilon_{pki}\epsilon_{pml}\frac{\partial}{\partial x^k}v_lB_m = \epsilon_{ikp}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\epsilon_{plm}v_lB_m\right) \tag{3.16}$$

という式が作れる。これは $\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})$ の i 成分である。

【補足終わり】

$\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}$ の方は、

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{D}) + \vec{j} + \rho\vec{v} \tag{3.17}$$

となる。この計算は (3.11) を出したのとほぼ同様である。違いは符号と、$\mathrm{div}\vec{D}$ が 0 ではなく ρ になるために最後の項がついてくることである。

よって、x 系で成立する方程式は

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\vec{B}=0 \qquad \mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{B}) \\ &\mathrm{div}\vec{D}=\rho \qquad \mathrm{rot}\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{D})+\vec{j}+\rho\vec{v}\end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。これをヘルツの方程式と呼ぶ。ここで、x' 座標系での電場や磁場の値は、x 座標系での値と全く同じであると考えて方程式を出していることに注意せよ。実際にこうなのかどうかは、実験的に検証する必要がある。

この章の最初の疑問に対して、ヘルツの考え方はどのような答えを出すだろうか。3.1節では、(x,t) 系がマックスウェル方程式が成立する座標系で、(X,T) 系がその系に対して速度 c で動いているとして、座標変換を $X=x-ct$（この逆変換は $x=X+cT$）と考えた。ヘルツの方程式の導出では $x'=x-vt$ として、x' 系がマックスウェル方程式の成立する座標系（エーテルの静止系）であったから、対応（$(x,X)\leftrightarrow(x'x)$）を考えると、ヘルツの方程式にあらわれる $\vec{v}$ が $\vec{v}=(-c,0,0)$ であることがわかる。3.1ではエーテル静止系はとまっていて、観測者が速さ c で右側に動いていた。逆に考えると、観測者から見てエーテル静止系が速さ c で左側に動いている。一方、3.3では、観測者に対してエーテル静止系が右に速さ v で動いている、と考えればわかりやすい。

よって、(X,T) 座標系での電磁場

$$\vec{E}=(0,E_0\sin kX,0),\qquad \vec{B}=(0,0,\frac{E_0}{c}\sin kX) \tag{3.19}$$

の満たすべき方程式は、ヘルツの式で $\vec{v}=(-c,0,0)$ とした方程式である。

$\vec{v}\times\vec{B}$ を計算すると、

$$(\vec{v}\times\vec{B})_X=0,\quad (\vec{v}\times\vec{B})_Y=E_0\sin kX,\quad (\vec{v}\times\vec{B})_Z=0 \tag{3.20}$$

となって、$\vec{E}$ と $\vec{v}\times\vec{B}$ が等しいということになる。$\vec{B}$ は時間によらないのだから、この電磁場は (3.11) を満たしている。(3.17) も同様である。したがって、ヘルツの方程式が等しいとすれば、「止まっている電磁波」は存在することになる。

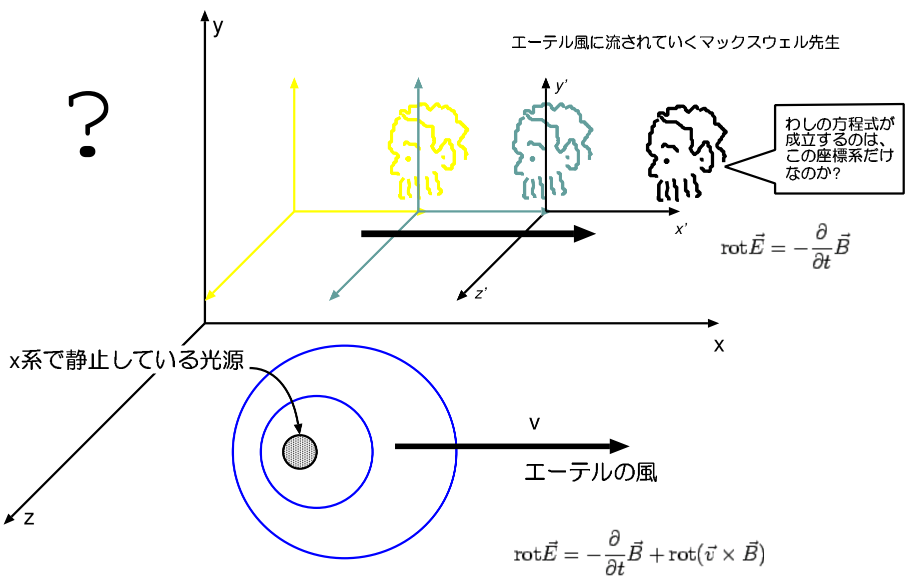
[問い 3-4] 上で確認したのは速度 v がちょうど c の時であったが、そうでない場合、電場や磁場はどんな式になるか。そして、それはヘルツの方程式を満足しているか。

3.4 エーテル—絶対静止系の存在

こうして、マックスウェルの方程式とヘルツの方程式という、二つの方程式が出てきた。どのようにしてヘルツの方程式が出てきたかを思い出そう。互いにガリレイ変換 $x'=x-vt$ で移り変わる二つの座標系を用意し、x' 系ではマックスウェル方程式が成立すると考えて、x 系で成立する方程式を求めた。これがヘルツの方程式である。つまり、宇宙には特別な「マックスウェル方程式が成立する座標系」x' があり、その特別な座標系に対して運動している座標系ではヘルツの方程式が成立する。そして、それぞれの座標系から見てマックスウェル方程式が成立する x' 系がどう運動しているのかを示すのが $\vec{v}$ である。

ここで、光同様に波である、音の場合を考えてみよう。音は「空気の静止系」では周囲に均等な速度で伝播する。しかし、「空気の静止系が速度 $\vec{v}$ で動いているように見える座標系」つまり「風が速度 $\vec{v}$ で吹いている座標系 」では、風に流される。つまり、音の伝播は「空気の静止系」とそれ以外の座標系では、違う法則にしたがうのである。それと同様に、「マックスウェル方程式が成立する特別な座標系」がどこかにあり、それ以外の座標系では $\vec{v}\neq 0$ のヘルツの方程式を使わねばならない。

音に対する空気のように、光に対して「エーテル」と言う媒質を考えると、「エーテルの静止系」(今の場合 x' 座標系)でのみマックスウェル方程式が成立するということになる。



空間はエーテルに満たされている。このエーテルの振動が光であり、エーテルの静止系ではマックスウェル方程式が成立する。音が空気の振動であるように、光はエーテルの振動だと考えたのである。そして、ヘルツの方程式にあらわれる $\vec{v}$ は、エーテルの運動速度である。エーテルが動いていれば、光はエーテルの運動方向には速く、逆方向には遅く伝わる。

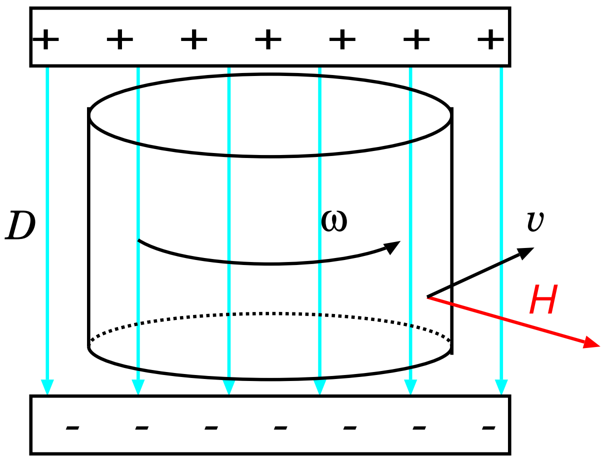
これがほんとうだとすると、マッハによってニュートン力学から追放されたはずの、「絶対空間」が電磁気学の世界で復活してきたことになる。と同時に我々は電磁気の問題を解く時常に「エーテルの風は吹いているのか？」と問いかけなくてはいけないことになる。エーテルの風の速さ $\vec{v}$ がわからないと式がたてられないのである。

[問い 3-5] x 座標系では光の速度は方向によって違うため、静止した光源から出た光は光源を中心とした円にはならない。一方、x' 座標系で見ると、光はどの方向にも均等に広がる。では x' 座標系で見た時、光の波の形が同心円にならない理由は何か？

周期表で有名なメンデレーエフはエーテルに原子番号「０」を与えたという。エーテルがもし存在するとしても普通の物質とは全く違う性質を持ったものであることは間違いない。まず光は横波であるから、エーテルは固体のように変形に対して元に戻ろうとする性質（弾性）を持っていなくてはいけない（液体や気体中は横波は伝わらない)。光が秒速３０万キロという速いスピードで進むことは、エーテルが非常に固い物質であることを示している。しかし、すぐ後に示すように、エーテルが満ちていると考えられる「真空」中を、物体は抵抗なく進むことができる。固いのに抵抗がないとはいったいいかなる “物質” なのであろうか？

このように考えていくと、「光も波なのだから媒質となる物体が存在しているだろう」という素朴な考え方が、むしろ非常識な結果を生むことがわかる。では実際にはこの非常識なエーテルなるものは存在するのか、それともないのか、それを決めるのは実験である。そのための実験としてもっとも有名なのがマイケルソン・モーレーの実験の実験なのだが、これについては次章で述べるので、この章の残りの部分ではそれ以外の実験においてもヘルツの方程式を採用すべきか否かについてある程度の情報が得られることを示そう。

3.5　ヘルツの方程式の実験との比較



ヘルツの方程式が正しいかどうかを判定できる実験として、レントゲン (Röntgen) とアイフェンヴァルト (Eichenward) による、回転する誘電体の実験がある。図のように誘電体を半径 R の円筒形にして、軸方向に磁場をかけておいて回転させる。

エーテルがこの回転する誘電体と一緒に運動しているとすれば、ヘルツの方程式の中の $\vec{v}$ には、各点各点の回転速度を代入すればよい (これで本当にいいのかは再考が必要)。磁場が一定だとしてヘルツの方程式 (3.17) はこの場合、

$$\mathrm{rot}\vec{H} = -\mathrm{rot}\left(\vec{v} \times \vec{D}\right) \tag{3.21}$$

となるから、

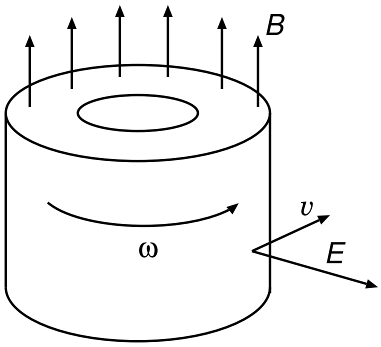
$$\vec{H} = -\vec{v} \times \vec{D} \tag{3.22}$$

が一つの解である。この式には rot をかけて 0 になる量を足すだけの自由度があるが、そんな項がついていたとしたら、$\vec{H} = -\mathrm{grad}\phi$ で表すことができる静磁場が重ね合わされるということである。静磁場がない状況を考えているならばこの項はない。

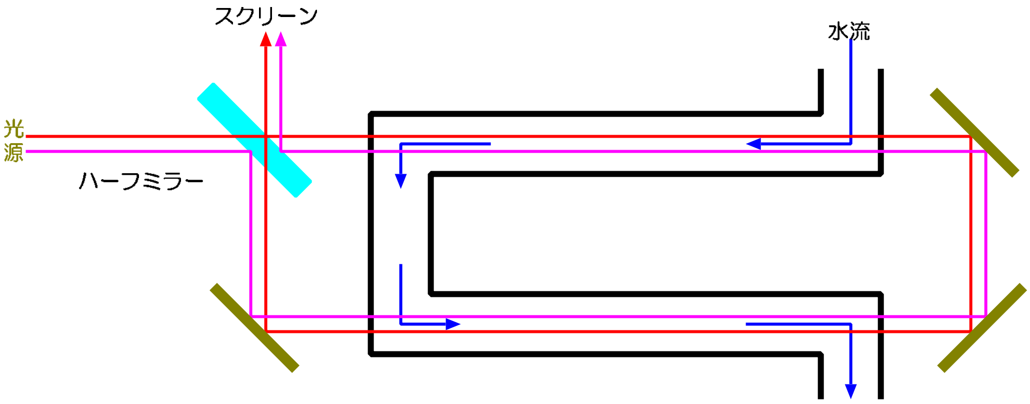
これにより、円筒が角速度 ω で回っているとするならば、表面には大きさ $R\omega D$ の磁場が発生することになる。ところが実際に測定された磁場は $\dfrac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} R\omega D$ であった (ϵ は誘電体の誘電率、ϵ_0 は真空

の誘電率)。ここではまだ書かないが、もちろん相対論を使った計算ではこの結果に一致する答えが出る。

上で電場中で物体を回転させて磁場を作ったことの逆で、物体を磁場中で回転させて分極を作る実験がある。この現象については、アインシュタインとラウプがローレンツ変換を使って磁場中で動く磁性体の分極を計算している (1908 年)。W. ウィルソンと H.A. ウィルソンが実験で確認した (1913 年)。この実験結果も、素朴にヘルツの方程式を適用した計算とは合わないが、相対論的計算ならば合う。



ここでは「誘電体が回転している速度をヘルツの方程式の $\vec{v}$ に代入する」という計算をやっているが、物体が動いてもその場所のエーテルは動かないのかもしれない。実は「物体が動くとその周りのエーテルは一緒に動くのか？」ということを定めるための実験は、すでに 1851 年にフィゾー (Fizeau) によってなされている。



彼は水中の光速度が、水が流れている時にはどのように変化するかを間接的に測定した。流れる水の中を水と同じ方向に通した光と逆方向に通した光で干渉を起こさせて、流速を変化させた時の干渉縞の変化から水中での光速度を推測している[3]。フィゾーの実験の結果、静止している水中の光速を u とすると、光の進む方向に水が速さ v で流れているときは

$$u+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \tag{3.23}$$

という速度で光が伝播することがわかった[4]。もしエーテルが完全に引き摺られるのであればこの式は $u+v$ になっただろう。まったく引き摺られないのならば u となっただろう。

この実験の結果から、エーテルは (もし存在するのなら) 水の流速の $1-\dfrac{1}{n^2}$ 倍で引き摺られることになる。この $1-\dfrac{1}{n^2}$ をフレンネル (Fresnel) の随伴係数と言う。しかし屈折率 n は通常、光の振動数によって違うので、光の振動数ごとに別々のエーテルが別々の速度で動く、ということになる。これは音にたとえれば、ドの音を伝える空気と、ソの音を伝える空気が違う速度で運動していることである。この「エーテルの引き摺り」現象はエーテルというものを実在のものと考えることを非常に困難にする実験事実であると言えるだろう。

ローレンツは「ヘルツの方程式の導出では、電場や磁場の値が座標系によって変化しないと考えている」という点に異議を唱えた。ローレンツがこの点を改良したうえで、さらに、後で述べるマイケルソン・モーレーの実験を説明するための「ローレンツ短縮」という現象なども取り入れるように

[3]このあたりの実験のやり方は後で出てくるマイケルソン・モーレーと似ている。

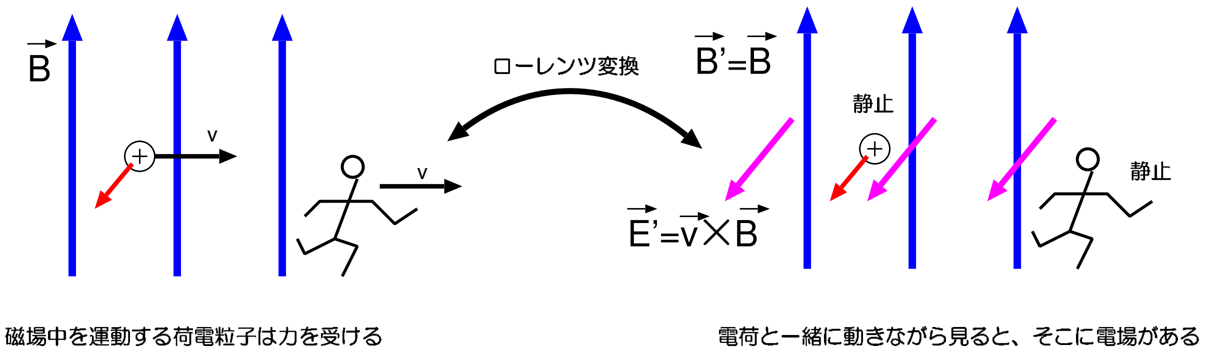
[4]後で「光速度は不変である」ということを口が酸っぱくなるほど言うので、ここで光速が変化するという結果が出ていることに、後々違和感を覚えるかもしれない。しかしここで述べているのは物質が満ちている空間における光速であり、「光速度が不変である」と言っている時の光速は真空中のものである。

作ったのがローレンツ変換である。ローレンツ変換はマックスウェル方程式を不変にするので、ヘルツの方程式のような新しい方程式は出てこない。そのかわり、電場や磁場は

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \tag{3.24}$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \tag{3.25}$$

のように、座標系によって違う値を取ると考えた (この式では $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ のオーダーを無視している)。



$\vec{E}'$ と $\vec{B}'$ は、$\vec{x}'$ 座標系での電場と磁場である。二つの座標系は、$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$ で表される座標変換でつながっている。ローレンツは各種実験をちゃんと再現できるように考えてこの変換にたどりついた。この変換によれば、ある座標系では電場がなく磁場だけが存在していたとしても、その座標系に対して速度 $\vec{v}$ で動くような座標系には電場と磁場の両方が存在する。ローレンツは磁場中を動いている電荷が感じる力は、その電荷が静止しているような座標系では電場が存在していて、その電場により力を受けるからだと考えられることを示した。その力こそ $q\vec{v} \times \vec{B}$ であり、現在「ローレンツ力」と呼ばれている。3.2節で考えた動くコイルの問題も、(3.25) 式を考えれば、「動いているコイルから磁場を見ると、そこには電場もあるように見える」という考え方で解くことができる。

ヘルツの方程式では説明が困難であった現象を、「マックスウェル方程式＋ローレンツ変換」によってうまく説明することができた。しかしこの時点でのローレンツ変換にはいくつか不明確な点や未完成な点がある。そのためここで説明するとかえって混乱することになりそうなので、ローレンツ変換自体の説明は少し先に延ばす。歴史的には、ローレンツが試行錯誤の末にローレンツ変換を作りあげた後、アインシュタインが特殊相対性原理という形で、その背後にある物理的内容を明確にしてくれた。現在の我々も、特殊相対性原理の考え方を使ってローレンツ変換を考えた方がわかりやすい。

以上からわかるように、エーテルの静止系でのみマックスウェル方程式が成立するという考え方は、いろいろと実験的不都合を招く。その不都合の最たるものが次の章で説明するマイケルソン・モーレーの実験である。だが忘れないでいて欲しいのはマイケルソン・モーレーの実験だけがエーテルの存在（絶対空間の存在）を否定しているわけではないということである。ヘルツの理論（マックスウェル方程式＋ガリレイ変換）ではどうしてもうまく説明できない実験事実がいろいろとあったからこそ、アインシュタインを筆頭とする 20 世紀の物理学者達はガリレイ変換を棄却してローレンツ変換を採用し、特殊相対論を展開させた。新しい物理というのは、一つの実験だけをきっかけに一朝一夕にできあがるようなものではないのである。

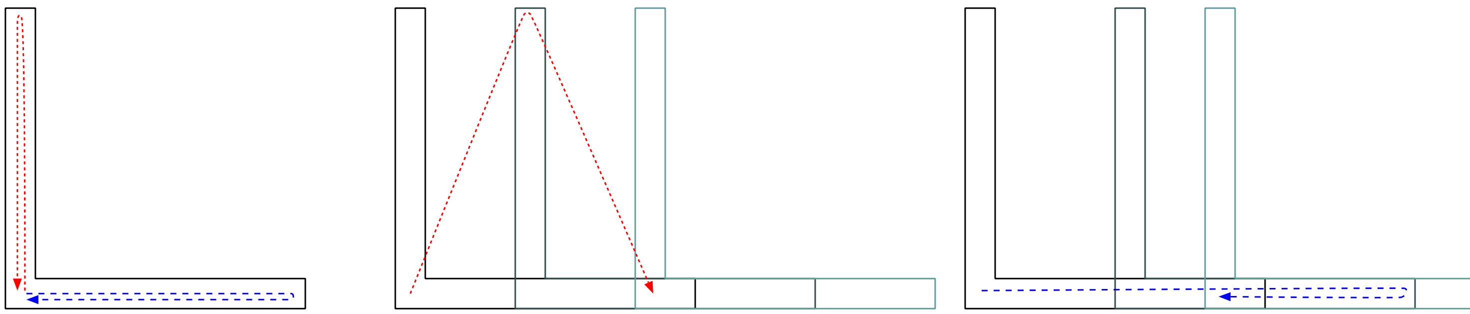
第4章　光速度不変から導かれること—図形的理解

19 世紀の常識からすれば、マックスウェル方程式に基づく電磁気学は「ガリレイ変換で不変でない」、別の言い方をすれば「特殊な座標系（エーテル静止系）でしか適用できない」という弱点を持つことになる。ではははたして、地球はエーテルに対して動いているのか否か？—これを判定するための実験が行われた。

この章では、その実験の概要と、実験からわかった「光速度は誰から見ても同じである」という事実をどのように解釈しなくてはいけないかを図で示す。数式を使った理解は次の章に回す。

4.1　マイケルソン・モーレーの実験

ヘルツの考察から、**ガリレイ変換が正しいとすれば**、電磁気の基本法則はマックスウェル方程式ではなくヘルツの方程式で表されることになる。このヘルツの方程式は結局は間違っていたわけであるが、間違っていると言っても理論的に間違っているわけではない。ヘルツの方程式は実験によって否定されるのである。ヘルツの方程式が正しいかどうか、あるいはエーテルが存在しているのかどうかを確認する実験として、ここではもっとも有名で、かつ直接的な測定であるマイケルソン・モーレーの実験について述べよう。光の速度がエーテルの運動によって変化するかどうかを確認した実験である。光の速さを測定しよう、というのであれば、一番単純な方法は「A 地点で光を発射して B 地点で受ける。A 地点と B 地点の距離をかかった時間で割る」というものであろう。原子時計などを用いて精密に時間を測ることができる現代であれば、まさにこの通りの実験ができる。しかし、当時はまだそんな測定はできない。そこで干渉を用いて速度変化を検出しようというのがマイケルソン・モーレーの実験である[1]。



実験装置がエーテルに対し止まっている状態

実験装置がエーテルに対し動いている状態での南北方向への光

実験装置がエーテルに対し動いている状態での東西方向への光

[1]現在ならもっと直接的でシンプルな実験が可能だという意味では、マイケルソン・モーレーの実験を使って光速度不変を説明するという方法は、“古臭いやりかた” なのかもしれない。このテキストでは歴史的重要性を尊重して古臭いやりかたを踏襲する。

マイケルソンは以下で説明する原理の実験を、1881 年に最初に行っている。以後、1887 年からはモーレーと協同で装置を改良し、実験精度を上げながら実験を続けている。実験の目的は、南北方向の光と東西方向の光の速度を比較することである。地球が南北方向より東西方向に大きく動いているであろう（太陽が静止していると考えて、太陽から地球の運動を見ていると考えればこれはもっともらしい）ことを考えると、速度には差が出てきそうに思える。また、たとえそうでなく、たまたまエーテルの流れと地球の自転公転の速度が一致していたとしても、地球は１日の間に１自転し、１年の間に１公転する。したがって長い時間実験を行えば、かならずどこか（いつか）エーテルの風が吹く場所がありそうである。

マイケルソンとモーレーの実験では、図のように、同じ長さの腕２本の上を光が往復する。エーテルが静止している（あるいはエーテルと実験装置が同じ速度で動いているとしても話は同じこと）と考えると、どちらの方向に進んだ波も、帰ってくるまでにかかる時間は $t=\frac{2L}{c}$ となるだろう。

ではエーテルの風が図で左（西向き）に吹いている場合 (あるいはエーテルが静止していて、観測装置が右に動いている場合) を考えよう。断っておくが、以下の計算は**ガリレイ変換が正しいと仮定した場合**の計算である（後でこう考えたのではいけない、ということがわかる)。この仮定のもとでは、２種類の計算ができる。一つはエーテルが静止して実験装置が右（東）に動いているという立場であり、もう一つは実験装置が静止してエーテルの風が西向きに吹いているという立場である。

エーテルが静止している立場： まず、エーテルが静止している立場で考えよう。この立場では、実験装置が右へ動いている、ということになる。その立場で書いたのが上の図の中央と右の図である。実験装置がエーテルに対して速度 v で東（図で右）に運動しているとして、南北方向へ進む光について考える。中央から棒の端まで光が進むのに t かかったとすると、ピタゴラスの定理により $(ct)^2=(vt)^2+L^2$ が成立する。光が往復にかかる時間はこの２倍なので、

$$t_{南北}=\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{4.1}$$

となる。次に東西である。まず中央から棒の端まで光が進むのに t_1 かかったとする。その間に棒も vt_1 進んでいるので、光は $L+vt_1$ 進まねばならない。逆に棒の端から中央まで戻る時に t_2 かかるとすると、この時進む距離は $L-vt_2$ でよい。以上から

$$L+vt_1=ct_1 \tag{4.2}$$

$$L-vt_2=ct_2 \tag{4.3}$$

を解くことにより

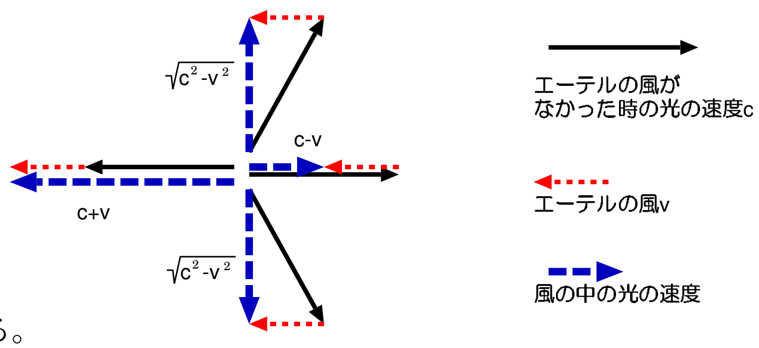
$$t_{東西}=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=\frac{2cL}{c^2-v^2} \tag{4.4}$$

が求まる。

実験装置が静止している立場 ： この場合はエーテルの風に乗った方向（西行き）では光速が $c+v$ になり、逆風の方向（東行き）では光速が $c-v$ になると考えて計算する。

また、エーテルの風と直角の方向 (北行きもしくは南行き）の光は、速度が $\sqrt{c^2-v^2}$ に減る（速さ c で斜めに進んだ光が、速さ v で東に流されると考えれば、ピタゴラスの定理でこうなることがわかる)。

このように考えると、距離 L を速さ $c+v, c-v, \sqrt{c^2-v^2}$ でそれぞれ割って足し算するという計算で $t_{東西}$ や $t_{南北}$ が計算できる。結果は同じことになるのはすぐにわかる。



以上、どちらの計算でも $t_{東西}$ と $t_{南北}$ が得られる。そして、この二つには差がある。v は c より十分小さいとして近似を行うと、

$$t_{南北} \simeq \frac{2L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\cdots\right), \quad t_{東西} \simeq \frac{2L}{c}\left(1+\left(\frac{v}{c}\right)^2+\cdots\right) \tag{4.5}$$

つまり、$\frac{2L}{c}\times\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$ ぐらいの時間差が出ることになる。c が自転（秒速 0.46 キロ）や公転（秒速 30 キロ）に比べて非常に大きい（秒速 30 万キロ）ため、$\frac{v}{c}$ は公転速度をとったとしても 10^{-4} 程度の値になる。最初の実験では $L=3\mathrm{m}$ ほどだったので、時間差は

$$\Delta t = \frac{2\times 3}{3.0\times 10^8}\times\frac{1}{2}\left(10^{-4}\right)^2 \simeq 10^{-16} \tag{4.6}$$

となり、$10^{-16}\mathrm{s}$ 以上の精度での時間の測定が必要となる。そこで実際の実験では時間を直接測定するのではなく、光の干渉を用いて到着時間が変化する様子を見定めようとした（実際には到着時間が変化しないという結果が出た）。

二つの光をハーフミラーなどを使って重ねてスクリーンなどにあてると、ヤングの実験やニュートンリングの実験などと同様に、二つの光の光路差によって干渉が生じ、スクリーン上に縞模様ができる（実際に使う光はある程度の広がりがある）。エーテルの風が吹いている時と吹いてない時では光路差が違うので、干渉の（強め合うとか弱め合うとか）の条件が変化する。10^{-16} という時間は短いが、光路差に直すと $c=3.0\times 10^8$ がかかって $3.0\times 10^{-8}\mathrm{m}$ となる。光としてナトリウムランプを使ったとしたらその波長 $6\times 10^{-7}\mathrm{m}$ に比べ、だいたい 20 分の 1 となる。この光路差の違いは干渉縞の移動という形で関知できる。

実験装置は 90 度回転できるようになっており、回転しているうちに南北と東西が入れ替わる。光路差はプラスからマイナスへと、この倍変化するので、波長の 10 分の 1 程度光路差が変化する。ということは明線から明線までの距離の 10 分の 1 （明線から暗線までの距離の 5 分の 1）の干渉縞の移動が見られるはずであった。ところが、実際にはそのずれが観測されず、エーテルの風は吹いていない、という結論になった。マイケルソンとモーレー、あるいは別の人々が実験装置を大きくしたり、光を何度も反射させて L を大きくしたりして、いろんな実験を行ったが、結果は常に予想される移動量よりも小さく出た（この移動は誤差の範囲内）。

いくつか、この実験結果への反論（および反論の反論）を紹介しておこう。

運動しながら光を出せばその光の速度は c ではないのでは？ つまり「実験装置が動いている場合の計算で速度を c にしているのが間違いなのではないのか」ということだが、例えば音の場合、音源が動いているからと言って音速は変化しない。音速が変化するとしたら、風が吹く（つまり媒質が運動する）か、観測者が動くことによってみかけの音速が変化するか、どちらかである。今は媒質の運動しているかどうかを観測する実験をやっているのである。なお、$t_{東西}$ の計算では $c+v$ や $c-v$ が現れているが、これは光速が変化しているのを意味しているのではなく、棒の両端（光源ではなく、光を受ける方）が動いているために到達時間がのびたり縮んだりしていることのあらわれである。式 (4.2) と式 (4.3) の作り方をよく見てみよう。

たまたま、エーテルの移動と地球の移動が同じ方向だったのでは？ だとしたら、その 6 ヶ月後に同じ実験をしたら、公転速度の二倍分、エーテルに対して地球は移動しているはずである。しかし、そんなことはなかった。

エーテルが地球といっしょに運動しているのでは？ この実験だけを説明するのなら、「エーテルは地球表面といっしょに運動しているので、地球上で実験してもエーテルの運動は検出できない」という考え方でも説明できる。しかし、そうだとすると地球表面でエーテルが渦巻くような流

れを作っていることになり、外から地球にやってきた光は、地表面近くのエーテルの流れに流されることになる。これでは、我々が見ている星の位置は、地上のエーテルの流れに流された分ずれることになってしまう。しかし、そんな現象は確認されていない。また、マイケルソンとモーレーは屋外での実験も行っており、「部屋の中のエーテルは部屋と一緒に動いている」という考え方も正しくない。

実験の精度が悪かったのでは？ 実験というのは、「これを判定するためにはこれだけの精度が必要である。ゆえにこのように実験装置を組み立てる」という計画を持って行うものである。マイケルソンらも、上に書いたような「光の干渉縞はどれだけ移動するはず」という予想をもって、誤差の精度がその予想より小さくなるように注意して実験を行っている。正しい実験家は、精度が確保できないような実験は最初から行わないのである。だから「古い実験だから精度が悪い」などということはない。また、この実験自体は現在でも（光にレーザーを用いるなど、さまざまな改良をしたうえで）行われているので、「古い実験だから」などという反論は、そもそも成立しない。

4.2 古い意味のローレンツ短縮

マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出されなかったことは、物理学者たちに衝撃と困惑を与えた。ローレンツは $t_{東西}$ と $t_{南北}$ が $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍違うことから、「東西方向の棒の長さは $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍に縮んでいる」という説を唱えた。これが**古い意味での「ローレンツ短縮」**である。フィッツジェラルドも同じようなことを考えていたので「ローレンツ・フィッツジェラルド短縮」と呼ぶこともある。

ローレンツは、この短縮は観測できないと述べている。なぜなら、この短縮を観測しようとして物差しをあてると、その物差しも一緒に縮んでしまう。また、目で見ようとしても、見ようとする目自体も横に短縮している。よって地上で、同じ速さで走っている我々がローレンツ短縮を測定することはできないのである。地球の外から見れば見えるだろうが、その短縮の割合は $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ であり、$\frac{v}{c}$ が 10^{-4} 程度だから、縮む割合は 10^{-8} 程度となる。そもそも、この精度で長さを測定すること自体が難しいだろう。

本によっては、「ローレンツ短縮」を相対論の帰結である、と説明しているが、ローレンツはあくまで実験を説明するために ad hoc[2] にこの短縮を導入したのであって、相対論の帰結として理論的に導き出したわけではない。

もう一つ注意しておく。このローレンツ短縮という考え方では、マイケルソン・モーレーの実験について説明することは可能だが、そのほかの実験を説明するにはこれでは足りない。「ローレンツ変換」はその一部として「ローレンツ短縮」と同様の現象を含んでいるが、より広い意味がある。

「ローレンツ短縮」も「ローレンツ変換」も、アインシュタインではなくローレンツの名前がついている。どちらもアインシュタインより前にローレンツが提出しているからである。しかしローレンツは（同様にこのあたりの研究をしていたポアンカレもそうなのだが）「ローレンツ短縮」を、例えば「エーテルの圧力によって物体が縮む」というような、力学的な意味での短縮だと考えていた。「ローレンツ変換」に関しても「こう考えればうまくいく」という提案であって、その意義を理解してはいない。後で出てくるアインシュタインによる考え方とはその点が違うので注意すること。

[2]「その場しのぎ」という意味の言葉。科学でなにかの現象を説明するために急ごしらえで作った説などを「ad hoc 仮説」などと言う。

[問い 4-1] マイケルソン・モーレーの実験で、二つの腕の長さを変えたとしよう（東西は L、南北は L'）。この時はエーテル風が吹いていない状態でも時間差がある。エーテル理論の立場に立ち（つまりガリレイ変換を用いて、光速は変化するという立場にたって）エーテル風が吹いていない場合の時間差と、エーテル風が吹いている場合の時間差を計算し、ローレンツ短縮が起こったとしても、この二つが違う値を持つことを確認せよ。

（註：このような実験は 1932 年にケネディとソーンダイクによって行われている。「エーテル風の分だけ光速が変化しているがローレンツ短縮が起こっているのでマイケルソン・モーレーの実験ではそれがわからない」という仮説が正しいなら、この時間差は測定できるはずであるが、できなかった。ということは、ローレンツ短縮だけでは実験結果を説明することはできないのである。この実験も含めてちゃんと説明できるのは次で説明するローレンツ変換である。）

[問い 4-2] ローレンツ短縮という現象が起きているとすると、確かに二つの光はエーテル風が吹いていても吹いていなくても、同時に到着する。しかし、この立場で考えると、ある二つの事象が、エーテル風がない時には同時であるのに、吹いている時には同時に起こらない。それは何か???

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

4.3 現代における光速度不変

マイケルソン・モーレーの実験は 100 年以上前の実験であり、当時の実験技術の粋をこらして実行されたものとはいえ、現代の技術でならばもっと精密な実験が可能である。もちろんそのような実験も行われており、マイケルソンとモーレーの実験に比べると精度は 10 万倍に上がっている[3]。もちろん、光速度不変の原理を疑うに足る証拠はまったくない。

しかも、現代ではもっとシンプルな方法で光の速さを測定できる。「A 地点で光を発射して B 地点で受ける。A 地点と B 地点の距離をかかった時間で割る」という方法である。マイケルソン・モーレーの実験ではエーテル風の影響は $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ のオーダーであったが、このような直接測定を行えば $\frac{v}{c}$ のオーダーで影響が出る。一方、現在の原子時計が 10^{-7} 秒ぐらいの精度で時間を測ることができる。

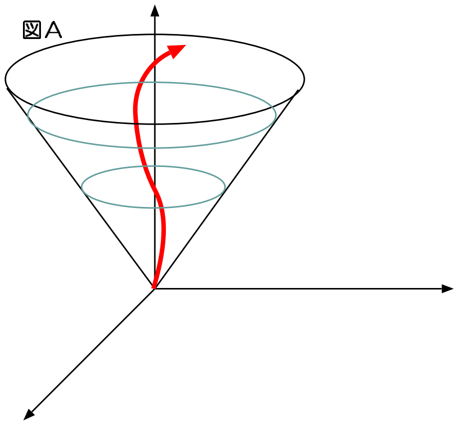
逆に、「光がこれだけの遅れで伝わってきたから A 地点と B 地点の距離はこれこれである」という原理で現在位置を測定する機械がある。カーナビなどで使われている GPS(Global Positioning System) である。GPS は複数の人工衛星からの電波を受信して、その電波が発信源からどれくらい遅れて到着したかということを計算して自分の位置を測る。衛星 A からの電波が衛星 B よりの電波に比べてより遅れているのなら、自分は衛星 B の近くにいると判断する、という具合いである。このような機械がうまく動作するためには「光速が一定である」という大前提がなくてはならない。衛星は頭上 2 万キロぐらいの高さを回っている。カーナビの精度は数メートルぐらいであるから、10^{-7} の精度で距離が測定できていることになる（誤差の原因は、電波が大気中を通る時の速度変化と、軍事利用されないためにわざと混入されている誤差)。エーテルの風が吹くという考え方がもしも正しいならば、GPS の衛星から来る電波の速度が季節によって 10^{-4} ぐらい変化してしまうことになるので、10^{-7} の精度で距離を測ることなど、とてもできない。つまり、現在我々の生活に直接関係する部分でも、エーテルが存在しないことを前提とした機械が使われており、しかも何の問題もなく動作しているということになる。すくなくとも現在の実験のレベルにおいて、光速度不変を疑うことはもはやできない。もちろん今後実験精度がさらにあがった時に何か変なことが発見される可能性は零ではないが、それを言い出せば、もともと物理における全ての法則は実験精度の範囲内でしか保証されていないのは当然のことである。

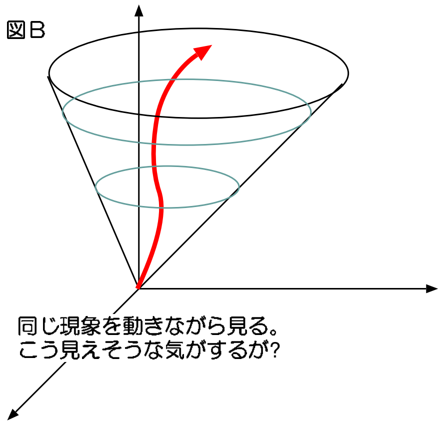
【補足終わり】

[3] むしろ、マイケルソン・モーレーの実験器具は干渉を用いて精密に距離を測定する方法として使われることも多い。光速が一定であることを逆手にとって利用して、距離をはかる手段に使うのである。重力波の観測機器にも使われている。

4.4　光の伝搬とガリレイ変換

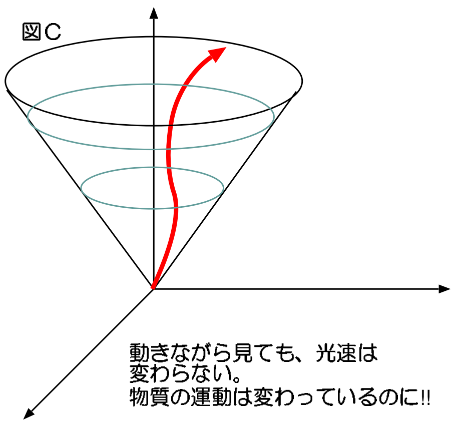
次の章でいよいよローレンツ変換を導いていくが、その前に、ガリレイ変換の考え方では「光は誰が見ても同じ速度である」という事実を説明できそうにない、ということを確認しておこう。





光が一点からまわりに広がっていく、という現象は左側の図のように記述することができる。例によって z 座標を省略している。これは円錐のように見えるので、光円錐（light-cone）と呼ばれる。光円錐の中に書かれている太線矢印はある粒子の軌跡を表している。

この現象を、左に走りながらみたらどうなるだろう。ナイーブに考えると[4]、右側の図のようになると思われる。



しかし、光の速度は動きながらみても変わらないということが実験事実なので、光円錐の形は変化しないことになる。しかし、物体の運動に関しては変化している（これも実験事実！）。

ちなみに、光の速度は変化しないが、その様子 (波長だとか振動数だとか) はいろいろと変わっている。どのように変化するのかについては今後の講義で話そう。とにかくここまでで感じて欲しいことは、「図Ａを動きながら見たら図Ｂではなく図Ｃになるとしたら、図Ａと図Ｃはどのような関係になっているのか」ということである。

「動きながら見るということは時々刻々位置が変化していく、ということだから、超平面の位置がこの図で見て水平方向にずれていくはずだ」という考え方（ガリレイ変換はまさにこういう変換なのである）をすると、どうしても結果は図Ｂになってしまう。図Ａが図Ｃに変化するためには、この図の水平方向の動きだけではだめである。かならず「超平面を傾ける」というような操作が必要になる。実際にどんな操作なのかは以後の講義を聞いてのお楽しみであるが、このような操作がすなわち「４次元的に考える」ということなのである。

4.5　光速度不変から導かれること—同時の相対性

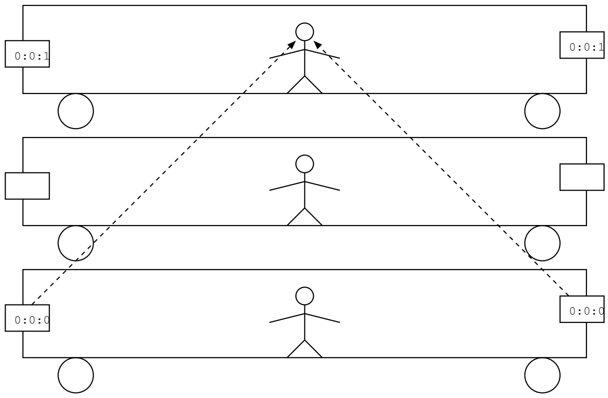
ここまでで、マックスウェル方程式がガリレイ変換で不変でないということを述べた。この解釈として、マックスウェル方程式は特定の座標系でしか成立しない方程式であると考えることもできるし、ガリレイ変換が正しくないと考えることもできる。しかし前者は実験により否定されてしまったので、後者を考える必要がある。マイケルソン・モーレーおよびそのほかの実験の結果として「光速はどのように動きながら測っても c である」という事実がある。つまり、マックスウェル方程式は全ての慣性系で成立していると考えるべきなのである。だから、それにあうように理論を作らなくてはいけない。よってガリレイ変換の方を修正する必要が出てくるのである。

---

[4]「ナイーブ (naive)」という言葉は日本語だと良い意味にとられるが、英語では「だまされやすいばか」という意味にとられることが多い。特に物理で「ナイーブに考えると」という言葉は「間抜けが考えると」に近い。

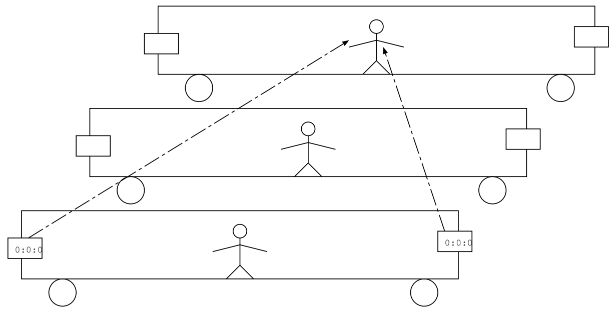
アインシュタインは「物理法則は全ての慣性系で同じである」という要請を**特殊相対性原理**と呼んだ。この物理法則の中にマックスウェル方程式も入っているとすれば、これは光速度不変の原理を含んだ原理である。そしてこの原理が成立するためには、ガリレイ変換ではない座標変換を作らなくてはいけない。

まず図的表現（グラフ）から「光速度不変から何が導かれるか」を示そう。

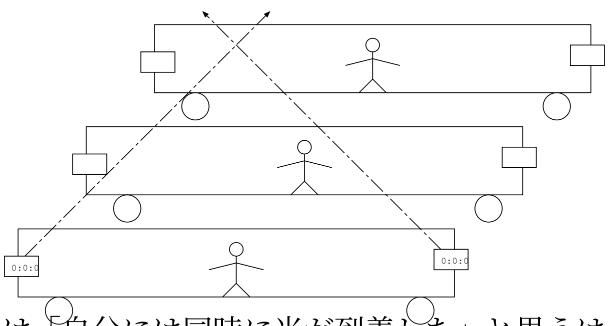


長さ $2L$ の電車を考える。ただし、今はこの電車は動いていない。中央に人間が立っている。前方の端（人間からの距離 L）と後方の端（人間からの距離は L で同じ）に電光掲示板式の時計があるとする。今、ある時刻（図では０時０分０秒とした）を示す時計の光は、時間 $\dfrac{L}{c}$ 後（図では１秒後として書いた）に中央の人間に到達する。つまりこの瞬間（図では０時０分１秒である）、中央の人はどっちの時計を見ても０時０分０秒という目盛を読めることになる。

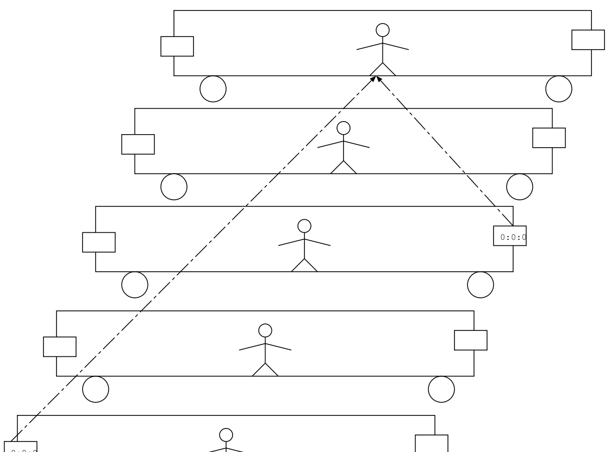
電車の前方から後方へ向かう方向へと移動している観測者がこの現象を観測したとする。この観測者から見ると、電車は前方に向けて運動しているように見える。



ガリレイ変換的な考え方（つまりは我々の直観に訴える考え方）からすると、前方から出た光は、観測者の運動と同方向に伝播することになるので、観測者の速度の分遅くなる。同様に後方から出た光は観測者の速度の分速くなる。一方、光が到達するまでの間に電車の中央は前方に移動する。それゆえ、結局は同時刻に出た光が同時刻に中央に到達する、ということになる。この二つの図は、どちらも同じ現象を表しているのである。上の図は止まっている電車を見ている図で、下の図は止まっている電車をわざわざ走りながら見ている図である。

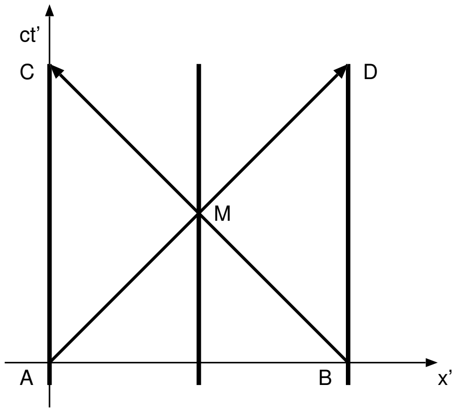


しかし、実験事実はこのような（直観的に正しく思える）考え方を支持しない。実験によれば光速度は一定であるから、「後方から出た光は観測者の速度の分速くなる」などという現象は起きない。では、左図のようになるのだろうか。だが、これもおかしい。なぜなら、この図では光が中央に到着するのは同時ではない。同じ現象を見方（観測者の立場）を変えて見ているだけであるということに注意して欲しい。中央の人は「自分には同時に光が到着した」と思うはずだ。そして、その現象は電車の中の人が見ようが外の人が見ようが変り得ない。



満足のいく解釈は、前方と後方で時間がずれていると考える他はない。つまり、「同時刻」という概念は観測者に依存するのである。したがって、動いている人にとっての時刻 t' が一定になる線（1+1 次元で考えているので線だが、3+1 で考えていれば３次元超平面）は、時刻 t が一定の線に対して「傾く」ということになる。

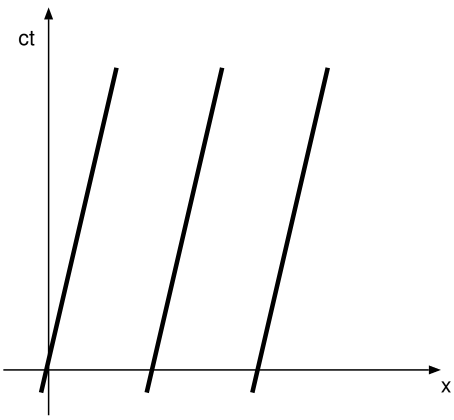
ガリレイ変換の時は、t 軸（$x=$ 一定の線）と t' 軸（$x'=$ 一定の線）は傾いたが、x 軸と x' 軸は同じ方向を向いていた。しかし、相対論的な座標変換においては、t 軸も x 軸も、両方が傾かなくてはいけない。そうでないと、光速度一定を満たすことができない。式で考えると、これは t' の式の中に x, t の両方が入ってくることを意味する。

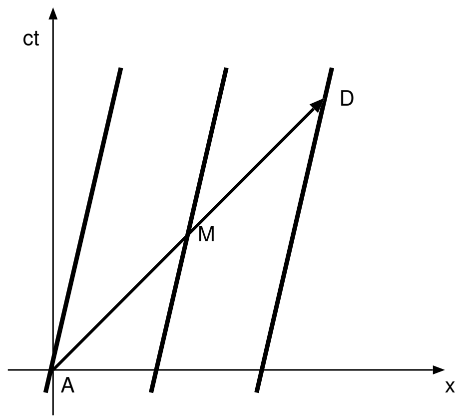


ここでグラフを描きながら、t 軸と x 軸が傾くことを確認しよう。作図を楽にするために、縦軸は t, t' ではなく、これに光速度 c をかけた ct, ct' とする。こうすると、縦軸と横軸は同じ次元になると同時に、光の進む線がグラフの上ではぴったり45度の線になる（光は単位時間に c 進むから）。以後、縦軸は ct 軸または ct' 軸である。

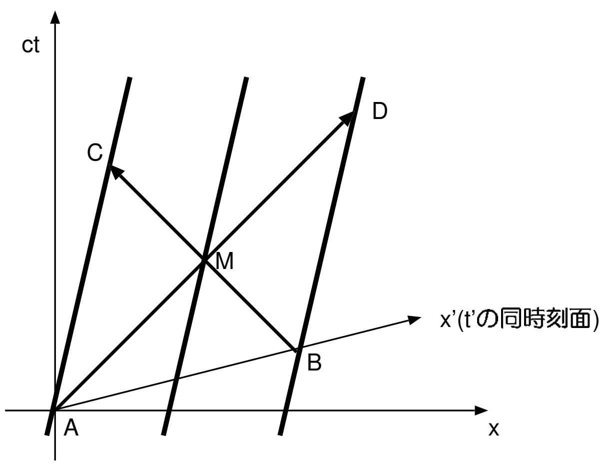
まず、電車が静止している座標系での、電車の先端、中間にいる人間、後端のそれぞれの軌跡を図に書くと、左のようになる。縦の3本の線は左から、電車の後端、人間、先端の軌跡であり、斜めに走る線は光の軌跡である。A点で電車の後端から出た光と、B点で電車の先端から出た光が、M点で人間の目の前ですれ違い、C点とD点に至る様子を表している。

次に、同じ現象を左向きに速さvで走りながら（つまり速度-vで走りながら見る）。電車の先端、真ん中の人間、後端は下左の図のような動きをする。





さて、この図の中にABCDMの各点を書き込んでいこう。まず両方の座標系の原点をAとすることにして、Aを書く（どこかに座標系を固定しなくてはいけないのだから当然だ）。次にA点から光を出す。光はこの座標系では常に45度の方向に進む。そしてそれが人間の軌跡と交わるのがM点。そこを通り抜けて電車の先端の軌跡に達する場所がD点である（上右図参照）。



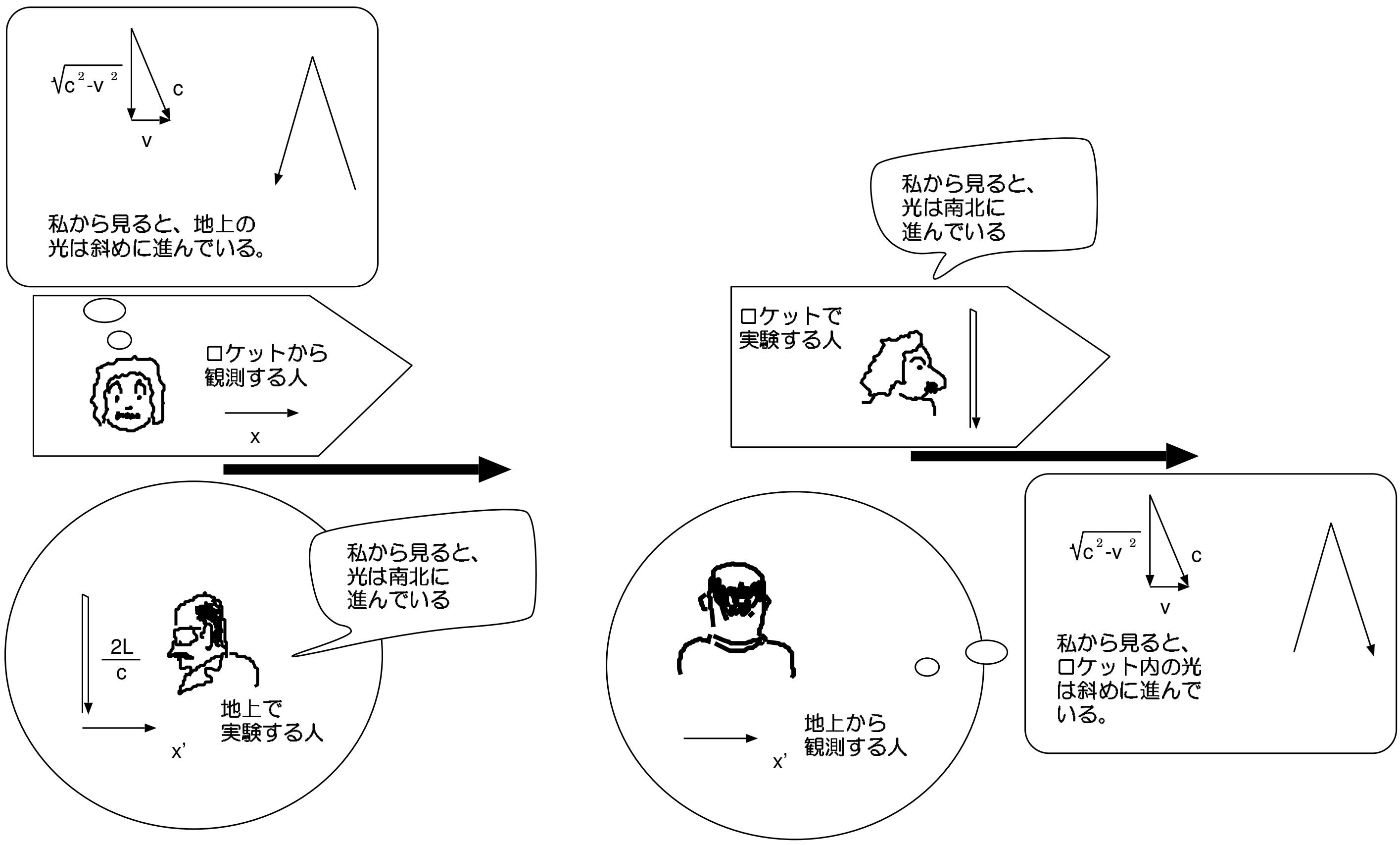
では次に、先端から出た光の軌跡を書いてみよう。ここで大事なのは、この光はM点を通過しなくてはいけないことである。なぜなら、この光が0時0分0秒の時計の文字盤からの光だとするならば、この人はこの（M点で表される）瞬間、前を向いても後ろを向いても、ちょうど時計が0時0分0秒を示さなくてはいけない。つまり「0時0分0秒という文字盤の光」が同時にこの人を通過しなくてはいけないのである。今考えている座標変換というのは、見る人の立場によっ

て物理現象がどう変わってみるかを式で表すものである。「この人がどっちを向いても 0：0：0 が見える」という事実はどちらの座標系で考えても成立しなくては行けない、物理的事実である。よって、M 点から右下と左上に 45 度の傾きの線を伸ばしていく。結果が次の図である。

これから、x'-ct' 座標系（電車が静止している座標系）において「同時」である A 点と B 点は、x-t 座標系（電車が運動している座標系）においては同時でない。

なお、同時の相対性にずいぶんこだわっていろいろ図を書いて説明しているが、それはこの同時の相対性こそが相対論を理解するのにもっとも重要な（そして、それゆえにとっつきにくい）概念だからである。この説明で「わかった」と思えた人は、相対論理解という山の七合目までは来ている。

4.6　光速度不変から導かれること—ウラシマ効果



地上の実験　　　　ロケット内の実験

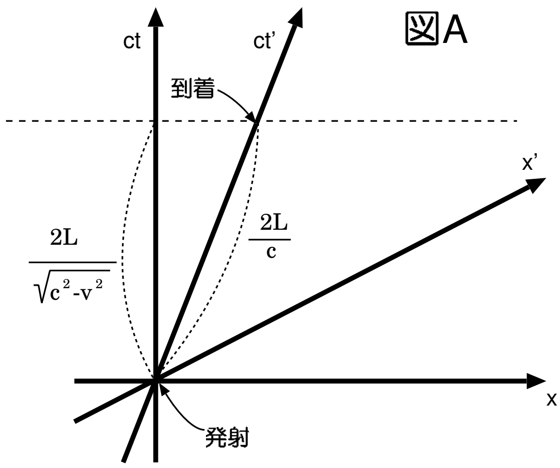
マイケルソンとモーレーの実験における、南北方向の光について思い出す。実験装置が動いていないという立場（地上にいる人の立場）で観測すると、距離 $2L$ を光が進むので、往復に $\frac{2L}{c}$ かかる。一方同じ現象を、装置が速さ v で東に動いているという立場（地球外の人の立場）で観測する。この人にとっては光は南北方向にではなく、少し斜めに（光の速度ベクトル c と地球の速度ベクトル v が図に書いたような関係になるように）進んでいる。この人にとっての光の速度の南北方向成分は $\sqrt{c^2-v^2}$ になる（当然 c より遅い）。

ゆえにこの時に光が発射されてから到着するまでの時間は $\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$ となる (L は南北方向の距離

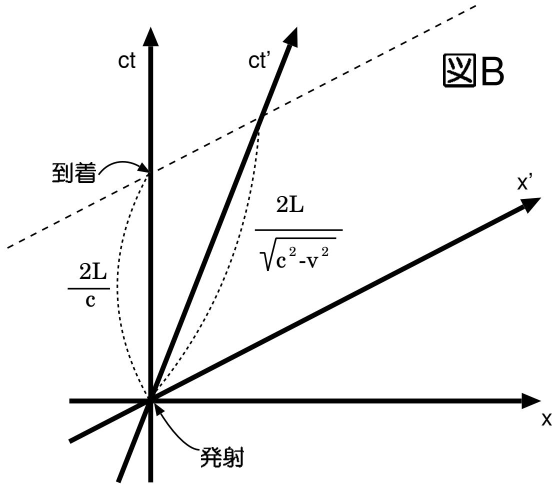
であることに注意せよ)。つまり、地球外の人の方が同じ現象にかかった時間を $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 倍だけ、長く感じることになる。

このように、動いている人（この場合は地球上にいる人）の時間は止まっている人（この場合は宇宙から観測する人）の時間より遅くなることになる。これを浦島太郎の昔話になぞらえて、ウラシマ効果と呼ぶ。

ここで、地上でも宇宙でも相手の方が時間が遅いと感じるなんておかしい、と思うかもしれないが、次のように考えるとおかしなところは何もない。



地上での実験での「発射」と「到着」
光はx'座標系で「同じ場所」に戻る。

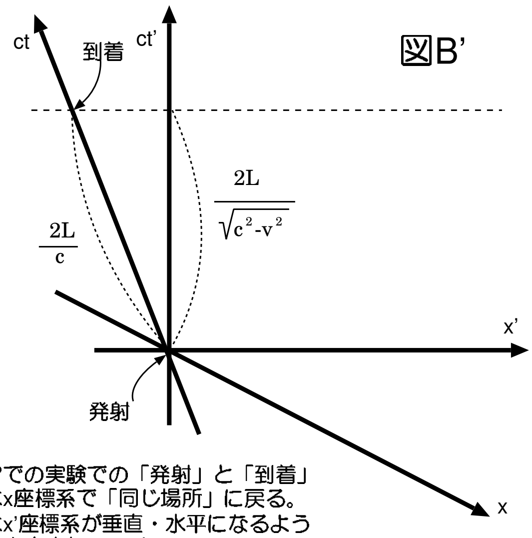


宇宙での実験での「発射」と「到着」
光はx座標系で「同じ場所」に戻る

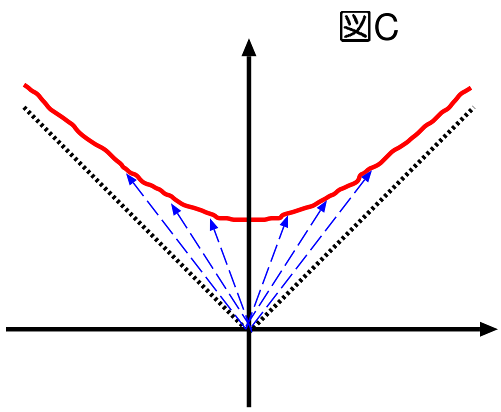
地上で実験する場合、光の発射と到着は図 A に矢印で「発射」と「到着」と示した 2 つの時空点である。この場合、x' 座標系で見て同じ場所に光が戻っている。x 座標系でみれば、同じ場所に光は戻っていないことになる。一方、宇宙で実験する場合（図 B）の「発射」と「到着」は、x 座標系で見て同じ場所に光が戻る (x' 座標系では同じ場所に戻らない)。

どちらで実験する場合も、実験装置と共に動いている方は、$\dfrac{2L}{c}$ という時間を観測する（これは相対性原理からして当然)。もう一方は、その時間を、「自分の時間」を使って測定するのだが、互いの同時刻面は相手に対して傾いている。その傾きがゆえに、双方が「おまえの時間の方が遅い」と判断することになるのである。

図 B' は、図 B を、$x'-t'$ 座標系が垂直になるように書き直したものである。ct 軸に関しては図 B を左右逆転したような図になっている（速度逆向きの座標変換だから)。



宇宙での実験での「発射」と「到着」
光はx座標系で「同じ場所」に戻る。
図はx'座標系が垂直・水平になるように書き直されている。



また、図 C 中の点線は原点からいろんな速度で出発した人の時計が同じ時刻を刻む時空点を線でつないだものである。速く動く人ほど持っている時計は遅く進むので、垂直に対して傾いた軌道をとっている人ほど、止まっている人との時間差が大きくなる。

結局、$x'-t'$ 系での同時が $x-t$ 座標系から見ると傾いていて $x-t$ 座標系での同時と同じではないため、このように「互いに相手の時間を短く感じる」という一見矛盾した結果が出る。

以上、この章では、「光速度が誰から見ても（どんな慣性系から測定しても）同じである」という事実から

1. 物体の長さは見る立場によって違って見える（長さのスケールは絶対ではない）。

2. 見る立場によって二つの事象が同時かどうかは変わってくる（同時性も絶対ではない）。

3. 経過する時間は見る立場によって違って見える（時間のスケールも絶対ではない）。

ということが帰結されることを説明した。

これは日常的な感覚からすると非常識に聞こえる。しかし、我々の「日常的な感覚」は、飛行機に乗ったとしてもせいぜい $3\times10^2\mathrm{m/s}$ つまり光速度の 100 万分の 1 の速度でしか運動しない生活で培われたものであることを忘れてはいけない。

たとえばウラシマ効果の係数 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ は光速度の 100 万分の 1 (10^{-6}) の場合、

$$\sqrt{1-(10^{-6})^2}=0.999999999999499999999999874999999999937499999999995\cdots \tag{4.7}$$

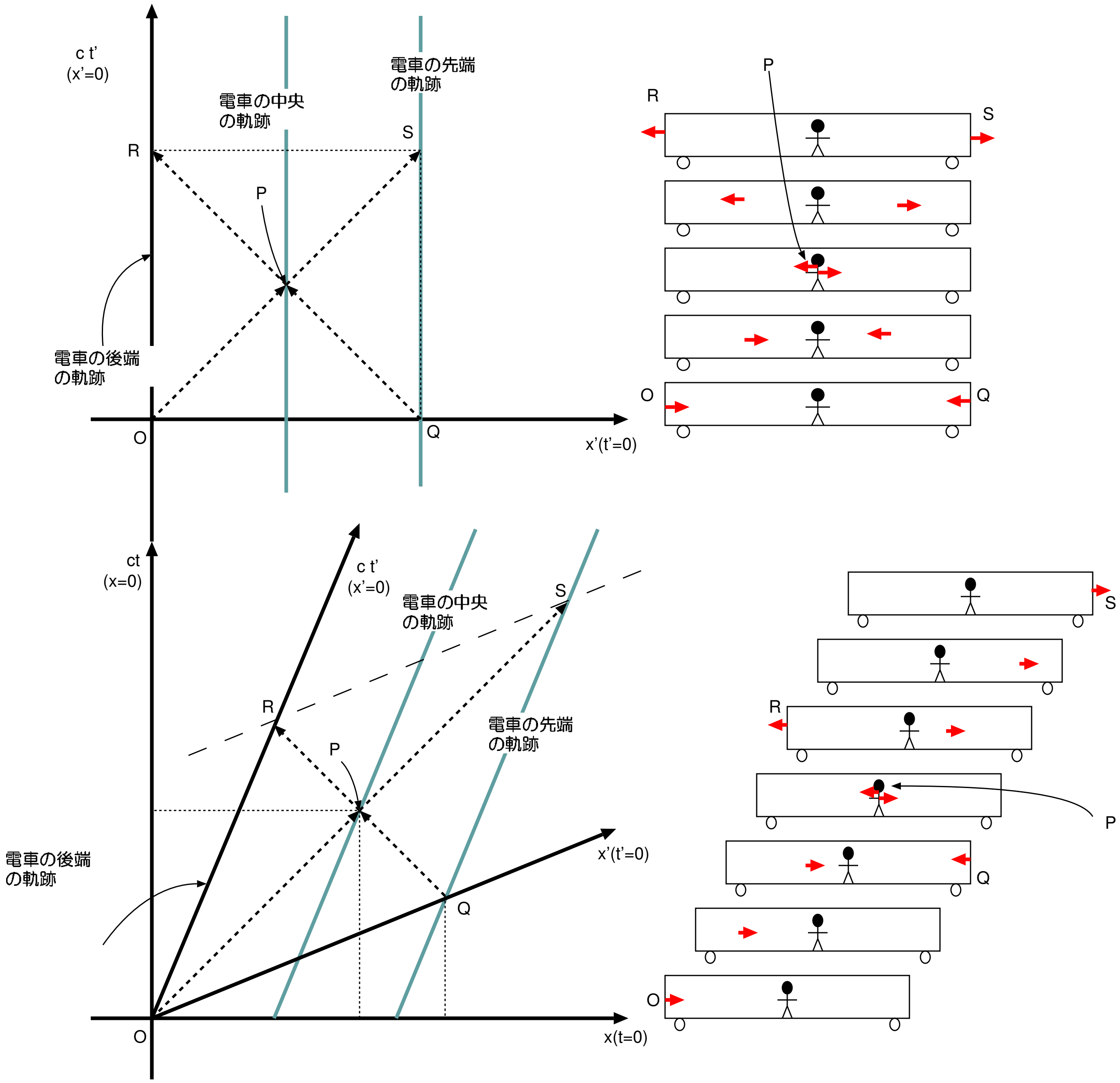
であって、1 よりも 0.5×10^{-12} 程度小さいだけである。この程度の時間差は日常では関知できないから、そんな差が生まれているとはとても思えない。しかし、精密に測定すればもちろん実験で確認できるのである。

次の章では、以上の結果を数式でまとめて、もう一度考察する。

第5章　光速度不変の数式的理解—ローレンツ変換

5.1　$x-ct$ グラフで見るローレンツ変換

前章の電車の問題で、同時刻線が傾くということを確認した。ここで、どれくらい座標系が傾かなくてはいけないかを作図で示してみよう。



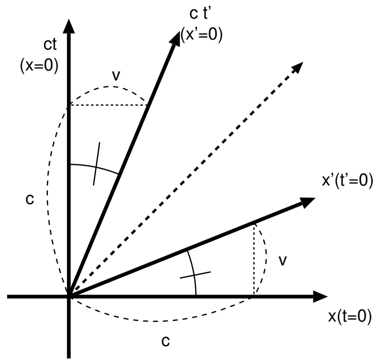
図の (x,t) 座標系は電車が速度 v で動いているように見える座標系で、(x',t') 座標系は電車の静止系である。$x'=0$ の線、すなわち t' 軸が電車の後端の軌跡に重なるようにグラフを書いた。この $x'=0$ の線上では、$x=vt$ が成立する（(x,t) 座標系では電車が速度 v で走っている）ことに注意しよう。

電車の先端と後端から光が出て P に到達したわけだが、先端から光が出たその瞬間の時空点を Q とした。電車の静止系で見ると、先端と後端から光が出た瞬間（Q と O）は同時刻である。ここで、Q→P と来た光がそのまま突き抜けて、後端に達した時空点を R とする。また、O→P と来た光がそのまま突き抜けて、先端に達した時空点を S とする。OR と QS は、どちらも同じ電車の一部の運動を表しているので、平行線である。また、OQ と RS は、どちらも電車にとっての「同時刻」線であり、電車は一様な運動をしているのだから、平行線である。よって OQSR は平行四辺形なのだが、ここで P 点での OS と QR の交わりを考える。この二つの線分はどちらも 45 度の斜め線であるから、直交している。対角線が直交する平行四辺形は菱形である。このことは、このグラフ上における x' 軸と x 軸の角度が、ct' 軸と ct 軸の角度と等しいことを意味する。つまり、この図は $x \leftrightarrow ct$ という取り替え（図で言うと、45 度線を対称軸とした折り返し）で対称である。

ct' 軸状では $x-vt=0$ が成立するのだから、

$$x-\frac{v}{c}(ct)=0 \leftrightarrow ct-\frac{v}{c}x=0 \tag{5.1}$$

という対称変換をほどこすことで、x' 軸の上では $ct-\frac{v}{c}x=0$ が成立していることがわかる。



対称変換がわかりにくい人は、こう考えよう。(x,ct) 座標系で見ると、ct' 軸の傾きは $\frac{c}{v}$ である（つまり、ct' 軸上で x 方向に v 進むと、ct 軸方向に c 進む)。式で書けば、ct' 軸は

$$ct=\frac{c}{v}x \quad \text{書き直せば} \quad x=\frac{v}{c}ct \tag{5.2}$$

なのである。一方、x' 軸と x 軸の傾きは、ct' 軸と ct 軸の傾きと同じ角度であることを考えると、x' 軸は (x,ct) 座標では $\frac{v}{c}$ の傾きを持つ。そう考えると、x' 軸は

$$ct=\frac{v}{c}x \tag{5.3}$$

となる。

$x'=0$ が $x-\frac{v}{c}ct=0$ に対応し、$ct'=0$ が $ct-\frac{v}{c}x=0$ に対応するということから、

$$x' = A\left(x-\frac{v}{c}ct\right) \tag{5.4}$$

$$ct' = B\left(ct-\frac{v}{c}x\right) \tag{5.5}$$

となることがわかる。

さらに、どちらの座標系でも光速が c であるということから $A=B$ であることがわかる。なぜならば、x 座標系で原点から右へ進む光の光線上では、$x=ct$ が成立する。この式が成立する時、x' 座標系では $x'=ct'$ が成立しなくてはおかしい（光速度不変)。(5.4) と (5.5) に、$x=ct$ と $x'=ct'$ を使うと、

$$A\left(ct-\frac{v}{c}ct\right) = B\left(ct-\frac{v}{c}ct\right) \tag{5.6}$$

となる。つまり、$A=B$ でなくてはならない。ここまでの結果は、

$$x' = A\left(x-\frac{v}{c}ct\right) \tag{5.7}$$

$$ct' = A\left(ct-\frac{v}{c}x\right) \tag{5.8}$$

である。相対論以前の '**常識**' に従えば、$A=1$ と言いたいところである（$A=1$ ならば、x' の式に関してはガリレイ変換と一致することになる）。しかし、そうはいかない。この A の値を決めるにはいろいろな方法がある。

ローレンツ短縮から (x,t) 座標系で測定した長さが、(x',t') 系で測定したものの $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍になるようにする。

たとえば、$x'=0$ の線（電車の後端）と $x'=L$ の線（電車の先端）を考える。(x',t') 座標系ではこの間の距離は L である。(x,t) 座標系ではどうなるかを考えよう。$x'=0$ の線は $x=vt$ であった。$x'=L$ の線はというと、

$$A(x-vt)=L \quad \text{すなわち、} \quad x=\frac{L}{A}+vt \tag{5.9}$$

である。(x,t) 座標系で電車の長さを測ると、

$$(\text{先端の位置})-(\text{後端の位置})=\frac{L}{A}+vt-vt=\frac{L}{A} \tag{5.10}$$

である。電車がローレンツ短縮すべきだと考えると、$\frac{1}{A}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$、つまり、

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.11}$$

となるのであった。

ウラシマ効果から (x,t) 座標系で測定した時間が、(x',t') 系で測定したものの $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍になるようにする。

たとえば、$t'=0$ という時刻と、$t'=T$ という時刻を考える。(x',t') 座標系ではこの間の時間は T である。(x,t) 座標系ではどうなるかを考えよう。$t'=0$ の線は $t=\frac{v}{c^2}x$ であった。$t'=T$ の線はというと、

$$A\left(t-\frac{}{c^2}x\right)=T \quad \text{すなわち、} \quad x=\frac{T}{A}+\frac{v}{c^2}t \tag{5.12}$$

である。よって (x,t) 座標系での時間差は

$$\frac{T}{A}+\frac{v}{c^2}x-\frac{v}{c^2}x=\frac{T}{A} \tag{5.13}$$

である。ウラシマ効果を考えると $\frac{T}{A}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ なので、

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.14}$$

となるのであった。

速度 $-v$ の変換が逆変換となること もう一つの方法は、「速度 v のローレンツ変換をした後、速度 $-v$ のローレンツ変換をしたら、元に戻るはず」ということ、そして「速度 v のローレンツ変換と、速度 $-v$ のローレンツ変換で、A の値は同じはず」ということを使う。なぜ A が同じになるべきかというと、速度が v であるか $-v$ であるかというのは座標系の正の方向をどちらにとうか

という「人間の都合」で来まったものである。一方、A の値は（上二つからもわかるように）二つの座標系のスケールの伸び縮みを表す値なので、どちらに動いても同じであるべきである（ある方向へ動いた時のスケールの伸びが、それと逆方向では違うとすると、宇宙には特定の方向があることになってしまう）。

すると、逆変換は（$v \to -v$ と置き換えて）

$$x = A\left(x' + \frac{v}{c}ct'\right), \quad ct = A\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right) \tag{5.15}$$

ということなので、これに変換式を代入すると、

$$x = A\left(A(x - vt) + \frac{v}{c}A\left(ct - \frac{v}{c}x\right)\right) = A\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \tag{5.16}$$

となって（ct に関する式も同様）、$A = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ となる。

以上から、ローレンツ変換とは、

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}t\right) \tag{5.17}$$

という座標変換であることがわかる。なお、よく出てくる因子 $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ を γ と書き、$\dfrac{v}{c} = \beta$ と書くことが多い。この文字を使うと、ローレンツ変換は

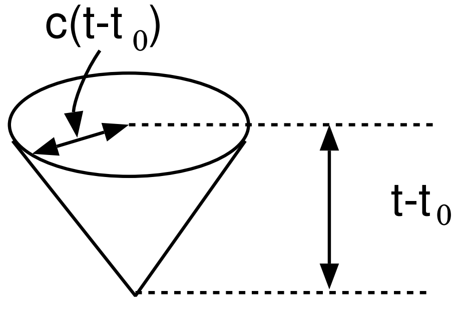
$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{5.18}$$

という形にまとまる。

5.2　ローレンツ変換の数式による導出

次に、ローレンツ変換を計算のみにより求めよう。ローレンツ変換が満たすべき条件として、次の３つを取る (この条件は、前節でも利用している)。

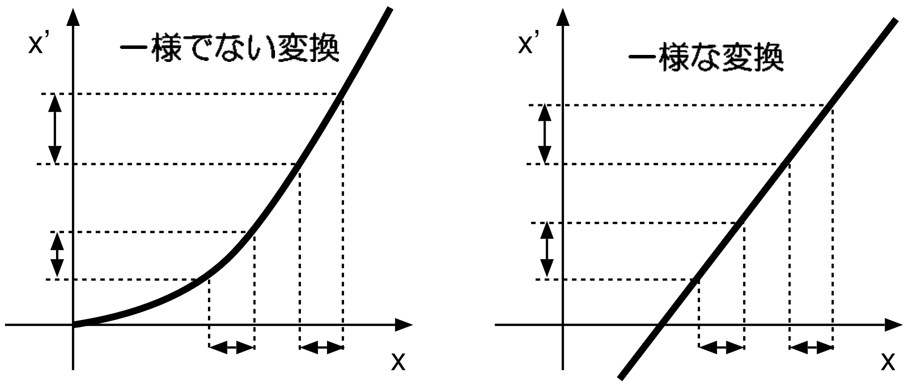
1. 古い座標系での光円錐 ($(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0$) は新しい座標系でも光円錐 ($(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = 0$) へと移る (光速度不変の原理)。
2. この座標変換において特別な点はない (一様性)。
3. この座標変換において特別な方向はない (等方性)。



1. が主張しているのは、光速度不変の原理を満足せよ、ということである。ある時空点 (t_0, x_0, y_0, z_0)（x' 座標系では (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0)）から光が出て、時空点 (t, x, y, z)（x' 座標系では (t', x', y', z')）にたどりついたとする。時刻 t（あるいは時刻 t'）には、その光は $c(t - t_0)$（あるいは $c(t' - t'_0)$）広がっている。ゆえに $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0$ が成立するならば、$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = 0$ も成立せねばならない。光速度はどっちの座標系でも c だからである。くどいよう

だがもう一度書く。**これは実験事実である**。また、ここで光速度一定という現象に着目してはいるが、これは光を特別視しているわけではなく、マックスウェル方程式が生み出す物理現象の代表として光を使っているということに注意して欲しい。「光速度一定」は「どの座標系でも成立すべき物理法則」の代表なのである[1]。

2. が主張しているのは、この変換が一様であれ、ということである。



たとえば $x' = ax^2$ のような変換をしたとすると、$x=0$ 付近と、そこから遠い場所では、x が変化した時の x' の変化量が違う。これはつまり、x 座標系で測った 1 メートルが、x' 座標系では場所によって 10 センチになったり 3 メートルになったりと、違う長さになるということである。しかし今考えているのは座標系の一様な運動であるから、こんなことは起こらないだろう (ある座標系での 1 メートルが別の座標系では等しく 50 センチになることはあり得るとしても！)。この条件を満たすためには、(x,y,z,ct) と (x',y',z',ct') が一次変換で結ばれなくてはならない。

3. が主張しているのは、たとえばこういうことである。x 軸の正方向へ速さ v で運動している場合と、x 軸の負方向へ速さ v で運動している場合を比べたとする。この二つは、最初に x 軸をどの方向にとったかというだけの違いであって、物理の本質的な部分は違わないはずである。

また、x 座標方向へ移動する座標変換と、y 方向へ移動する座標変換も、最初に x 軸をどの向きにとったかというだけの違いであって、本質的違いはないはずである。

つまり、ある方向へ移動する座標系だけが特別扱いされるようなことはあってはならない。

以下で、これらの要請だけからガリレイ変換に替わる新しい座標変換を導く。

x' 系の空間的原点 $x'=y'=z'=0$ が、x 座標系で見ると速度 v で x 軸方向に移動していて、時刻 $t=0$ では原点が一致しているとする。このことから、$x'=0$ という式を解くと、$x=\beta ct$ という答えが出るようになっていることがわかる。この条件はガリレイ変換 $x'=x-vt$ でも成立する。2. の条件があるので、

$$x' = A(x-\beta ct) \tag{5.19}$$

という形でなくてはならないことがわかる。y 方向、z 方向には座標軸は移動していない。つまりこの座標変換で、$y=0$ である場所は $y'=0$ である場所に移る。z に関しても同様なので、

$$y' = By, \quad z' = Bz \tag{5.20}$$

となるべきだろう。ここで、簡単のために y 軸や z 軸の方向も変わらないとした。この二つの式の係数がどちらも B なのは、空間の対称性 (y 軸と z 軸を取り替えても物理は変わらない) から判断した。

しかし、要請 3. から、B は 1 でなくてはならないことがわかる。B が 1 でなかったとすると、この座標変換によって y 軸や z 軸方向の長さが伸びたり（$B>1$ の場合)、縮んだり（$B<1$ の場合）することになる。運動方向を反転 ($v\to -v$) したとしよう。この時の変換は元の変換の逆変換であろうから、$y''=\dfrac{y}{B}, \quad z''=\dfrac{z}{B}$ という形になる。つまり $+x$ 方向では B 倍になったとしたら、$-x$ 方向では $\dfrac{1}{B}$ 倍でなくてはならない。$B\neq 1$ だと、この現象は要請 3. に反する。

[1] こうやって作ったローレンツ変換がマックスウェル方程式を不変に保つかどうかはちゃんとチェックする必要がある。答を先に書いておくと、電場や磁場のローレンツ変換をちゃんと定義すれば不変になっている。

時間座標に関しては、

$$ct' = C(ct - Dx) \tag{5.21}$$

と置ける。ここに y, z が入らないのは、この変換は y や z の正の方向がどちらかによらない形になるべきだからである。

以上の座標変換に対して、要請 1. すなわち「$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ の時に $(x')^2+(y')^2+(z')^2-c^2(t')^2=0$ になれ」(簡単のため x_0 など、下付添字 $_0$ の着く量はすべて 0 であるとした)という条件が成立するためには A, C, D, E, F がどうならなくてはいけないかを考える。そのためにまず $(x')^2+(y')^2+(z')^2-(ct')^2$ を計算しよう。

$$\begin{aligned}(x')^2+(y')^2+(z')^2-(ct')^2 =& \; A^2(x-\beta ct)^2+y^2+z^2-C^2(ct-Dx)^2 \\ =& \; (A^2-C^2D^2)x^2+y^2+z^2+(A^2\beta^2-C^2)(ct)^2+2(-A^2\beta+C^2D)xct\end{aligned} \tag{5.22}$$

ここで、条件 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ であることを思い起こす。よってここでは x, y, z が独立な変数であって、ct は $ct=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるとして扱う。すると最終的な式は x^2 を含む項、y^2 を含む項、z^2 を含む項と、xct すなわち $x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を含む項になるだろう。x, y, z は各々独立に動かせるから、各々の係数は零でないと困る。まず、xct または $x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の係数に着目すると、$A^2\beta=C^2D$ がわかる。そこで $D=\dfrac{A^2\beta}{C^2}$ と代入して上の式をまとめ直すと、

$$\begin{aligned}0 =& \; (A^2-\frac{A^4\beta^2}{C^2})x^2+y^2+z^2+(A^2\beta^2-C^2)(ct)^2 \\ 0 =& \; (A^2-\frac{A^4\beta^2}{C^2})x^2+y^2+z^2+(A^2\beta^2-C^2)(x^2+y^2+z^2) \\ 0 =& \; \left(A^2-\frac{A^4\beta^2}{C^2}+A^2\beta^2-C^2\right)x^2+\left(1+A^2\beta^2-C^2\right)y^2+\left(1+A^2\beta^2-C^2\right)z^2\end{aligned} \tag{5.23}$$

ここで x^2 の係数は 0 にならなくてはいけないが、

$$\begin{aligned}A^2-A^4\beta^2C^2+A^2\beta^2-C^2 =& \; 0 \\ A^2-C^2-\frac{A^2\beta^2}{C^2}(A^2-C^2) =& \; 0 \\ (A^2-C^2)\left(1-\frac{A^2\beta^2}{C^2}\right) =& \; 0\end{aligned} \tag{5.24}$$

となるから、$A^2=C^2$ か、$\dfrac{A^2\beta^2}{C^2}=1$ かが成立せねばならない。しかし $\dfrac{A^2\beta^2}{C^2}=1$ だと、y^2 の前の係数が 1 になってしまい、けっして 0 にならない。そこで、$C^2=A^2$ ということになる。これをもう一度上の式に代入すると、x^2 の項は消え、y^2 と z^2 の項の係数は $1+C^2\beta^2-C^2$ となるので、

$$1 = C^2\left(1-\beta^2\right) \tag{5.25}$$

という式が成立する。C は正の数であると考えられる[2]ので、$C=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ となる。座標変換は

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-\beta ct), y'=y, z'=z, ct'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct-\beta x) \tag{5.26}$$

とまとめられる。当然ながら、図から求めたものと一致する。あらためて指摘しておくと、係数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ は、x や t のスケールの変化(ローレンツ短縮やウラシマ効果)を表している。また、ct'

[2] $C<0$ だと、t' が増加した時に t が減少する(時間の流れが逆転 !?)ことになる。

の式に $ct-\beta x$ が現れることは、t の同時刻と t' の同時刻が場所によって変化すること ($t=$ 一定 と $t'=$ 一定 がグラフ上で平行線ではない) を示しているのである。

なお、ここまでの計算では簡単のために運動方向を x 方向に限ったし、y,z 座標に関しても同じ方向を向いているとした。一般的には運動方向が任意の方向を向いたものや、これに座標軸の回転が組み合わさったものが出てくる可能性がある。

5.3 行列およびテンソル式で書くローレンツ変換

座標変換を

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0{}_0 & \alpha^0{}_1 & \alpha^0{}_2 & \alpha^0{}_3 \\ \alpha^1{}_0 & \alpha^1{}_1 & \alpha^1{}_2 & \alpha^1{}_3 \\ \alpha^2{}_0 & \alpha^2{}_1 & \alpha^2{}_2 & \alpha^2{}_3 \\ \alpha^3{}_0 & \alpha^3{}_1 & \alpha^3{}_2 & \alpha^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

と書いて、$\alpha^\mu{}_\nu(\mu,\nu$ は 0,1,2,3 を取る$)$ の満たすべき条件を考えていこう。

短く書くならば、

$$(x')^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5.28}$$

である（アインシュタインの規約をつかった)。このように足し上げられている（つまりほんとうは $\sum\limits_\mu$ があるのに省略されている）添字は「つぶされている添字」と言ったり「ダミーの添字」と呼んだりする。

なぜ「ダミー」などと、一人前の添字扱いしてもらえないかというと、これは $A_0B^0+A_1B^1+A_2B^2+A_3B^3$ と書くのが面倒なので $A_\mu B^\mu$ と書いているだけであって、μ という添字はあってなきがごときものだからである。またこれを「つぶれている」と表現するにも理由があるが、それは後で述べる。

前章で求めた座標変換の場合、

$$\begin{pmatrix} \alpha^0{}_0 & \alpha^0{}_1 & \alpha^0{}_2 & \alpha^0{}_3 \\ \alpha^1{}_0 & \alpha^1{}_1 & \alpha^1{}_2 & \alpha^1{}_3 \\ \alpha^2{}_0 & \alpha^2{}_1 & \alpha^2{}_2 & \alpha^2{}_3 \\ \alpha^3{}_0 & \alpha^3{}_1 & \alpha^3{}_2 & \alpha^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

である。例によって、$\beta=\dfrac{v}{c},\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ という記号を使った。

要請 1. の条件は

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0 \text{ の時、}\quad \eta_{\mu\nu}(x')^\mu(x')^\nu = \eta_{\mu\nu}\alpha^\mu{}_{\mu'}x^{\mu'}\alpha^\nu{}_{\nu'}x^{\nu'} = 0 \tag{5.30}$$

と書くことができる。ただし、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

である。

ここで具体的な例について $\eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}{}_\mu\alpha^{\nu'}{}_\mu$ を計算してみよう。そのため、これを行列の計算に書き直す。２行２列の行列の計算が

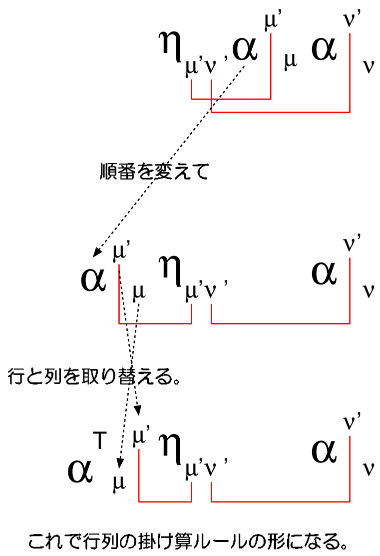
$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^1{}_1 & B^1{}_2 \\ B^2{}_1 & B^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_1B^1{}_1+A^1{}_2B^2{}_1 & A^1{}_1B^1{}_2+A^1{}_2B^2{}_2 \\ A^2{}_1B^1{}_1+A^2{}_2B^2{}_1 & A^2{}_1B^1{}_2+A^2{}_2B^2{}_2 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

で表されることと、掛け算の結果を行列 $\begin{pmatrix} C^1{}_1 & C^1{}_2 \\ C^2{}_1 & C^2{}_2 \end{pmatrix}$ で表すならば、この式は

$$C^i{}_j = A^i{}_1 B^1{}_j + A^i{}_2 B^2{}_j = \underbrace{A^i{}_k B^k{}_j}_{\text{ダミーの添字}}$$

のように書けることを使う。つまり「前の行列の後ろの添字（列の添字）と、後ろの行列の前の添字（行の添字）が同じもの同志を掛け算し、その和を取る」というのが行列の掛け算のルールである。説明は２行２列の行列で行ったが、これらの計算ルール自体は、４行４列の行列であっても同様に使える。

ここで、$\eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}{}_{\mu}\alpha^{\nu'}{}_{\mu}$ の計算をする。掛け算のルールに合うようにするためには、1 番左側にある α の行列が転置されていること、掛け算の順番が α^T, η, α の順であることに注意せよ。具体的に求めた (5.29) をこの式に代入してみると、



$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

となる。つまりこの場合、$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$ という条件は必要でなく、一般的に

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}{}_{\mu}\alpha^{\nu'}{}_{\nu} \tag{5.34}$$

が成立していることがわかる。なお、x, y 面内における回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

であるが、これを $\alpha^\mu{}_\nu$ としても (5.34) が成立することは３次元部分に関しては $\eta_{\mu\nu}$ は単位行列であることを考えれば自明だろう。具体的な計算式を書いておくと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

である (最初の行列は α^T なので転置されていることに注意)。

他の一般の軸に関する回転や反転に関しても同様である。

(5.34) が成立する $\alpha^\mu{}_\nu$ で表される座標変換を広い意味でのローレンツ変換と呼ぶ。広い意味でのローレンツ変換には狭い意味でのローレンツ変換の他に、回転や反転、さらにその組み合わせが含まれる[3]。

この性質からローレンツ変換を複数個組み合わせた変換もやはりローレンツ変換であることがわかる。すなわち、二つのローレンツ変換が行列 $\alpha^\mu{}_\nu$ と $(\alpha')^\mu{}_\nu$ で表されているとすると、この二つの合成変換である $\alpha^\mu{}_\nu(\alpha')^\nu{}_\rho$ もローレンツ変換である。それは具体的に計算すれば

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu{}_\rho(\alpha')^\rho{}_\alpha\alpha^\nu{}_\lambda(\alpha')^\lambda{}_\beta = \eta_{\rho\lambda}(\alpha')^\rho{}_\alpha(\alpha')^\lambda{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{5.37}$$

となることで証明できる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

5.4 一般的方向へのローレンツ変換

ここで、x 座標系から見ると x' 座標系の原点が３次元速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を持つような座標変換がどのようなものかを求めておこう。このような座標変換は、

1. ３次元速度 (v_x, v_y, v_z) が $(v, 0, 0)$（ただし、$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$）に見えるような座標 X への回転。
2. X 座標から見て、原点が速さ v で x 方向へ移動しているような座標系 X' へのローレンツ変換。
3. X' から、３次元速度 $(v, 0, 0)$ が (v_x, v_y, v_z) に見えるような座標 x' への（逆）回転。

という３つの変換の積で考えることができる。

この変換の一つの求め方は、行列を使うことである。X 座標系での X, Y, Z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$ として、$\vec{e}_X$ の y 成分を $(\vec{e}_X)_y$ のように表すとすれば、最初の回転は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\vec{e}_X)_x & (\vec{e}_X)_y & (\vec{e}_X)_z \\ 0 & (\vec{e}_Y)_x & (\vec{e}_Y)_y & (\vec{e}_Y)_z \\ 0 & (\vec{e}_Z)_x & (\vec{e}_Z)_y & (\vec{e}_Z)_z \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

と表せる。逆回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\vec{e}_X)_x & (\vec{e}_Y)_x & (\vec{e}_Z)_x \\ 0 & (\vec{e}_X)_y & (\vec{e}_Y)_y & (\vec{e}_Z)_y \\ 0 & (\vec{e}_X)_z & (\vec{e}_Y)_z & (\vec{e}_Z)_z \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

である。これらの行列の積を作って、ローレンツ変換を求めることができるだろう。

以下ではもう少し楽な方法で考えることにする。$X = \vec{e}_X \cdot \vec{x}, Y = \vec{e}_Y \cdot \vec{x}, Z = \vec{e}_Z \cdot \vec{x}$ であって、

$$X' = \gamma(X - \beta ct), \quad cT' = \gamma(cT - \beta X), \quad Y' = Y, \quad Z' = Z \tag{5.40}$$

である。よって $x \to x'$ の座標変換は

$$\vec{e}_X \cdot \vec{x}' = \gamma\left(\vec{e}_X \cdot \vec{x} - \beta ct\right), \quad ct' = \gamma\left(ct - \beta \vec{e}_X \cdot \vec{x}\right), \quad \vec{e}_Y \cdot \vec{x}' = \vec{e}_Y \cdot \vec{x}, \quad \vec{e}_Z \cdot \vec{x}' = \vec{e}_Z \cdot \vec{x} \tag{5.41}$$

を満たすようなものになる。$\vec{x}'$ は、x 成分、y 成分、z 成分を足し合わせて

$$\vec{x}' = \gamma\left(\vec{e}_X \cdot \vec{x} - \beta ct\right)\vec{e}_X + \left(\vec{e}_Y \cdot \vec{x}\right)\vec{e}_Y + \left(\vec{e}_Z \cdot \vec{x}\right)\vec{e}_Z \tag{5.42}$$

[3]狭い意味でのローレンツ変換は boost と呼ばれることもある

となる。ここで、

$$\vec{x} = (\vec{e}_X \cdot \vec{x})\,\vec{e}_X + (\vec{e}_Y \cdot \vec{x})\,\vec{e}_Y + (\vec{e}_Z \cdot \vec{x})\,\vec{e}_Z \tag{5.43}$$

という当たり前の式 (この式は、ベクトルを X 成分、Y 成分、Z 成分に分けてからもう一度足すと元に戻る、というだけのこと) を使うと、

$$\vec{x}' = \gamma\,(\vec{e}_X \cdot \vec{x} - \beta ct)\,\vec{e}_X + \vec{x} - (\vec{e}_X \cdot \vec{x})\,\vec{e}_X = ((\gamma-1)\vec{e}_X \cdot \vec{x} - \beta\gamma ct)\,\vec{e}_X + \vec{x} \tag{5.44}$$

と書ける。$\vec{e}_X$ は速度の方向を向いた単位ベクトルであるから $\dfrac{\vec{\beta}}{\beta}$ と書けるので、

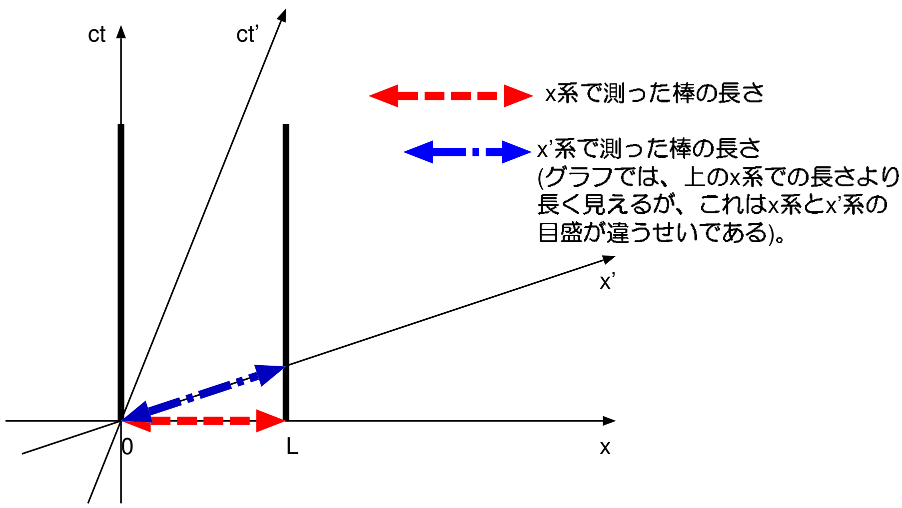
$$\vec{x}' = \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\cdot\vec{x} - \gamma ct\right)\vec{\beta} + \vec{x} \tag{5.45}$$

となる。

【補足終わり】

5.5　（新しい意味の）ローレンツ短縮

　ローレンツが ad hoc に導いたローレンツ短縮と似た現象が、この座標変換でも導かれることを示そう。今、一つの棒を $x-t$ 座標系で見て静止するように置いたとする。棒の長さを L として、一方の端を $x=0$、もう一方の端を $x=L$ に置いたとする。時間 t が経過してもこの x の値は変化しない。では、これを x' 座標系で見るとどうか。棒の一方の端の時空座標を (x_1, t_1) または (x'_1, t'_1) で、もう一方の端の時空座標を (x_2, t_2) または (x'_2, t'_2) で表すとすれば、



$$(x_1, ct_1) = (0, ct) \quad\leftrightarrow\quad (x'_1, ct'_1) = (-\gamma\beta ct, \gamma ct) \tag{5.46}$$
$$(x_2, ct_2) = (L, ct) \quad\leftrightarrow\quad (x'_2, ct'_2) = (\gamma(L-\beta ct), \gamma(ct-\beta L)) \tag{5.47}$$

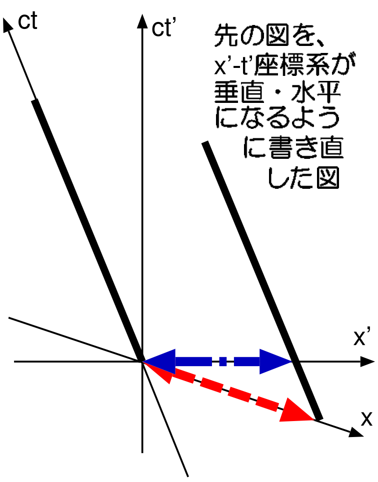
となる。

　ここで x' 座標系で棒の長さを測るとしよう。「x' 座標系での棒の長さ」は $t'_1 = t'_2$ にした時の $x'_2 - x'_1$ で計算される。上の表の (x'_1, t'_1) と (x'_2, t'_2) では、$t'_1 \neq t'_2$ なので、t_2 の方の時間を $t \to t + \frac{\beta}{c}L$ とずらして、

$$(x_2, t_2) = (L, t + \frac{\beta}{c}L) \leftrightarrow (x'_2, t'_2) = (\gamma(L - \beta ct - \beta^2 L), \gamma ct)$$

とすれば、$t'_1 = t'_2$ になる。この時の $x'_2 - x'_1$ を計算すると、

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(L - \beta^2 L) = L\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = L\sqrt{1-\beta^2} \tag{5.48}$$



となり、x 系での長さ L に比べ、$\sqrt{1-\beta^2}$ 倍になっている（縮んでいる）ことがわかる。

この式は形としてはローレンツがマイケルソン・モーレーの実験結果を説明するために導入した短縮と同じである。逆に言うと「ローレンツ短縮が起こるべし」という要請から、係数 A を決めることも可能であったことになる。しかし、今求めた新しい意味のローレンツ短縮と、古い意味のローレンツ短縮は根本的に意味が違う。まず、ローレンツはエーテルとの相対運動が理由で機械的に短縮が起こると考えたが、ここでの短縮は座標変換によって生じたものであって、力が働いて起こる短縮とは全く意味が違う。また、図で説明してあるように、座標系が違うことによって「同時刻で空間的に離れた２点」という２点の定義の仕方そのものが変わってくる。ガリレイ変換ではこんなことは生じない。古い意味のローレンツ短縮はガリレイ変換を使った物理の中で考えられたものだから、同様に「座標系が違えば同時刻が違う」ということを考慮せずに単に短縮すると仮定している。

何よりここで導かれた短縮は光速度不変の原理と特殊相対性原理から自動的に導出されたもので、筋道だった説明が与えられていることが大きな違いである。

[問い 5-1]　ミュー粒子と呼ばれる粒子は、2×10^{-6} 秒で崩壊してしまう。ウラシマ効果を考えないと、たとえ光の速さ $(3\times10^8\mathrm{m/s})$ で走ったとしても、$6\times10^2\mathrm{m}$ しか走れない。しかし、大気圏の上の方で発生したミュー粒子が、ちゃんと地上に到着する。これは、光速の 99 %近くで走っているおかげで時間の進み方が遅くなっているからであると考えることができる。
これをミュー粒子の立場に立って（つまり、ミュー粒子と一緒に動く座標系で）考えるとどうなるだろうか。この立場では、ミュー粒子は静止している（動いているのは地球の方）ので、2×10^{-6} 秒で崩壊してしまうはずである。ではなぜ、大気圏の下まで到着することができるのか ??

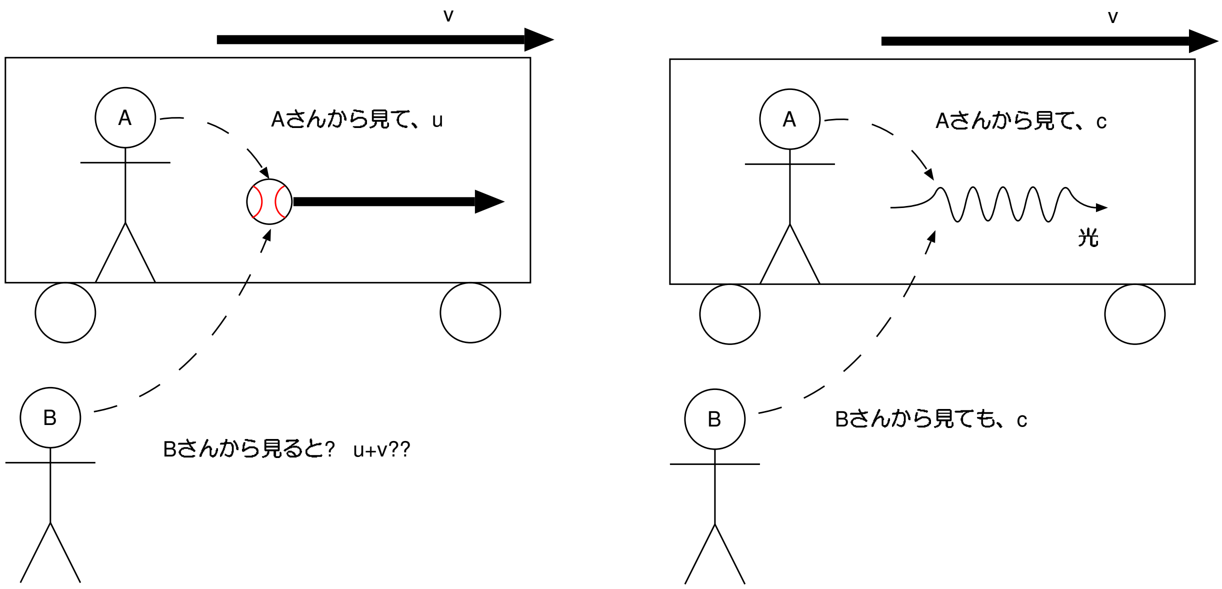
[問い 5-2]

1. 二台の電車 A と B のすれちがいをある人（観測者 O）が見ている。O から見ると、A と B は x 軸の正方向と負方向にそれぞれ速さ v で走ってくるように見える。電車の固有長さ（すなわち、電車が静止している系で測定した長さ）はともに $2L$ であるとする。観測者の座標系で時刻 $t=0$ において、$x=0$ の場所で A、B の中央が一致していたとする。これらの電車の運動を表すグラフを書け。

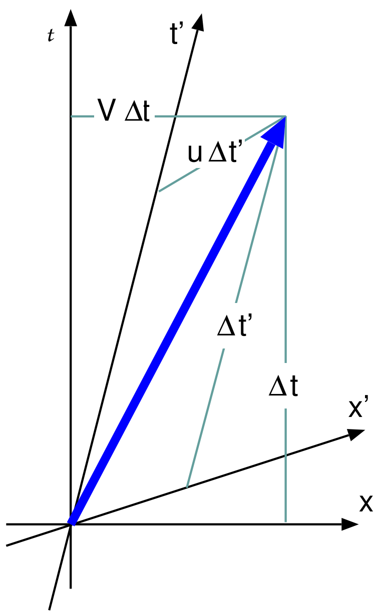
2. 電車 A の中央に乗っている観測者を α、電車 B の中央に乗っている観測者を β とする。α、β、O の３人の世界線は、さっきのグラフの原点で重なる。α は「電車 B の方が電車 A より短い」と観測し、β は「電車 A の方が電車 B より短い」と観測する（互いに相手を「自分より短い」と判断する）。先の問題のグラフに「α が原点にいる時に観測する電車 A,B の長さ」と「β が原点にいる時に観測する電車 A,B の長さ」を書き込み、互いに相手を短いと観測することを説明せよ。

第6章　ローレンツ変換と物理現象

6.1　速度の合成則



今、速度 v で走っている電車の中で、（電車の中から見て）速度 u でボールを投げたとしよう（この人を以下「A さん」と呼ぶ）。これを電車外にいる人（以下「B さん」）が見るとどれだけの速度に見えるだろう ???



ガリレイ変換的な‘常識’からすると、「$u+v$ の速度に見える」ということになるだろう。しかし、その常識はもはや通用しない。たとえば A さんがボールではなく光を発射したとすると、その光は A さんからみて速度 c で進むが、B さんから見ても速度 c で進む。ガリレイ的常識には相容れないが、光速度不変の原理という「実験事実」の示すところである。ということは、「$u+v$ の速度に見える」という‘常識’も、もはや危ない。

そこで、以下で相対論的に速度の合成を考えていくことにしよう。手がかりとするのはもちろん、ローレンツ変換

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - \frac{v}{c}ct\right) \tag{6.1}$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(ct' - \frac{v}{c}x\right) \tag{6.2}$$

である。この変換で結ばれた二つの座標系 (x, ct) 座標と (x', ct') 座標を考える。x' 座標系の原点は x 座標系で見ると速度 v で運動している。(x', ct') 座標系で速度 u を持っている物体の速度は、(x, t) 座標系ではいくらに見えるだろうか。つまり「速度 v で動く電車の中で速度 u で走

る人は、外から見るといくらの速度に見えるか」という問題を考えよう。ガリレイ変換的“常識”ではこれは $u+v$ となる。

(x',ct') 座標系で見て速度 u で動く物体の軌跡は、$x'=ut'$ で表される。この式を (x,ct) 座標系で表せば、$x=Vt$ だったとする。座標変換してみると、

$$\begin{aligned} x' =& \quad ut' \\ \gamma(x-vt) =& \quad u\gamma(t-\frac{v}{c^2}x) \\ x-vt =& \quad ut-\frac{uv}{c^2}x \\ x+\frac{uv}{c^2}x =& \quad ut+vt \\ x =& \quad \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}t \end{aligned} \tag{6.3}$$

となる。つまり、(x,ct) 座標系でのこの物体の速度 V は

$$V=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{6.4}$$

に見える。

ここで注意すべきことは、$|u|<c, |v|<c$ ならば $\left|\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right|$ も c より小さくなるということである。

[**問い 6-1**] 証明せよ。

つまり、光速以下の速度をいかに足し算していっても、光速度 c を超えることはない。後で述べるが、光速度を超えないということは相対論的因果律が満たされるために重要である。

また、$u=c$ の場合（電車内で光を発射した場合）について計算すると、

$$V=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}=\frac{c+v}{\frac{c+v}{c}}=c \tag{6.5}$$

となり、電車外で見ても光速度は c であるということになる（そうなるように作ったローレンツ変換から導いた式なのだから当然ではあるが）。

なお、上の計算は二つの速度がどちらも x 方向を向いている時の計算であるが、たとえば x' 系での速度が (u_x,u_y,u_z) であるような時は、$y'=u_yt'$ という式が成立しているので、

$$\begin{aligned} y' =& \quad u_yt' \\ y =& \quad u_y\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \\ y =& \quad u_y\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}\frac{u_x+v}{1+\frac{u_xv}{c^2}}t\right)=u_y\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{u_x+v}{1+\frac{u_xv}{c^2}}\right)t \\ y =& \quad u_y\gamma\left(\frac{1+\frac{u_xv}{c^2}-\frac{u_xv}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{u_xv}{c^2}}\right)t=u_y\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{u_xv}{c^2}}\right)t=u_y\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_xv}{c^2}}t \end{aligned} \tag{6.6}$$

となり、y 方向の速度は $u_y\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_xv}{c^2}}$ ということがわかる。z 方向も同様に、$u_z\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_xv}{c^2}}$ とわかる。y,z 座標は変化しないが、時間座標が変化しているので、y,z 方向の速度が変化する。これもガリレイ変換の場合とは大きく違う。

6.2 フィゾーの実験の解釈

3.5節で、フィゾーによる「エーテルの引き摺り」実験を紹介した。屈折率 n の媒質が速さ v で運動している場合、その媒質中の光速（媒質が運動していなければ $\frac{c}{n}$）が

$$\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \tag{6.7}$$

に変化するということであった。これを媒質中のエーテルは媒質の $1-\frac{1}{n^2}$ の速度で動いていると考えるとすると、たいへんおかしなことになる。n は振動数によって違うから、各々の振動数ごとに違う速度でエーテルが動いていることになってしまうのである。

相対論的な考え方では、この問題がどのように解決するかを見ておこう。まず、媒質と一緒に運動する座標系で考えると、この光の速度は $\frac{c}{n}$ である（念のため注意。この座標系でも、真空中の光の速度は c のままである）。ではこの速度を、媒質が運動している座標系で見るとどう見えるだろうか？—上の公式 (6.4) を、v が小さいと近似して展開すると、

$$\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}=(u+v)\times\left(1-\frac{uv}{c^2}+\cdots\right)=u+v-\frac{u^2v}{c^2}+\cdots=u+\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)v+\cdots \tag{6.8}$$

となる[1]。今考えている場合は $u=\frac{c}{n}$ なので、この式は

$$\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \tag{6.9}$$

となり、フィゾーの実験結果と近似の範囲内で一致する。この計算では「エーテルの運動」などというものを考える必要は全くなく、「媒質の静止系では光速は $\frac{c}{n}$ だ。他の座標系でどうなるか知りたければ、単にローレンツ変換すればよい（速度の合成則を使って計算すればよい）」ということになる。振動数ごとに違う速度で走るエーテルなどという不自然なものは必要ない。

6.3 相対論的因果律

因果律とは「原因は結果に先行する」という原則であり、物理のというより、何らかの現象を考えるすべての学問において鉄則と言ってよいだろう。ガリレイ変換的な世界における因果律は

$$t_{原因}<t_{結果}$$

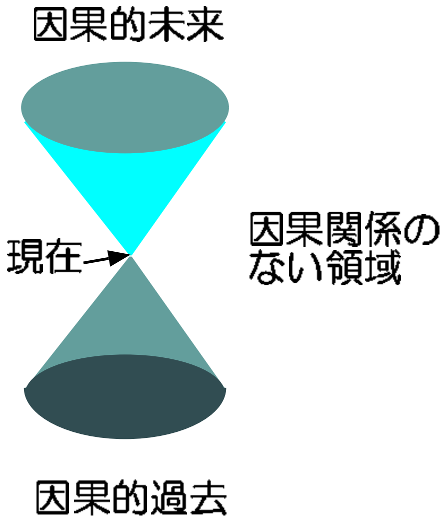
と表すことができる。$t_{原因}$ は原因となる事象が起こる時刻で、$t_{結果}$ は結果となる事象が起こる時刻である。相対論的に考える時は、条件がもっときつくなる。なぜなら、同時の相対性のおかげで、「ある座標系では $t_{原因}<t_{結果}$ だが、別の座標系では $t'_{原因}>t'_{結果}$」ということが起こってしまう可能性がある。そこで相対論的因果律は、

$$\text{いかなる座標系で表現しても}\qquad t_{原因}<t_{結果}$$

と表現される。結局、「結果」となる事象は「原因」から見て、未来に向いた光円錐の内側になくてはいけないことになる（逆に「原因」は「結果から見て過去に向いた光円錐の内側にある）。

---

[1] $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$。これは初項 1、公比 $-x$ の等比級数の和の公式である。

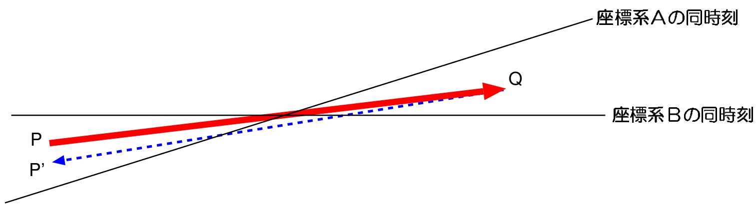


「現在」であるある点から見て、未来向きの光円錐の内側（側面を含む）を「因果的未来」と呼ぶ。「現在」で起こることの影響は、因果的未来にのみ及ぶ。また、「現在」に影響を及ぼしているのは過去向き光円錐の内側（「因果的過去」と呼ぶ）のみである。「因果的未来」でも「因果的過去」でもない領域は、現在とは因果関係がない（現在の場所にいる粒子の未来においては影響を及ぼす可能性がある）。

相対論的因果律がほんとうに満たされているかどうかはわからないが、既知の（相対論的に正しい）物理法則はこれを満たしているように見える。上で速度の合成則から、「いくら速度を足していっても c を超えない」ことがわかっている。これはつまり、「どんなにがんばって加速しても光速以上には加速できない」ということである。物理法則は因果律を破れないように作られているらしい。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

もし超光速で移動することが可能であったならば、それはタイムマシンがあるのと同じことになる。なぜなら、ある座標系において超光速で移動することは、別の座標系から見ると「未来から過去へ」という移動を行っていることになるからである。右の図の P から Q へという移動は、座標系 B で見れば「過去から未来へ」という運動だが、座標系 A で見れば「未来から過去へ」という運動になる。



もし、「座標系 A で見て超光速で動ける物体」と「座標系 B で見て超光速で動ける物体」が二つ用意できれば、その二つの組み合わせによって「未来から過去へ」という移動が可能になる。図の P → Q → P' という運動を見てみよう。P → Q は座標系 B での超光速、Q → P' は座標系 A での超光速移動である。そして P → P' という移動は、場所は移動せず時間だけを遡っていることになる[2]。

このような因果律を破る現象が存在しているとすると SF などで有名な「自分が生まれる前に戻って自分の親を殺したらどうなるのか？」というパラドックスが発生することになる。親が死んだので自分が生まれないとすると、生まれない自分はタイムマシンで元に戻ることはない。ということは親は死ぬことなく、自分は生まれる。生まれた自分は親をタイムマシンで殺しに行く。すると自分は生まれない…と論理が堂々巡りし、結局何が起こるのか、さっぱりわからなくなるのである。これを物理の言葉で述べると「与えられた初期条件に対して適切な解が存在しない」ということになる。因果律が破れているということは「初期条件」では決まらない要素（未来から来た自分）が問題に入ってくるということなので、こういう困ったことになる。困ったことになるのは嫌なので、因果律は破れないようになっていると思いたいところである。

【補足終わり】

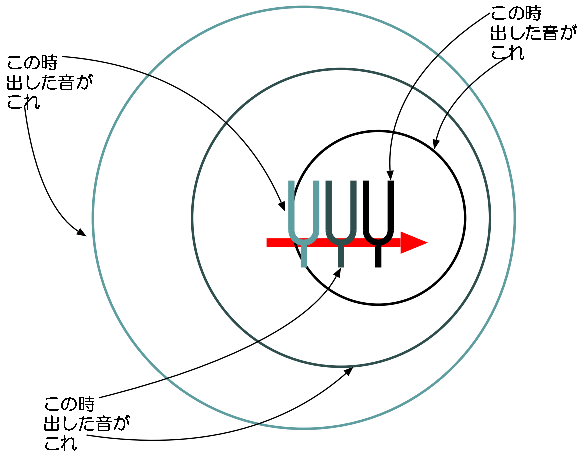
6.4 ドップラー効果

ドップラー効果については音の方が有名である。まず音の場合のドップラ—効果がどのような現象であるかを思い出す。そこでまず気をつけて欲しいのは、「ドップラ—効果」と呼ばれている現象は実は二つの現象を合わせたものだということである。それは

1. 音源が移動していることによって、波長が変化し、結果として振動数が変化する。
2. 観測者が移動していることによって、見掛けの音速が変化し、結果として振動数が変化する。

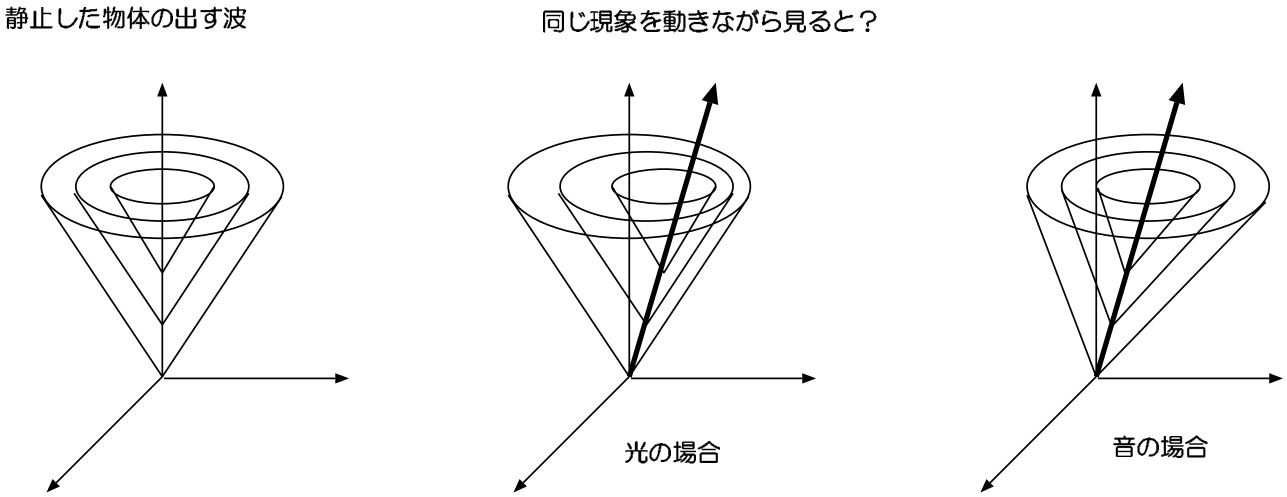
[2] このあたりを解説した読み物としては「タイムマシンの話」（都筑卓司・講談社）などがある。

振動数 f は波長 λ と音速 V によって、$f=\dfrac{V}{\lambda}$ と書かれる。1. は、この式の分母の変化である。図で書けば右のようになる。これは音源が動きながら音を出している様子である。音源が動いても、まわりの空気（音の媒質）はいっしょに動いているわけではないので、音を出した場所を中心として球状に（図では円状になっている）広がる。音が広がるまでの間に音源が移動しているので、前方では波がつまり（波長が短くなり）、後方では波が広がる（波長が長くなる）。



これに対して 2. は、$f=\dfrac{V}{\lambda}$ の分子の方の変化である。同じ波長の波が来たとしても、自分が波に立ち向かっていくならば、1 秒間に遭遇する波の数が増える。逆に波から遠ざかるならば、波の数が減る。

しかしこのような説明を聞いた後で、「さて光の場合のドップラー効果はどうなるのか」と考えると、ちょっと不思議なことに気づくだろう。音の場合、観測者の運動によって音速が変る（2の場合）。だから音の振動数が変化するわけである。しかし光の場合、そんなことは起きない（光速度不変の原理！）。では光の場合、「観測者が運動している場合のドップラー効果」は存在しないのか。もちろんそんなことはない。以下で、まず図を書いて考えてみよう。



上左の図は、静止した波源から波（光もしくは音）が出ている状況の時空図である。波は上下左右前後に（図では例によって空間軸を一つ省略している）均等に広がっていく。それゆえ、異った時刻に発生した波の波面は同心球（図では同心円）を描く。

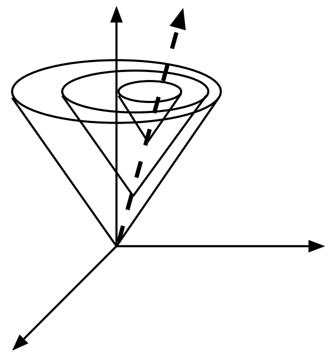
これを動きながらみたらどのように見えるかを表したのが上中、上右の図であり、それぞれ光の場合と音の場合である。光の場合、光速度不変により、光円錐は傾かない。しかし、波源（光源）が刻一刻動いているので、今度は同心球とはならず、進行方向の前では波がつまり、後ろでは波が広がる。

音の場合はどうかというと、波源（音源）の動きと同じ速さで空気も動いているので、音の球はいわば、風に流される状態になる。ゆえに「音円錐[3]」は風で流される分、傾く。音源と媒質が同じ速度で動いているので、波面は球状に広がりながら流されていき、同心球はたもたれる。つまりこの場

[3]実際にこんな言葉はない

合、波長は変化しない。しかし前方では波がそれだけ速くなっており、同じ波長でも速さが速い分振動数が多くなっている[4]。

今考えた二つ（上中、上右図）は同じ現象を動きながら見た場合であった。そのため、音の場合、音源と同じ速度で媒質（空気）が動いていた。では空気の中を音源が動くとどうなるかを書いたのが右の図である。この場合、音円錐は傾かないが音源の動きのせいで波面が同心球にならない。つまりこの場合、波長が変化することで振動数が変化している（音速は変化していない）。

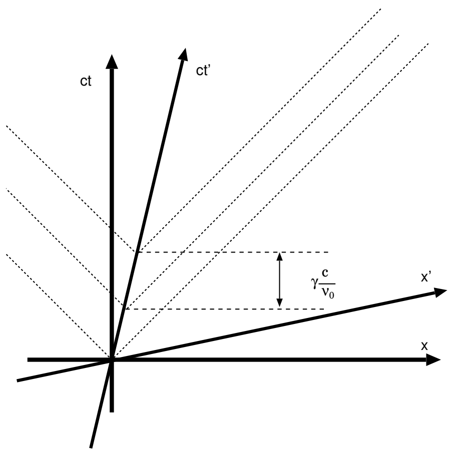


音源が動くが空気が動かない場合

波の振動数 ν は波長 λ と波の伝わる速さ v で表すと $\nu = \frac{v}{\lambda}$ であるが、音の場合、波源が動いたならば λ が変化し、観測者が動いたら音速 v が変化する。光の場合、速さ v は変化しないので、変化は全て波長の変化に帰着される。しかし、その波長が変化する理由は実は二つある。一つは図に現れている、波と波の間隔がつまるという現象である。もう一つ、いわゆるウラシマ効果によって、波源（光源）が波を出してから次に波を出すまでの間隔がのびる。この二つの効果によって光の波長が変化し、ゆえに振動数が変化するのである。このように、光速度不変（c は観測者の速度によって変化しない）であっても、振動数や波長は観測者の速度によって変化しうる。

では、どのように光のドップラー効果が起こるかを、ローレンツ変換の式を使って計算してみよう。光の振動数（ただし、音源が静止している場合に出す光の振動数）を ν_0 とする。光源の静止系 (x' 系とする。) では、「山」を出してから次に「山」を出すまでの時間は $\frac{1}{\nu_0}$ であるから、光の「山」が出た時空点を $(x', y', z', ct') = (0, 0, 0, \frac{nc}{\nu_0})$（$n$ は整数）と考えることができる。これをローレンツ変換すると、$(x, y, z, ct) = (\gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}, 0, 0, \gamma\frac{nc}{\nu_0})$ となる。つまりこれが光源が動いている座標系において光の「山」が出た時空点である。

もっとも簡単な場合として、光源の進んでいく先にあたる場所 $(x, y, z) = (L, 0, 0)$（L は大きく、まだ光源はここまで達していないと考える）でこの光を観測したとすると、光は出てから $L - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}$ の距離だけ走ってこの場所に到達することになる。その時刻は



$$\underbrace{\gamma\frac{n}{\nu_0}}_{\text{山が出た時刻}} + \underbrace{\frac{L - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}}{c}}_{\text{光が到着するのにかかる時間}} = \frac{L}{c} + \gamma(1-\beta)\frac{n}{\nu_0} \tag{6.10}$$

である。n が 1 違うと、この時刻は $\gamma(1-\beta)\frac{1}{\nu_0}$ だけ違う。ゆえに、振動数は

$$\nu = \nu_0\frac{1}{\gamma(1-\beta)} = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{6.11}$$

と変化していることになる。より一般的に、$(L\cos\theta, L\sin\theta, 0)$ に来た光の振動数を考えよう。この場所に「山」がやってくる時刻は L が大きいとして近似すると、

$$\begin{aligned} \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\sqrt{\left(L\cos\theta - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}\right)^2 + (L\sin\theta)^2} &\simeq \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 - 2L\cos\theta\gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}} \\ &\simeq \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\left(L - \cos\theta\gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}\right) \end{aligned} \tag{6.12}$$

[4]以上の音に対する計算では、座標変換にガリレイ変換を使っている。ほんとうはここもローレンツ変換を使うべきなのだが、音のようなせいぜい数百 m/s の話をしている時には、ローレンツ変換とガリレイ変換の差は非常に小さく、わざわざ計算が面倒なローレンツ変換を使う意味はあまりない。

となる。n が 1 変化するとこの時刻は $\dfrac{\gamma(1-\beta\cos\theta)}{\nu_0}$ 変化するので、振動数は

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \tag{6.13}$$

となる。

（ガリレイ変換を使った場合の）音のドップラー効果との顕著な違いは、進行方向に対して真横の方向へ進む光（上の式で $\cos\theta = 0$ に対応する）にも振動数変化があらわれることである。これはウラシマ効果によるもので、音ではそのような結果は出ない。これを「横ドップラー効果」と呼ぶ。銀河のいくつかはその中心核から「宇宙ジェット」と呼ばれる亜光速のガス流を出しているが、そのガスが出す光が横ドップラー効果を起していることが確認されている。

第7章　ミンコフスキー空間

ここまで学習した相対論的な考え方は「ミンコフスキー空間」と呼ばれる「時間１次元＋空間３次元の時空間」での幾何学としてまとめなおすことができる。この章でここまでの結果を“４次元的な視点”から考え直そう。

7.1　４次元の内積

ここまででわかった大事なことはローレンツ変換によって移り変わる二つの座標系 (ct, x, y, z) と (ct', x', y', z') の間に、

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \tag{7.1}$$

あるいは

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \tag{7.2}$$

という関係が成立することである。

もともとローレンツ変換を求める時においた要請 1. は $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ の値の不変性ではなく、「$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ならば、$-(ct')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$ であれ」という条件であった。しかし、これに要請 2.(一様性) と要請 3.(等方性) を加えることで、$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ が不変でなくてはならないことがわかった。

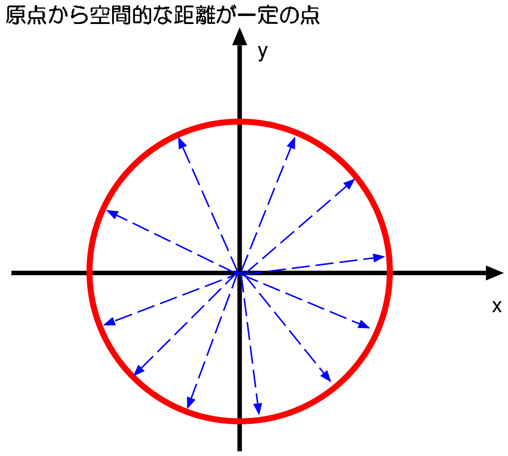
この量 $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ あるいは $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ を、「４次元的距離の自乗」と呼ぶ。この式のうち時間成分を除いた $x^2 + y^2 + z^2$ は３次元空間における距離の自乗である。３次元において、距離の自乗は回転（および反転）という座標変換に対して不変であった。その４次元バージョンである $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ は回転・反転だけでなく、ローレンツ変換に対して不変となっている。 物理において大事なのは「座標変換によって変わらない量」である（座標は所詮、人間の都合で決めたものであるから、座標によらない量こそが本質なのである）。そういう意味で、４次元的に考える時（つまり相対論的に考える時）には３次元の距離よりも４次元的な距離の方がずっと物理的意味が大きい。

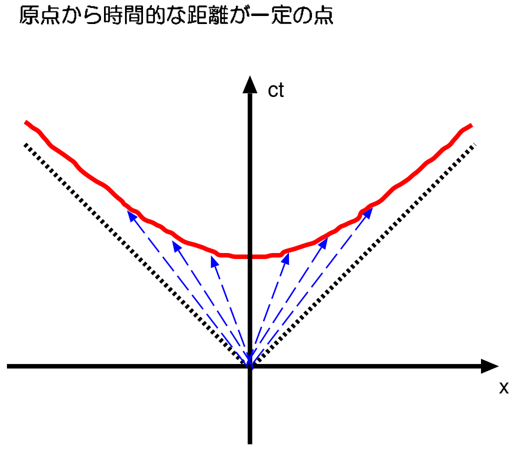
４次元的な距離の自乗を不変にする変換を（３次元的な回転や反転もひっくるめて）「ローレンツ変換」と呼ぶ場合もある。ローレンツ変換をテンソルを使って表現すると $(x')^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu$ であるが、この変換の行列 $\alpha^\mu{}_\nu$ は $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} \alpha^{\mu'}{}_\mu \alpha^{\nu'}{}_\nu$ を満たす。このような行列 $\alpha^\mu{}_\nu$ で表される変換は、すべて広い意味でのローレンツ変換である。

$$\begin{array}{c}\text{広い意味のローレンツ変換}\\ (-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2\text{を不変に保つ})\end{array} = \begin{cases} \text{狭い意味のローレンツ変換} & \left(\begin{array}{rl} x' = & \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = & \gamma(ct - \beta x) \end{array}\text{など}\right) \\ & \\ \text{回転／反転} & (x^2 + y^2 + z^2\text{ を不変に保つ}) \end{cases} \tag{7.3}$$

狭い意味のローレンツ変換は「boost」と呼ばれることもある。

次の図は、(x, y) 面において $x^2 + y^2 = $ 一定 となる線と、(x, ct) 面において $-(ct)^2 + x^2 = $ 一定 となる線を書いたものである。右の図は「等距離の点」には見えないが、４次元的な意味で「等距離の点」なのである。

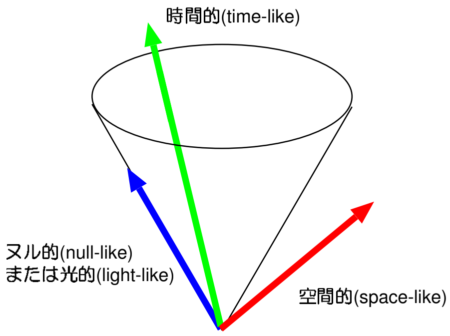




ローレンツ変換によって保存される量は３次元的な意味での長さであるところの $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ではなく、４次元的な意味での長さである。ある点 (t,x,y,z) と、それから（時間的にも空間的にも）微小距離だけ離れた点 $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$ との間の距離を ds とした時、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.4}$$

として、４次元的な微小長さ（「線素」と呼ぶ）を定義する。



ds^2 はいろんな符号がありえる。符号によって

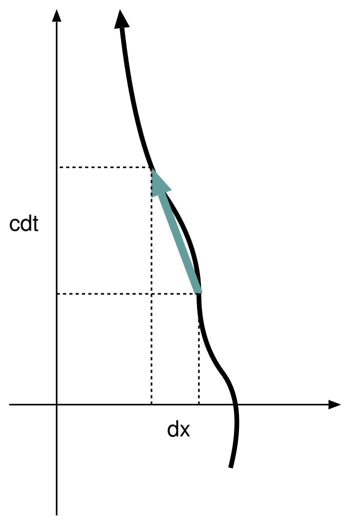
$ds^2>0$	$(cdt)^2<dx^2+dy^2+dz^2$	空間的 (space-like)
$ds^2=0$	$(cdt)^2=dx^2+dy^2+dz^2$	ヌル的 (null-like)
$ds^2<0$	$(cdt)^2>dx^2+dy^2+dz^2$	時間的 (time-like)

(7.5)

のように４次元距離を分類する。「ヌル的」は「光的 (light-like)」と言う場合もある。

本によって、上の式を $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ と定義する場合 (timelike convention) と、$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ と定義する場合 (spacelike convention) がある。前者は、通常の粒子の場合 $ds^2>0$ となる点が好ましい。後者は、３次元部分だけを見るとユークリッド空間での線素の長さ $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ と等しい点が好ましい。どちらを使うかはその人の流儀であって、どちらを使っても物理的内容に違いはない。ここでは spacelike convention の方を使う。

このようにして距離が定義された空間をミンコフスキー (Minkowski) 空間といい、この空間での距離の計算の仕方を示す $\eta_{\mu\nu}$ という記号およびこの記号を使って測られる距離のことを「ミンコフスキー計量」と言う。



ちなみに、普通の空間、すなわち距離が

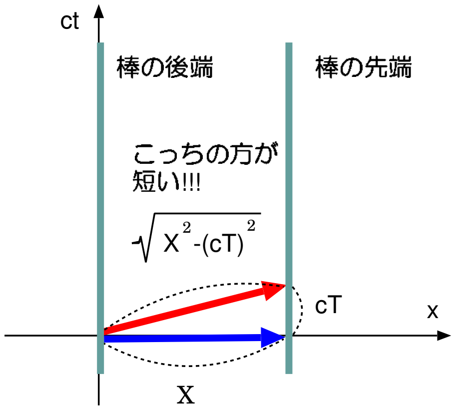
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.6}$$

で定義された空間は「ユークリッド空間」（正確には「３次元ユークリッド空間」）と呼び、行列 $\delta_{ij}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ はユークリッド計量と呼ぶ。

４次元的な考え方と言っても内容は変わっていない。アインシュタイン自身もミンコフスキーがこういう書き方を始めた時、「数学的な話で、物

理の理解とは関係ない」と思っていたらしい[1]。しかし、このような表示によって相対論を考えることが劇的に簡単になる（アインシュタインもすぐにそれに気づいて自分でも使い始めている)。

この「４次元的距離」という考え方をすると、ローレンツ短縮やウラシマ効果を別な形で理解することができる。ローレンツ短縮は、「動いている棒は長さが縮む」という現象である。右の図は、棒が静止している座標系で、棒の先端と後端の軌跡を示した。図の水平矢印は、棒と同じ動きをしている人が観測する「棒の長さ」である。

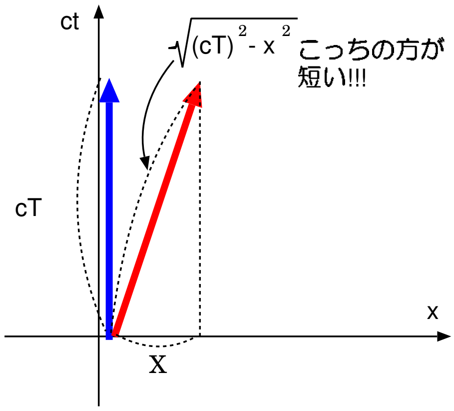


次に、棒に対して動いている人を考える。同時の相対性により、この観測者の同時刻は傾いている。この人が棒の長さを測る時には、自分にとっての同時刻を基準に測るであろうから、「棒の長さ」は図の斜め矢印であると認識する。

水平矢印と斜め矢印は、グラフ上の見た目では斜めの方が長く見えるが、４次元的長さの自乗の定義が $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ であることを思い出すと、水平矢印の長さ X に対し、斜め矢印は長さが $\sqrt{X^2-(ct)^2}$ となる (普通のピタゴラスの定理とは $(ct)^2$ の前の符号が変わっていることに注意)。

ウラシマ効果は、動いている方が経過する時間が短いという効果であるが、それは図の斜め線の方が垂直な線より短いということで理解できる。

グラフを見ると斜め線の方が長く見えるが、今長さの定義が４次元的距離で定義されていることに気をつけなくてはいけない。そのため、真っ直ぐな線の４次元的距離の自乗は $-(cT)^2$ であり、斜め線の４次元的距離の自乗は $-(cT)^2+X^2$ となる。「距離の自乗」がマイナスになるのは「自乗」という言葉の本来の意味からすると奇妙であるが、今「距離の自乗」は $-(cT)^2+x^2+y^2+z^2$ と定義されているのでこれでよい。本来の意味とは違う使い方をしていることになるが、物理専用の用語なのだと思って納得して欲しい。



マイナスになるのが気になるのであれば、「時間的な距離を測る時には距離の自乗は $(cT)^2-x^2-y^2-z^2$ と定義する」と決めておいてもよい。

7.2　世界線の長さと固有時

粒子の軌跡（４次元時空中の曲線になる）を「世界線」と呼ぶ。世界線の長さを上で定義した ds を使って測定する。ds はローレンツ変換によって不変な量である。適当なローレンツ変換をしても値は変らないのだから、計算しやすい座標系で計算すればよいことになる。そこで今考えている粒子がちょうど静止しているような座標系を採用したとする。その座標系を (T,X,Y,Z) とすると、明らかに粒子の運動した線に沿っていけば $dX=dY=dZ=0$ であるから、

$$ds^2=-c^2dT^2 \tag{7.7}$$

となる。つまり、ds はその物体が静止している座標系で測った時間経過に比例する。比例定数は ic である（i がついてしまうのは、ds^2 を spacelike convention で定義したためである）。$ds^2=-c^2d\tau^2$

[1]ちなみにミンコフスキーはアインシュタインが大学時代の先生であり、ミンコフスキーの方はろくに講義に出てこないアインシュタインを出来の悪い学生と思っていたらしい。

と書くと、このτがまさに、その物体が静止している座標系で測った時間である。つまり、この物体が持っている時計の刻む時間であると考えて良い。そこでτを固有時と呼ぶ。

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{7.8}$$

となる[2]。固有時τに対し、座標系に対して静止している人にとっての時間tは「座標時」と呼ばれる。この式の両辺をdt^2で割って平方根を取ると、

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)} = \sqrt{1-\beta^2} \tag{7.9}$$

となる。つまり、固有時の増加は座標時の増加の$\sqrt{1-\beta^2}$倍である。

固有時は、各物体ごとに違う進み方をする。上の式からわかるように、寄り道をするとdx^2が多くなり、結果として固有時の進みは遅れる（ウラシマ効果）。双子のパラドックスの計算なども、運動している物体の固有時が短くなる、と考えれば簡単である。

我々の知っている粒子の世界線はtime-likeであるかnull-likeであるか、どちらかである。世界線がspace-likeだということは超光速で運動している粒子であるということで、そんなものは見つかっていない。もし見つかったら、そのような粒子は見る人の立場によっては未来から過去に向かって走ることになるので、因果律に抵触することになるだろう。

世界線がnull-likeになると、固有時の変化$d\tau$は0になってしまう。よって光のように光速で動くものに対しては固有時が定義できない（あるいは定義してもそれは変化しない）。

[問い7-1]　半径R、角速度ωで等速円運動している物体がある。座標時では１周に$\frac{2\pi}{\omega}$だけ時間がかかるが、固有時ではどれだけの時間になるか？

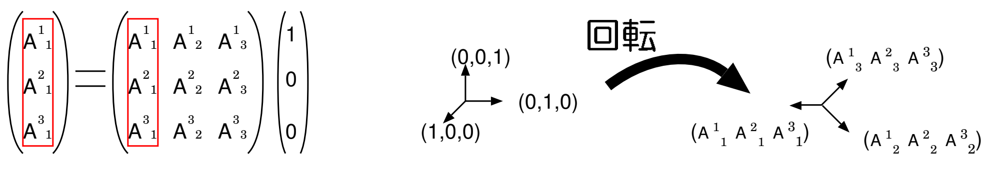
7.3　４元ベクトルの前に：３次元ベクトルの回転の復習

次の節で４次元時空内でのベクトルを考える。ローレンツ変換は４次元時空間での「回転のようなもの」と解釈できるので、４次元に行く前に３次元空間における回転を復習しておく。

３次元の座標$x^i (i = 1, 2, 3)$を回転させる座標変換は、

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

のように行列で書ける。



これをテンソルで書けば$x'^i = A^i{}_j x^j$)となる。Aには具体的には例えば$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$のような行列が入る。

[2]固有時の定義の符号は常にこの形。座標時tの符号に合わせる。

このように座標系が回転した時、３次元空間のベクトル $V^i (i=1,2,3)$ は、

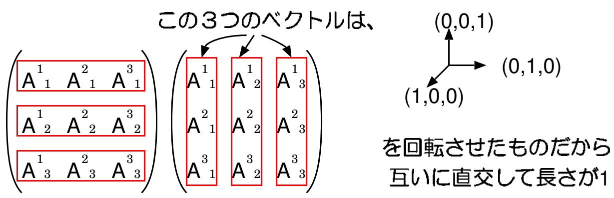
$$\begin{pmatrix} V'^1 \\ V'^2 \\ V'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

(テンソルで書けば $V'^i = A^i{}_j V^j$ ）のように、同じ行列を使って回転される。そして、二つのベクトル V^i, W^i があった時、その内積 $(V^1 V^2 V^3) \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix} = V^i W^i = V^1 W^1 + V^2 W^2 + V^3 W^3$ は保存する。そのことは、行列 $A^i{}_j$ の性質

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^2{}_1 & A^3{}_1 \\ A^1{}_2 & A^2{}_2 & A^3{}_2 \\ A^1{}_3 & A^2{}_3 & A^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

からわかる。この式をテンソルで書けば $A^i{}_j A^i{}_k = \delta_{jk}$ である。この式の左辺の掛け算は、$A^i{}_j$ の前の足どうしが同じ添字で足し上げられていることに注意。つまり行列の掛け算ルールに即するためには前の方を転置せねばならない（上の行列での表現もそうなっている)。

また、回転の行列ならばこのような性質を持っていることは、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をこの行列で回転させると $\begin{pmatrix} A^1{}_1 \\ A^2{}_1 \\ A^3{}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^1{}_2 \\ A^2{}_2 \\ A^3{}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^1{}_3 \\ A^2{}_3 \\ A^3{}_3 \end{pmatrix}$ となることからわかる。



7.4　４元ベクトル

３次元のベクトル $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ は座標変換の時に、座標 $\vec{x} = (x, y, z)$ と同じ行列で変換される。その時二つのベクトルの内積が不変量であった（内積のもともとの定義は二つのベクトルの長さと、その間の角の cos の積である。回転によって長さと角度は不変)。

同様に、４成分のベクトル $V^\mu (\mu = 0,1,2,3)$ を考える[3]。

座標がローレンツ変換 $(x'^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu)$ された時、このベクトルは $V'^\mu = \alpha^\mu{}_\nu V^\nu$ と同様のローレンツ変換を受けるとしよう。このような変換にしたがうベクトルを４元ベクトルと言う。後で出てくる４元速度、４元加速度、４元力などは全て４元ベクトルである。二つの４元ベクトル V^μ, W^μ を考える。では、このようなベクトルによって作られる、座標変換（この場合ローレンツ変換）の不変量はどのようなものだろう。

[3] 少し前から使っているが、$i, j, k, \cdots$ などのアルファベットは 1,2,3（３次元空間）の添字として、$\mu, \nu, \rho, \cdots$ などのギリシャ文字は 0,1,2,3(４次元時空) の添字として使う、というのが相対論の本でよく使われる約束である。

この二つのベクトルの内積を3次元でと同じように $V^0W^0+V^1W^1+V^2W^2+V^3W^3$ と定義したとすると、これはローレンツ変換で保存しない。保存するのは、

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = -V^0W^0+V^1W^1+V^2W^2+V^3W^3 \tag{7.13}$$

である。これを4次元的な内積と考えよう。4次元の内積がローレンツ変換で保存することは、

$$\eta_{\mu\nu}V'^\mu W'^\nu = \eta_{\mu\nu}\alpha^\mu{}_\rho V^\rho \alpha^\nu{}_\lambda W^\lambda = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu{}_\rho\alpha^\nu{}_\lambda}_{=\eta_{\rho\lambda}} V^\rho W^\lambda = \eta_{\rho\lambda}V^\rho W^\lambda \tag{7.14}$$

からわかるし、そもそも V と同じ変換をする x で作られた $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ が不変量であったことからもわかる。

このように4元ベクトルどうしの「内積」を取る時には $\eta_{\mu\nu}W^\nu$ という組み合わせがよく出てくるので、

$$W_\mu = \eta_{\mu\nu}W^\nu \tag{7.15}$$

という量を定義する。上付きの添字を持つベクトルを「反変ベクトル」、下付きの添字を持つベクトルを「共変ベクトル」という。$\eta_{\mu\nu}$ の内容を考えれば、$W_0=-W^0, W_1=W^1, W_2=W^2, W_3=W^3$ ということである。つまり、W^μ と W_μ の違いは第0成分(時間成分)の符号だけである。このようにミンコフスキー空間の直線座標系では反変ベクトルと共変ベクトルの差は時間成分の符号だけで、大きな差はないが、曲線座標系などではそうではなくなるし、特に一般相対論では大きな差になる。この講義ではそこには触れない。

$\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ と書くことにする。つまり、

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta^\nu_\mu \quad (\delta^\nu_\mu\text{は}\mu=\nu\text{の時1でそれ以外0という記号}) \tag{7.16}$$

ということである(注:この二つの行列の中身は同じ)。この時、

$$W^\mu = \eta^{\mu\nu}W_\nu \tag{7.17}$$

も成立する。つまり添字は η を使って上げたり下げたりできる。そういう意味でも、この二つのベクトルは中身は同じであって、表現が違うだけである。

共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$W'_\mu = \eta_{\mu\nu}W'^\nu = \eta_{\mu\nu}\alpha^\nu{}_\rho W^\rho = \eta_{\mu\nu}\alpha^\nu{}_\rho\eta^{\rho\lambda}W_\lambda \tag{7.18}$$

となるので、その変換行列は $\eta_{\mu\nu}\alpha^\nu{}_\rho\eta^{\rho\lambda}$ である。よくみるとこれは $\alpha^\nu{}_\rho$ の添字を η を使って上げたりさげたりしていることになるので、

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^\nu{}_\rho\eta^{\rho\lambda} = \alpha_\mu{}^\lambda \tag{7.19}$$

と書く。この記号を使えば、共変ベクトルのローレンツ変換は $B'_\mu = \alpha_\mu{}^\nu B_\nu$ となる。

共変ベクトルも反変ベクトルも、「α の後ろの添字とベクトルの添字をそろえて和を取る。この添字は一方が上付きならもう一方は下付きである」と考えれば変換ルールを覚えやすい。

また、$\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu{}_\rho\alpha^\nu{}_\lambda = \eta_{\rho\lambda}$ から、

$$\alpha^\mu{}_\rho\alpha_\mu{}^\lambda = \delta^\lambda_\rho \tag{7.20}$$

ということもわかる。

座標と同じ変換をする方が**「反」**変で、少し違う変換をする方が**「共」**変なのは気持が悪いが、数学では微分演算子の方が基本的な量なので、こういう命名になっている。つまり微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルなのである。以下でそれを示そう。

まず、微分の chain rule を使って計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{7.21}$$

のように微分演算子が変換することがわかる。一方、ここで現れた $\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ という行列は、

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial\left(\alpha^\mu{}_\rho x^\rho\right)}{\partial x^\nu} = \alpha^\mu{}_\nu \tag{7.22}$$

という行列の逆行列である。つまり、

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = \delta^\nu{}_\rho \quad あるいは \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\alpha^\mu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho \tag{7.23}$$

である。これと (7.20) を見比べると、$\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \alpha_\mu{}^\nu$ ということであるから、

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \alpha_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{7.24}$$

が成立するのである。これは微分演算子が共変ベクトルであるということを示している。

反変ベクトル A^μ と共変ベクトル B_μ の内積のローレンツ変換は

$$(A')^\mu(B')_\mu = A^\nu\underbrace{\alpha^\mu{}_\nu\alpha_\mu{}^\rho}_{=\delta^\rho_\nu}B_\rho = A^\mu B_\mu \tag{7.25}$$

である。つまり、反変（上付き）添字と共変（下付き）添字が足し上げられていると、ローレンツ変換した結果、それぞれのローレンツ変換が消し合って、まるで最初から添字がついていないかのごとく変換を受けない。つまり添字の意味がなくなっている。それゆえこのように添字が足し合わされている状況を「つぶれている」と称するのである。

なお、$C_{\mu\nu}, A^{\rho\lambda\tau}, D^\tau{}_{\sigma\mu\nu}$ のように添字を複数個もち、上付き（反変）添字が $\alpha^\mu{}_\nu$ で、下付き添字が $\alpha_\mu{}^\nu$ で変換されるような量を「テンソル」と言う。反変ベクトルは上付き添字が一つのテンソル、共変ベクトルは下付き添字が一つのテンソルである。

複数個の添字のあるテンソルは、その添字の一個一個に α がかかっていくように変換される。例えば

$$(D')^\tau_{\sigma\mu\nu} = \alpha^\tau{}_{\tau'}\alpha_\sigma{}^{\sigma'}\alpha_\mu{}^{\mu'}\alpha_\nu{}^{\nu'}D^{\tau'}_{\sigma'\mu'\nu'} \tag{7.26}$$

のように変換される。$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ あるいは $\delta^\mu{}_\nu$ は添字が二つあるテンソルの例でもある。$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}, \delta^\mu{}_\nu$ は座標変換で変化しないので、不変テンソルと呼ぶ[4]。

$\delta^\mu{}_\nu$ がローレンツ変換で不変であることを証明しよう。$x^\mu \to \alpha^\mu{}_\nu x^\nu$ と座標変換された時、$\delta^\mu{}_\nu$ は

$$\alpha^\mu{}_\rho\alpha_\nu{}^\lambda\delta^\rho{}_\lambda = \alpha^\mu{}_\rho\alpha_\nu{}^\rho \tag{7.27}$$

と座標変換される。この式を (7.20) の左辺と見比べるとよく似ている。違いは (??) では前の添字がダミーになっていて、(??) では後ろの添字がダミーになっていることである。ここで、行列 $\mathbf{A}$（その成分は $A_\rho{}^\mu = \alpha^\mu{}_\rho$）と行列 $\mathbf{B}$（その成分は $B_\mu{}^\lambda = \alpha_\mu{}^\lambda$）を考えると、(7.20) の左辺すなわち $\alpha^\mu{}_\rho\alpha_\mu{}^\lambda$ は行列の積 $\mathbf{AB}$ の (ρ, λ) 成分と見ることができる。一方、(??) すなわち $\alpha^\mu{}_\rho\alpha_\nu{}^\rho$ は行列 $\mathbf{BA}$ の (μ, ν) 成分とみることができる。$\mathbf{AB} = I$(単位行列) であるから、$\mathbf{BA} = I$ となり、

$$\alpha^\mu{}_\rho\alpha_\nu{}^\lambda\delta^\rho{}_\lambda = \delta^\mu{}_\nu \tag{7.28}$$

[4] この他に不変テンソルとしては、完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ がある。

が証明される。

なお、このことからも、$\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルでなくてはならないことがわかる。なぜなら、$\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}x^\nu = \delta^\nu_\mu$ という式が成立している。x^ν が反変ベクトルなのだから、それとかけて ${\delta_\mu}^\nu$ というテンソルになる $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルである。

7.5　不変性と共変性

すでに述べたように、物理においては「座標系によらない量」がたいへん大事である。また、「座標系によらず成立する式」も同様に大事である。逆に言えば「特定の座標系でしか計算できない量」や「特定の座標系でしか成立しない式」には意味がない。

ある物理量が「ローレンツ変換に対して不変である」ということは、ある座標系での量 $\phi(x)$ が、別の座標系での同じ地点での量 $\phi(x')$ と

$$\phi(x) = \phi(x') \quad \text{スカラーの変換性} \tag{7.29}$$

という関係を持つ、つまり座標系を変えても同じ値であることを言う。このような性質を持つ量をスカラーあるいは「ローレンツ・スカラー」と呼ぶ[5]。

不変性と同時に重要な概念が「共変性」である。ある方程式が共変であるとは、たとえば $A^\mu = B^\mu$、あるいは $C_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}$ のように、方程式の両辺がローレンツ変換に対して同じ変換をすることを言う。たとえば $A^\mu = B^\mu$ をローレンツ変換すると、

$${\alpha^\mu}_\nu A^\nu = {\alpha^\mu}_\nu B^\nu \tag{7.30}$$

のように、左辺と右辺が同じ変換をして、結局は $(A')^\mu = (B')^\nu$ という、同じ形の式になる。この場合「この方程式は共変である」と言う。

たとえば、$E^\mu = F^{\mu\nu}G_\nu$ という形の方程式は共変である。座標変換すると、

$${\alpha^\mu}_\nu E^\nu = {\alpha^\mu}_\rho {\alpha^\nu}_\lambda F^{\rho\lambda} {\alpha_\nu}^\sigma G_\sigma \tag{7.31}$$

となるが、すでに述べたように、${\alpha^\nu}_\lambda {\alpha_\nu}^\sigma = {\delta_\lambda}^\sigma$ という関係があるので、

$${\alpha^\mu}_\nu E^\nu = {\alpha^\mu}_\rho F^{\rho\lambda} G_\lambda \tag{7.32}$$

となる（「つぶれている」添字である μ に関しては変換を受けない、と考えても良い）。

結局、左辺と右辺で共変ベクトル（下付き）や反変ベクトル（上付き）の添字が同じ形になっていれば、両辺が同じ変換をするので方程式は共変となる。

たとえば

$$A_\mu = B^\mu \tag{7.33}$$

のような式には共変性がない。たまたまある座標系で成立していたとしても、ローレンツ変換したら成立しなくなってしまう。

物理法則は座標系によらず成立すべきであるから、当然ながらその物理法則は共変な式で書かれていなくてはならない。物理法則をテンソルで書く利点は、この共変性が明白になるということである。テンソルで共変に書かれた方程式（つまり左辺と右辺で添字の形があっている方程式）は、ある

[5] これまでは「スカラー」と言えば単に「１成分の量」という意味合いで使っていた人も多いかもしれない。相対論におけるスカラーの定義は「座標を変えても変化しない量」ということである。

座標系で成立するならば別の座標系でも成立する。これが、相対論的に考える時にテンソルを使う大きな利点である。

実はニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ はその意味では物理法則失格である。この方程式は３次元ベクトルで書かれており、４次元的な意味ではまったく共変ではない。

次の章では、ニュートン力学をローレンツ変換にたいして共変になるように書き直す。これによって、力学はまったく新しいものに生まれ変わることになる。

第8章　相対論的力学

8.1　ニュートン力学を相対論的に再構成する

ここまでの流れを整理しよう。

	ガリレイ変換	ローレンツ変換	実験的検証
ニュートン力学 (非相対論的)	○	×	19 世紀まで○
ヘルツの方程式 (非相対論的)	○	×	×
マックスウェル方程式 (相対論的)	×	○	○
相対論的力学？	×	○	○

相対性原理（絶対空間は存在しないということ）を一つの原理として考えてきた。そして、電磁気の基本法則であるマックスウェル方程式が相対性原理を満たしていないように見える（ガリレイ変換で不変でない）ことから、マックスウェル方程式を破棄するか、ガリレイ変換を破棄するかの二者択一を迫られることになった。マイケルソン・モーレーをはじめとする実験事実から、破棄されるべきなのはガリレイ変換であり、ローレンツ変換へと修正すべきであることがわかった。また、時間と空間を別物と考えるのではなく、合わせて４次元の時空を考えて、その４次元を混ぜ合わせるような変換としてローレンツ変換を捉えればよいことがわかった。

そこでもう一度元にもどって考えると、そもそも相対性原理が考えられたのは、ニュートン力学はガリレイ変換で不変であったからである。しかし電磁気に対する考察からガリレイ変換はローレンツ変換へと修正されたのだから、今度はニュートン力学をローレンツ変換で不変になるように作り直さなくてはいけない。この章で考えるのはローレンツ変換で不変になるように作り直された新しい力学、すなわち相対論的力学である。

そこで、どのようにして相対論的力学を作るか、その概要を述べる。ニュートン力学の基本である運動方程式は

$$\frac{dp^i}{dt} = f^i \tag{8.1}$$

という形をしている。p^i は運動量で、具体的には $p^i = m\dfrac{dx^i}{dt}$ である。ニュートン力学では、ある時刻 t において、物体の位置 $x^i(t)$ を時間の関数として与え、時間がたつにつれてこれらがどのように変化していくかを運動方程式を使って追い掛ける。ニュートン力学では時間というものが特別なパラメータとなっている。しかし、時間というものを特別視していては、相対論的に不変な方程式にはならない。運動のパラメータとしては座標時間 t を使うのではなく、固有時 τ を使うべきである。τ は「その物体が静止している座標系で測った時間」という定義になっているので、物体を決めれば一意的に決まり、ローレンツ変換しても変わらない。以下で、

1. 座標時間による微分 $\dfrac{d}{dt}$ は全て固有時微分 $\dfrac{d}{d\tau}$ に置き換える。
2. ３次元ベクトル $x^i = (x(t), y(t), z(t))$ で表されている量は４元ベクトル $x^\mu = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ に拡張する。

3. 方程式の両辺はローレンツ変換した時に同じように変換される (**共変性**) ように作る。

という方針で相対論的力学を作っていこう。

固有時 τ と座標時 t の微分は物体が静止している時には等しい ($d\tau = dt$) ので、このようにして作られた相対論的力学は、物体が静止している状況ではニュートン力学と同じ答を出す。あるいは、「物体の速度が光速 c に比べ十分小さい状況ではニュートン力学に近似できる」と言ってもよい。それゆえ、ニュートン力学は破棄されるわけではなく、相対論的力学の近似として生き残る[1]。

8.2　４元速度

まず、ニュートン力学における３次元速度 $\dfrac{dx^i}{dt}$ を $V^\mu = \left(c\dfrac{dt}{d\tau}, \dfrac{dx}{d\tau}, \dfrac{dy}{d\tau}, \dfrac{dz}{d\tau}\right)$ に置き換える。固有時 τ はローレンツ変換で変化しないため、x^μ が $\alpha^\mu{}_\nu x^\nu$ とローレンツ変換される時、$V^\mu \to \alpha^\mu{}_\nu V^\nu$ とローレンツ変換される。すなわち V^μ は４元ベクトルであり、「４元速度」と呼ばれる。物体の４元速度の自乗を計算すると、

$$\left(-c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right) = -c^2 \tag{8.2}$$

となる。つまり、４元速度は常に時間的（自乗がマイナスになるベクトル）であって、４元速度の自乗は一定値なのである。３次元的に見ると物体はそれぞれ固有の速さを持って運動しているように見えるが、４次元的に見れば全て同じ速さで運動している、と考えることもできる。ただし、

$$(\text{４元速度の自乗}) = (\text{空間的速度の自乗}) - (\text{時間的速度の自乗}) \tag{8.3}$$

という形になっているので、空間的方向の速度が速くなると時間的方向の速度も速くならなくてはいけない。

「時間方向の速度」というのは変な表現だが、今考えている「速度」というのは「単位固有時あたりの変化」という意味であるから、「τ(固有時) が１変化する間に t(座標時) はどれだけ変化するか」ということである。動いているとこれが速くなる。というのはどういうことかというと、「小さい τ の変化に対し、t が大きく変化する」逆に言えば「t が大きく変化しているのに τ があまり変化しない」ということである。つまり、「時間方向の速度が速くなる」というのは、「運動物体の時間は遅れる」ということの別の表現だということになる。

４元速度の第０成分である $c\dfrac{dt}{d\tau}$ を３次元速度 $v^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ を使って表そう。(8.2) より、

$$\begin{aligned} -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{=v^i}\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= -c^2 \\ -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(c^2 - |\vec{v}|^2\right) &= -c^2 \\ \frac{d(ct)}{d\tau} &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{|v|^2}{c^2}}} = c\gamma \end{aligned} \tag{8.4}$$

となって、ウラシマ効果の時間遅れの因子 γ に c をかけたものが出てくる。また、３次元速度 v^i と４次元速度 V^μ の関係は $\dfrac{dx^\mu}{d\tau} = \dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}$ となることから、

$$V^0 = c\gamma, \quad V^i = \gamma v^i \tag{8.5}$$

[1] というより、相対論的力学は近似としてニュートン力学を含まねばならない。新しい理論は、古い理論が説明していた物理現象も説明できるものでなくては意味がないからである。

となる。物体が静止している時、４元速度は $(c,0,0,0)$ となる。そして、速度 v が c に近づくにつれて V^μ は無限大へと発散する。

【以下長い註】 この部分は、最初に勉強する時は理解できなくともよい。

速度の合成則 (6.4) を、４元速度の考え方を使っても導くことができる。x' 座標系で見ると４元速度 V'^μ を持っている物体があったとすると、x 座標系では、

$$V^0=\gamma(V'^0+\beta V'^1), V^1=\gamma(V'^1+\beta V'^0), V^2=V'^2, V^3=V'^3 \tag{8.6}$$

と、ローレンツ変換と同じ変換を受けることになる。$\frac{v^i}{c}=\frac{dx^i}{d(ct)}=\frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{d(ct)}=\frac{V^i}{V^0}$ ということを使うと、

$$\frac{v^1}{c}=\frac{\gamma(V'^1+\beta V'^0)}{\gamma(V'^0+\beta V'^1)}=\frac{V'^1+\beta V'^0}{V'^0+\beta V'^1}=\frac{\frac{V'^1}{V'^0}+\beta}{1+\beta\frac{V'^1}{V'^0}}=\frac{\frac{v'^1}{c}+\beta}{1+\beta\frac{v'^1}{c}}=\frac{1}{c}\frac{v'^1+v}{1+\frac{vv'^1}{c^2}} \tag{8.7}$$

$$\frac{v^2}{c}=\frac{V'^2}{\gamma(V'^0+\beta V'^1)}=\frac{\frac{V'^2}{V'^0}}{\gamma(1+\beta\frac{V'^1}{V'^0})}=\frac{\frac{v'^2}{c}}{\gamma(1+\frac{vv'^1}{c^2})} \tag{8.8}$$

(v^3 も同様) として求めていくこともできる。

【長い註終わり】

8.3　４元加速度、４元運動量と４元力

４元速度をさらに固有時 τ で微分したものを４元加速度と言う。式で書けば $A^\mu=\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ となる。４元加速度は、３次元の加速度 $a^i=\frac{dv^i}{dt}$ とはだいぶ違う形になる。

４元加速度の性質として、４元速度と（４次元の意味で）直交する。なぜなら４元速度の自乗が一定であることから、

$$\begin{aligned} 0=&\ \frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\\ 0=&\ 2\eta_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{dx^\nu}{d\tau}\end{aligned} \tag{8.9}$$

となるからである。この式はすぐ後で使う。

ここで、そもそも運動量やエネルギーというものが、ニュートン力学においてどのように導出されたものか、ということを思い出そう。まず運動方程式

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2}=f^i \tag{8.10}$$

から出発する。この両辺を時間で積分 (区間は $[t_i,t_f]$) すると、

$$m\frac{dx^i}{dt}|_{t=t_f}-m\frac{dx^i}{dt}|_{t=t_i}=\int_{t_i}^{t_f}f^i dt \tag{8.11}$$

という式が出る。これは、運動量の変化が力積である、という式である。

また、x^i で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_f} m\frac{d^2x^i}{dt^2}dx^i &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{dx^i}{dt}dt &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)dt &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2|_{t=t_f} - \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2|_{t=t_i} &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i\end{aligned} \tag{8.12}$$

という式が出る。x_i は時刻 t_i での粒子の位置（x_f, t_f も同様）である。つまり、エネルギーは仕事 $f_i dx^i$ によって変化する量として定義されている。

４元速度に質量[2]をかけたものを４元運動量と呼ぶ。

$$P^\mu = \left(mc\frac{dt}{d\tau}, m\frac{dx}{d\tau}, m\frac{dy}{d\tau}, m\frac{dz}{d\tau}\right) \tag{8.13}$$

のようなベクトルで、これは３次元の運動量

$$p^i = \left(m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}\right) \tag{8.14}$$

と、

$$P^\mu = \left(mc\gamma, \gamma p^1, \gamma p^2, \gamma p^3\right) \tag{8.15}$$

のような関係にある。ここで、４元運動量の第０成分にはどんな意味があるのかを知るために、この４元運動量の微分 dP^μ について考えてみる。

４元加速度と４元速度が直交するという式に m をかけると、$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{dP^\mu}{d\tau}$ を使って、

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dP^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{8.16}$$

という式が出る。この式をさらに少し変形すると、

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}dP^\mu dx^\nu &= 0 \\ -dP^0 d(ct) + dP^i dx^i &= 0 \\ dP^i dx^i &= dP^0 d(ct) \\ \frac{dP^i}{dt}dx^i &= c dP^0\end{aligned} \tag{8.17}$$

となる。つまり、$\frac{dP^i}{dt}$ と dx^i の３次元的内積が cP^0 の変化量となる。ニュートンの運動方程式と同じように、

$$f^i = \frac{dP^i}{dt} \tag{8.18}$$

のようにして力を定義[3]するならば、(8.17) はまさに

$$\text{仕事}\,(f^i dx^i) \quad = \quad cP^0\text{の変化}\,(c dP^0) \tag{8.19}$$

[2]相対論では質量という言葉にいろんな定義があるのだが、少なくともこのテキストに関しては、「質量」とは「静止質量」のことである。他の質量の定義は後で述べるが、基本的な量は「静止質量」であり、これはローレンツ変換によって変化しない、定数である。

[3]この「力」f^i は４元ベクトルではないことに注意。

という式になる。これは cP^0 がエネルギーと解釈できることを示している。つまりエネルギーは「時間方向の運動量 $\times c$」なのである。量子力学で $p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ のような対応になっているのは、エネルギーが時間方向の運動量だからであるとも言える。E だけ符号が違うのも、もちろん $\eta_{\mu\nu}$ が時間的成分のみマイナスであることが関係がある。

４元運動量の自乗は $\eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu=-m^2\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu=-m^2c^2$ であるから、$P^0=\frac{E}{c}$ とおくと、

$$-m^2c^2=-\left(\frac{E}{c}\right)^2+|P^i|^2 \tag{8.20}$$

という式が成立する。上の式から、運動量の大きさが増えるとエネルギーも増加する（自乗の差が一定値なのだから）。

cP^0 がエネルギーと解釈されるべき量であることを、v が c より小さいという近似で確認しよう。

$$cP^0=cmc\gamma=\ mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots\right)=mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\cdots \tag{8.21}$$

となって、定数項 mc^2 と β の４次以上の項を除けばなじみのある運動エネルギーの式 $\frac{1}{2}mv^2$ が出てくる。なお、相対論で有名な公式[4]である $E=mc^2$ はこの式の $\beta=0$ にしたものである (つまり、特別な状況での式であることは忘れてはならない)。

つまり静止している物体も mc^2 だけのエネルギーを持っているということを表している。しかし、通常の力学ではエネルギーの原点には意味がない。取り出すことのできるエネルギーは結局はエネルギーの差であり、cP^0 の最小値は mc^2 なのだから、この mc^2 はこの一個の粒子の運動を考えている限りにおいては取り出すことのできないエネルギーということになる。この「静止エネルギー」mc^2 の意味は、単にエネルギーの原点がずれているだけにすぎないのである。しかしこの mc^2 がないと P^μ が４元ベクトルでなくなってしまうので、４元運動量として意味があるためには mc^2 を消してしまうことはできない。

この時点では mc^2 は、実用的な見地からは深い意味はない。しかし、複数の物体が合体したり、あるいは逆に物体が分裂したりする現象を考えると、この式に含まれる深い意味が明らかになる。これについては後で話そう。

なお、ここで定義した力 $f^i=\frac{dP^i}{dt}$ は、その定義 (t 微分を使ったところ) からして４元ベクトルになっていない。４元ベクトルになる力 F^μ を

$$\frac{dP^\mu}{d\tau}=F^\mu \tag{8.22}$$

で定義すると、$F^\mu=\frac{dt}{d\tau}f^\mu$ という関係が成立する。この τ は、今力が及ぼされている物体の固有時であるから、その物体が速度 u^i を持っているならば、

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{8.23}$$

である。

F^μ を「４元力」または「ミンコフスキーの力」と呼ぶ。

４元力は４元ベクトルであるから、その変換性は他の４元ベクトルと同様で、x 方向に速度 β で移動する座標系へ変換した時、

$$F'^1=\gamma(F^1-\beta F^0),\quad F'^0=\gamma(F^0-\beta F^1),\quad F'^2=F^2,\quad F'^3=F^3 \tag{8.24}$$

[4] 意味はわからなくてもこの式だけは知っている、という人も多いので、もしかすると、物理の公式の中で一番有名かもしれない。

となる。$f^\mu=\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}F^\mu$ という式が成立している (u は今考えている粒子の速度である) ことを考えると、f^μ の方の変換も計算できる。ただしその時は、x 座標系と x' 座標系では、物体の速度 u^i も速度の合成則に従って変換することに注意しよう。したがって f^μ の変換は F^μ に比べると複雑なものになってしまう。

8.4 質量の増大？

よく相対論の本では「運動すると物体の質量が増大する」という意味のことが書いてある。この講義ではここまで一貫して質量 m を定数として扱ってきた。では この m は増大するのだろうか？

もちろん、しない。では「運動すると物体の質量が増大する」とはどういう意味なのか。ここで「そもそも質量の定義とは何か？」ということに立ち戻る必要がある。ニュートン力学における質量は運動方程式

$$f^i=m\frac{d^2x^i}{dt^2}\quad \text{もしくは}\quad f^i=\frac{dp^i}{dt} \tag{8.25}$$

によって規定されている。相対論的力学でも、力として f^μ の方（４元力 F^μ ではなく）を使えば、ニュートンの運動方程式と同じ形の、

$$f^\mu=\frac{dP^\mu}{dt} \tag{8.26}$$

であるが、運動量 P^μ はこの場合４元運動量であって、３次元運動量 p^i とは少し違う。具体的には

$$P^i=m\frac{dx^i}{d\tau}=\frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\underbrace{m}_{\text{静止質量}}\underbrace{\frac{v^i}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{\text{4元速度の空間成分}}=\underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{\text{相対論的質量}}\underbrace{v^i}_{\text{3次元速度}} \tag{8.27}$$

となるわけであるが、この運動量のどこまでを「質量」と考え、どこまでを「速度」と考えるかには、上の二つのような流儀がある。なお、どちらかと言うと単に「質量」という時には m、すなわち運動しているかいないかに関係なく同じ値をとるものを指す方が普通である。

どちらの流儀で考えるにせよ、ある力 f^i を dt 秒間加えた時、$\frac{mv^i}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ が $f^i dt$ だけ増大するのは同じである。なお、実際に P^i を時間で微分したとすると、

$$\begin{aligned}\frac{dP^i}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^i}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right)\\&=\frac{m\frac{dv^i}{dt}}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}+\frac{mv^iv^j\frac{dv^j}{dt}}{c^2\left(1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{8.28}$$

となる。つまり、力 f^i の方向と加速度 $\frac{dv^i}{dt}$ の方向は必ずしも一致しない。速度 v^i と加速度 $\frac{dv^i}{dt}$ が直交しているような場合は第２項が消えるので非常に簡単になる。磁場中を走る荷電粒子の場合、ローレンツ力 $q\vec{v}\times\vec{B}$[5]を受けて円運動するが、加速度は速度と垂直（中心向き）に $\frac{v^2}{r}$ となるので、

$$qvB=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^2}{r} \tag{8.29}$$

[5] ここでは説明しないが、qvB で表されるのが f なのか F なのかは、電磁場をローレンツ変換した時どうなるべきかということから決まる。

となって、半径が $r=\dfrac{mv}{qB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ となる。非相対論的な計算では分母の $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ は表れない。実験によって支持されるのはもちろん相対論的な計算であり、荷電粒子を磁場中で加速する（サイクロトロンなど）実験装置ではこのいわゆる「質量増大」の効果を考えて設計せねばならない。

逆に、運動方向と加速度が同じ方向を向いていると、また話が少し変わる。この場合、v^i も $\dfrac{dv^i}{dt}$ も x 成分だけが零でないとすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dP^1}{dt} &= \frac{m\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}+\frac{mv^2\frac{dv}{dt}}{c^2\left(1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{m\frac{dv}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{mv^2\frac{dv}{dt}}{c^2\left(1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{m}{\left(1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt}
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

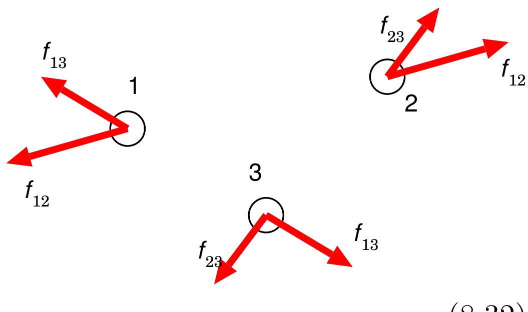
となり、この場合はむしろ質量が $\dfrac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ に増えていることになる。こちらを「縦質量」、さっきの $\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ を「横質量」として区別する場合もある。縦質量の方が横質量より大きいのは、横方向に押す場合は v の大きさは変化しない（つまり運動量の分母は変化しない）が、縦方向に押すと v の大きさを変える（運動量の分母も変える）のに余分な力が必要になるからである。このように、「質量が増大する」という考え方は、「質量」と「速度」の両方が時間的に変化すると考える分だけ、計算がかえって複雑になる場合もあり、あまり推奨されない。質量は常に m で一定だと考えて、運動量の式には分母に $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ があるのだとした方が簡便である。どちらの流儀でも、「相対論では運動量が mv ではなく $mv\gamma$ になる」ということを把握しておけば問題はない。m の部分を「質量」と呼ぶか、$m\gamma$ の部分を「質量」と呼ぶかは定義の問題である。ただし、上に述べたように $\mu\gamma$ を「質量（または相対論的質量）」と呼ぶ流儀はかえってややこしくなることも多いので、最近はあまり使われていないので、使わないようにした方がよさそうである。

ここで、f^μ が有限で時間経過も有限である限り、P^μ は有限の値を取ることに注意しよう。速度を増やしていくと、$v=c$ となったところで P^μ は無限大となる。ゆえに、有限の力で有限の時間加速している限り、光速に達することはない。このことは光速 c が物体の限界速度であることを示している。

8.5　運動量・エネルギーの保存則

ニュートン力学においては、運動量の保存則がどのように導かれたかを思い出そう。質量 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$ の N 個の物体がそれぞれ $\vec{p_i}$ の運動量をもち、i 番目の物体から j 番目の物体へは力 $\vec{f_{ij}}$ が働くとすると、

$$
\frac{d\vec{p_i}}{dt}=\sum_{j\neq i}\vec{f_{ij}}
\tag{8.31}
$$



である。これを i で足し上げると、

$$
\sum_i\frac{d\vec{p_i}}{dt}=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\vec{f_{ij}}
\tag{8.32}
$$

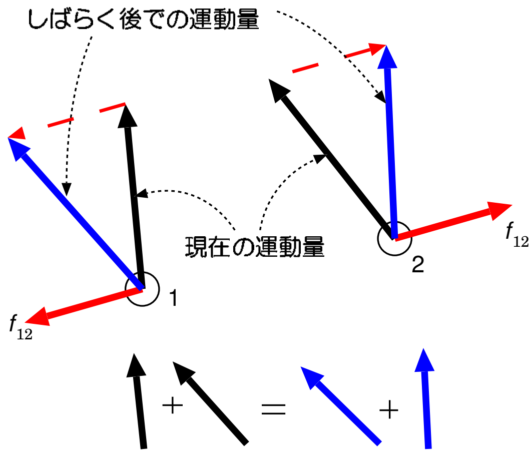
となる。

作用・反作用の法則により、$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$（$i$ 番目が j 番目に及ぼす力は、j 番目が i 番目に及ぼす力と同じ大きさで逆向き）である。$\sum_{i,j}$ の和を取る段階でかならず $\vec{f}_{ij}$ と $\vec{f}_{ji}$ の両方の和が表れるので、この二つが消し合うことにより、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = 0 \tag{8.33}$$

となる。すなわち、運動量の和 $\sum_i \vec{p}_i$ は保存する。

相対論的力学においても $\frac{dP^\mu}{dt} = f^\mu$ が成立しているので、f^μ について作用・反作用の法則が成立していれば、同様に P^μ の和が保存する。ここで、保存則が $\frac{d}{d\tau}\left(\sum P^\mu\right) = 0$ ではなく $\frac{d}{dt}\left(\sum P^\mu\right) = 0$ であることに注意せよ。固有時 τ は粒子一個一個について独立に定義されているものだから、複数の粒子の運動量の固有時微分 $\frac{dP^\mu}{d\tau}$ を足すことには意味がない。作用・反作用の法則が成立するのも、F^μ に対してではなく f^μ に対してである。



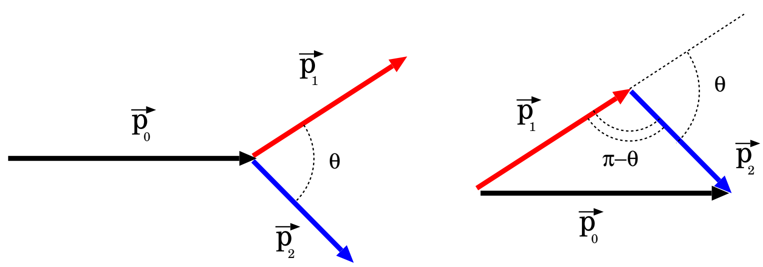
なお、相対論では運動量とエネルギーは同じ 4 元運動量の空間成分と時間成分という形にまとまっているので、運動量だけが保存してエネルギーが保存しないとか、あるいはこの逆のことなどはあり得ない。違う座標系に移れば時間成分と空間成分は入り交じる（たとえば、$P'^0 = \gamma(P^0 - \beta P^1)$ というふうに）ので、全ての座標系で運動量保存則が成立するためには、エネルギーも保存していてくれないと困るのである。これは相対性原理からの帰結である。ニュートン力学では「摩擦があるからエネルギーが保存しない」という状況が許されたが、相対論的力学では摩擦によって失われたエネルギーもちゃんと勘定して保存する形になっていなくてはいけない。

上では作用・反作用の法則が成立ということを仮定したが、相対論の場合にはこの仮定にも注意が必要である。なぜなら、相対論では空間的に離れた場所での同時刻には意味がない。上の図では、離れた物体との間で力が「同時に」働いているかのごとく書いているが、実際にはそんなことは起きない（そもそも、力も光速より速く伝わるはずがない！）。したがって厳密には、作用・反作用の法則を単純に適用してよいのは、物体と物体が接触して（同一時空点に存在して）力を及ぼす場合である。クーロン力を「二つの電荷の押し合い（引き合い）」と考える場合、作用反作用の法則が成立しているとは限らない。ただし、クーロン力を「電荷と、その場所の電磁場との相互作用による力」と考えるならば、ちゃんと作用・反作用が成立するのだが、その場合は「電磁場の持つ運動量」を計算してやらなくてはいけない。

まずは物体が接触して衝突するという単純な問題の場合で相対論的な場合と非相対論的な場合にどのような差があるかを確認しておこう。

静止している質量 m の物体に、同じ質量の物体が運動量 $\vec{p}_0$ を持って衝突したとする。結果として二つの物体の運動量が $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ になったとすると、

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{8.34}$$



という式が成立する（運動量保存）。この式は $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ が三角形を形作ることを示している。一方、非相対論的な計算では、エネルギーの保

存則が

$$\frac{|\vec{p}_0|^2}{2m}=\frac{|\vec{p}_1|^2}{2m}+\frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} \quad \text{すなわち} \quad |\vec{p}_0|^2=|\vec{p}_1|^2+|\vec{p}_2|^2 \tag{8.35}$$

となる。これから $\vec{p}_0,\vec{p}_1,\vec{p}_2$ で作った三角形がピタゴラスの定理を満たすこと、すなわちこれが直角三角形となって、$\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ が垂直であることがわかる。これはビリヤードの玉などでも確認できる現象である。

相対論的な計算では、エネルギー保存則は

$$\sqrt{|\vec{p}_0|^2c^2+m^2c^4}+mc^2=\sqrt{|\vec{p}_1|^2c^2+m^2c^4}+\sqrt{|\vec{p}_2|^2c^2+m^2c^4} \tag{8.36}$$

となるので、もはや $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ は直角ではなくなる。細かい計算は省略するが、角度 θ は 90 度より小さくなる。この現象は霧箱の中にβ線を入射させて、電子と衝突させるなどの実験で実際に起こることが確認されており、相対論的力学が正しいことの証拠の一つとなっている。

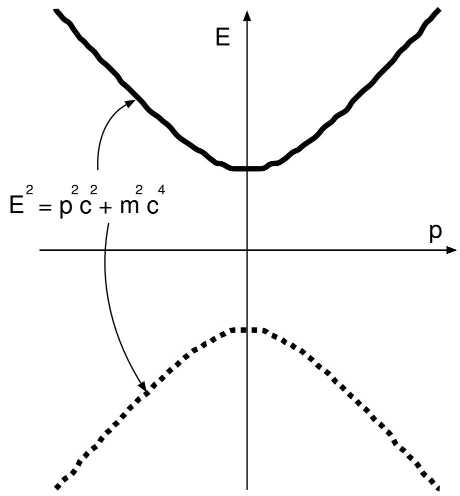
8.6 質量とエネルギーが等価なこと

最初に注意しておくが、この節で扱う質量は、静止質量である。

すなわち、エネルギー E、運動量 p とした時、

$$E^2-p^2c^2=m^2c^4 \tag{8.37}$$

で定義されるところの質量（つまり速度や座標系によらずに定義される質量）である。物体が静止している場合は $p=0$ となって $E=mc^2$ となる。エネルギーの負符号は許さない。許してしまうとエネルギー $E=-\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ は p が大きくなることによっていくらでも ($-\infty$ まで) 小さくなれる。「物体はエネルギーの低い方に行きたがる」という原則からすると全ての物体がみな $E=-\infty$ へと落ち込みたがって具合いが悪い。エネルギーには底がないといけないのである（図参照）。

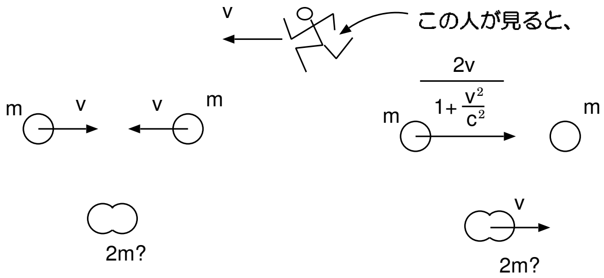


すでに述べたように、エネルギーは「運動量の時間成分 $\times c$」であり、物体が静止している場合でも mc^2 だけあることになる。c が 3×10^8[m/s] であるから、これは非常に大きなエネルギーである（1g の質量は、9×10^{13}[J]、すなわち９０兆ジュールのエネルギーに対応することになる)。

しかし、たとえエネルギーが mc^2 だといっても、これよりも低いエネルギーの状態がないのなら、これには意味がない。エネルギーを取り出すには、状態をエネルギーのより低い状態に「落す」ことによってその差をもらいうける必要があるが、このエネルギーは最小値が mc^2 であるから、このエネルギーを取り出す方法がない。取り出せないエネルギーはいくら大きくとも意味がない。

質量を持った物体と質量を持った物体が反応してその総質量を変えるような過程があれば、この質量の差が物理現象にエネルギーの差として表れてくる。そこで以下で、そのような過程を相対論的に考えると（すなわち、ローレンツ不変性を要求していくと）どのような結果が得られるかを考察しよう。

今、質量 m の二つの物体が逆向きの速度 $\vec{v}$ と $-\vec{v}$ を持って正面衝突して合体したとしよう。単純に考えると質量 $2m$ の静止した物体が残る、と言いたいところだが、はたしてこんな現象は相対論的に正しいだろうか。



これらの物体の 4 元運動量を考えると、保存則の成立から

$$\text{衝突前：}(mc\gamma, mv\gamma, 0, 0) \text{ と } (mc\gamma, -mv\gamma, 0, 0) \tag{8.38}$$

であるから、

$$\text{衝突後：}(2mc\gamma, 0, 0) \tag{8.39}$$

となることになる。$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ は 1 より大きいから、衝突後の質量は $2m$ より大きくなっていることになる。

こうなることが相対論的に考えれば必然であることを確認しよう。相対性原理により、同じ現象を、速度 $-\vec{v}$ を持って運動している観測者が見たとしても同じことが結論できねばならない。この時、速度の合成則を使わねばならないので、速度 $-\vec{v}$ で動きながら速度 $\vec{v}$ の物体を見た時の速度は、$2v$ ではなく、$\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$ であることに注意せよ。この速度に対応する γ は、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2v}{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)^2}} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2-\frac{4v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-2\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}}} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{8.40}$$

となることに注意して、二つの座標系で運動量とエネルギーを計算してみる。

もう一方はもちろん静止して見えるので、

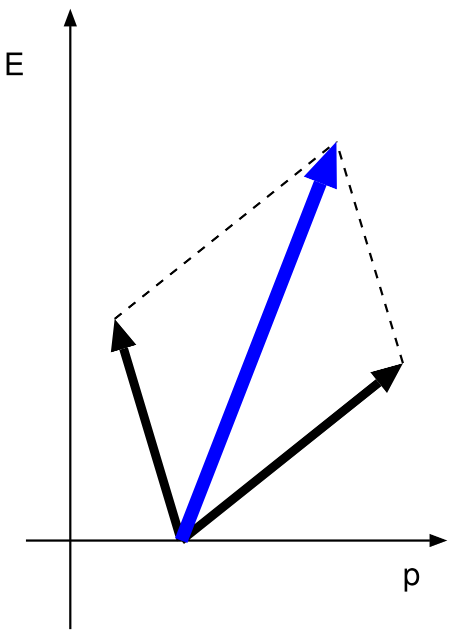
$$\text{衝突前：}\left(\frac{mc\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \frac{2mcv}{1-\frac{v^2}{c^2}},, 0, 0\right) \text{ と } (mc, 0, 0, 0) \tag{8.41}$$

のような運動量を持っていることになる。この二つの和を取って、

$$\text{衝突後：}\left(\frac{2mc}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \frac{2mcv}{1-\frac{v^2}{c^2}},, 0, 0\right) \tag{8.42}$$

となる。

$\frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = M$ と書くと、



$$\left(\frac{Mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right) \tag{8.43}$$

という形になり、質量 M の粒子が速度 v で動いている時の式となる。

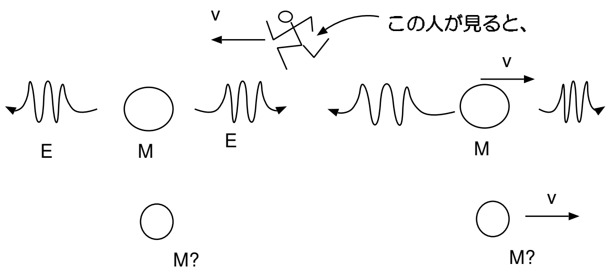
以上からわかることは、二つの粒子が合体するという過程で、エネルギー保存、運動量保存を満足させたなら、必然的に質量は保存しないということである。

このことは以下のように考えることができる。そもそも質量は $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ という式を満たしている。2 個の粒子のエネルギーを足す時、E は常に正であるから、純粋に足し算される。ところが運動量を足す時は、この二つがベクトルであるため、運良

く同じ方向を向いていた場合以外は、単純な和よりも小さくなる。たとえば $(E_1, \vec{p_1})$ というエネルギー、運動量を持った粒子と $(E_2, \vec{p_2})$ というエネルギー、運動量を持った粒子二つをひとまとめに考えると、全エネルギーは $E_1 + E_2$ であり、全運動量は $\vec{p_1} + \vec{p_2}$ であって、この大きさは $|\vec{p_1}| + |\vec{p_2}|$ より大きくなることはない（たいてい、より小さい)。つまり合体の結果、より「時間成分が多い」ベクトルができあがる。これが質量を単純な和よりも大きくするのである。

相対論的に考えれば、かならずある座標系で見れば $\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$ となる。そうなっても $E_1 + E_2$ はもちろん 0 ではなく、しかもこの大きさは $m_1c^2 + m_2c^2$ より大きくなることがすぐにわかる。

左図のような４元ベクトルの足し算では、和の結果は元のベクトルを単純に足したものより長い（４次元的意味で、長い）ベクトルになるのである。



アインシュタイン自身は 1905 年の論文で以下のようにして質量とエネルギーが等価であることを導いている。今、静止した、質量 M の物体が反対向きに２個の光を出す。光のエネルギーが一個あたり E だとすると、物体のエネルギーは $2E$ 減るはずである。しかし、逆向きに飛び出したのであるから、物体の運動量は変化せず、今も止まっているはずである。これを、物体が速度 V で動いて見える座標系から見たとする。V の方向は光の飛び出した方向と同じだったとする (註：アインシュタインは角度 θ の方向に飛び出すとして一般的に解いている)。光はエネルギー E と運動量の大きさ p の間に $E = pc$ の関係があるので、物体の静止系ではエネルギー E で運動量 $\pm E/c$ である。運動している系では、これをローレンツ変換した量となる。表にまとめると、

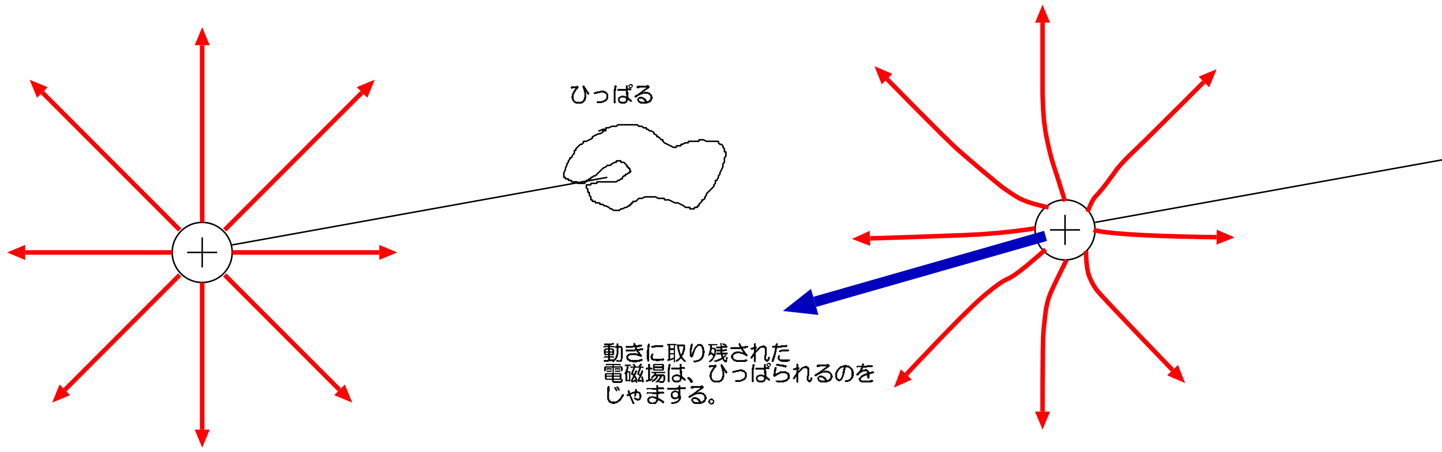
	静止系		運動系	
	エネルギー	運動量	エネルギー	運動量
物体	Mc^2	0	$Mc^2\gamma$	$MV\gamma$
光 1	E	E/c	$\gamma(E - VE/c)$	$\gamma(E/c - VE/c^2)$
光 2	E	$-E/c$	$\gamma(E + VE/c)$	$\gamma(-E/c - VE/c^2)$
放射後の物体	$Mc^2 - 2E$	0	$(Mc^2 - 2E)\gamma$	$(M - 2E/c^2)V\gamma$

であり、この式を見ても、放射後の物体が $M - 2E/c^2$ の質量を持った物体として振る舞うことがわかる。なお、アインシュタインがこの式を導いた時、光のエネルギーと運動量が運動系でどのようになるのかはローレンツ変換によってではなく、電磁気の法則から導いている。アインシュタインはこのような考察から、どんな形であれエネルギーが放射されるとその物体の質量は E/c^2 だけ減少するであろうと結論した。

同様に、熱も質量に貢献する。熱が移動するということはミクロにみれば分子の運動エネルギーが増すということである。N 個の粒子からなる系があるとして、書く粒子が４元速度 P_I^μ を持っている (I は粒子を区別する添字とする) とすると、全体としては $\sum_I P_I^\mu$ の４元運動量を持つことになる。この N 個の粒子が箱に閉じ込められた気体だとして、箱の静止系で見れば運動量の和 $\sum_I P_I^i = 0$ となる（全体として気体が動いてないのだから)。しかし $\sum_I P_I^0$ はもちろん 0 ではなく、単なる静止エネルギーの和 $\sum_I m_I c^2$ より大きくなる $\left(P_I^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_I^2}{c^2}}} \right)$。つまり、箱に入った気体のように、個々の構成粒子は運動しているが全体としては静止しているような物体の質量は、その運動エネルギーに対応する分だけ、大きくなるのである。

$E = mc^2$ という式は原子力などでのみクローズアップされることが多いが、もちろん原子力特有のものではなく、全てのエネルギーで成立すると考えられる。たとえば伸び縮みしたばねは、自然長のバネより $\frac{\frac{1}{2}kx^2}{c^2}$ だけ質量が大きいであろうと思われる。ただしこのような日常的なレベルでは $c = 3 \times 10^8$ という数字の大きさのために、観測可能なほどの差にはならない。

実は $E = mc^2$ という式は、アインシュタインが作ったものでもなければ、相対論によって始めて導かれたものでもない。純粋に電磁気学的な計算から、電子のような荷電粒子を動かす時の抵抗（慣性に相当する）が、回りの電場のエネルギーの分だけ増えることを電磁気の法則から導かれていた。簡単に言うと、電子を動かそうとすると、回りの電場も動かさなくてはいけない。しかし、電場は電子と全く同じように時間的に変化することはできず、電場の変化は電子の運動に、少し遅れることになる。この遅れた電場は電子を加速と逆方向にひっぱるのである。



電子を加速するためには、その力の分だけ余計な力が必要になる。これがあたかも「電子の周りの電磁場も質量を持っている」かのように作用するのである。ポアンカレやローレンツの計算により、この質量は電磁場のエネルギーに比例し、かつ $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ と同じ速度依存性を持つことも計算されていたのである。もちろんこれだけでは、電磁的なエネルギーを起源とする質量以外に対しても同じ式が成立するかどうかは、実験してみないとわからない。ただ、ローレンツ変換に対する不変性を考えると、そうであることがもっともらしい（相対論的には自然な結論である）ということが言えるのみである。幸いにも、実験はそれを支持している。

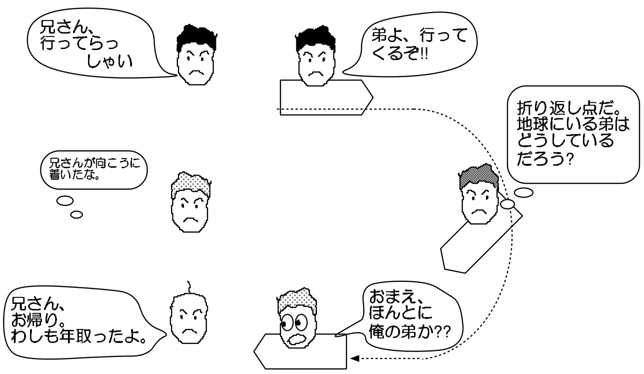
たとえばヘリウム ${}^4_2\mathrm{He}$（２つの陽子、２つの中性子、２つの電子からなる）の質量は 4.0026032497u（原子質量単位）であって、重水素（１つの陽子、１つの中性子、１つの電子よりなる）の質量 2.01410177779u の２倍より少し軽い。そもそも原子質量単位は ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ の質量を 12u として定義されているが、水素 ${}^1_1\mathrm{H}$ の質量は 1.0078250319u である。このように原子は構成要素である陽子や中性子の質量の和を取ったものよりも軽くなる。これを質量欠損と呼び、その原因は原子が作られる時に、γ線などのさまざまな形でエネルギーが放出されることである。鉄など、周期表で真ん中あたりにある元素は質量欠損の割合がもっとも大きく、その分安定であり、ウランなどを核分裂させるとエネルギーが得られる理由はこれである。

ポアンカレやローレンツは相対論的見地を持って計算したわけではなかったのに、このような結果が出た。しかしそれは驚くにはあたらない。相対論はそもそも、電磁気学（あるいはマックスウェル方程式）を尊重することによって生まれたものである。だからマックスウェル方程式にしたがった計算を正しく実行すれば、相対論的にも正しい結果が出るのは当然なのである。特殊相対性理論がマックスウェル方程式によって記述される電磁気学を正しく発展させた結果生まれたものであることがこの事実からもわかる。むしろ、相対論を持って電磁気学が完結すると言ってもよい。

第9章　パラドックス

相対論に関しては、いくつかのパラドックス（逆説）と呼ばれるものが存在する。これらは一見パラドックスではあるが、相対論をよく理解していれば実は不思議なものでもなんでもない。

9.1　双子のパラドックス



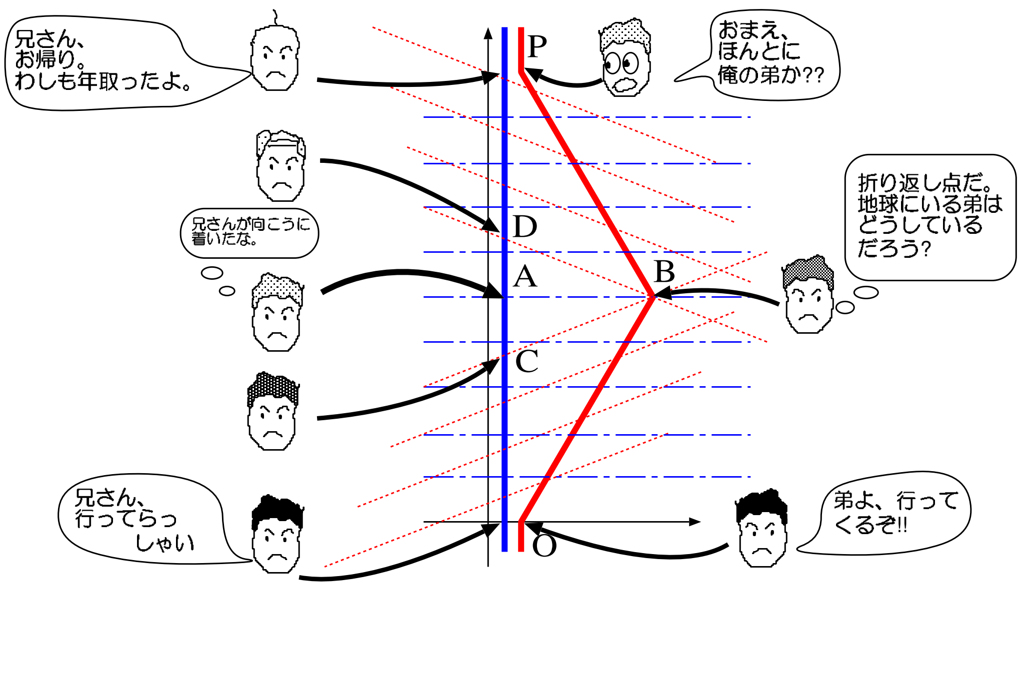
相対論で一番有名なパラドックスであろう。ただ、このパラドックスにはいくつかのレベルがあり、深いレベルまで考えると一般相対論を使って解くことが必要になる。ここではそこまで立ち入らずに、浅いレベル（でも充分難しいし面白い）だけを考えよう。

まず素朴にパラドックスの概要を述べよう。双子の兄と弟がいるとする。兄が亜光速で飛ぶことができるロケットに乗って宇宙の彼方まで旅をして、地球に帰ってきたとしよう。弟はずっと地球で待っている。運動していると固有時が短くなる（ウラシマ効果）ことから、帰ってきた兄は弟より若い。

そこでこのような主張を誰かがしたとしてみよう。

> **弟および地球から見れば確かに兄は運動して帰ってきた。しかし相対的に考えて兄が静止する立場で見たならば弟と地球の方こそ運動して、兄の元に帰ってきたと考えられるのではないのか。その場合弟の方が若くあるべきだ。これは矛盾である。**

確かにこれは (一見) 矛盾に思える。しかし具体的に図を書いて考えてみると、そうではない。まず、兄と弟がお互いにお互いの時間を遅く感じるということを、図で表してみると以下のようになる。



兄が弟（地球）から一番遠くまで行って、今まさにUターンしている時の時空点は図の B である。弟にしてみれば、この時間、自分は図の A にいる。弟の同時刻線は図の水平線（一点鎖線）であることに注意。つまり、

【弟の主観】兄が OB と移動している間に、自分は OA と移動した（空間的には移動してない）。

なのである。そして、図で見ると OB>OA に見えるだろうが、兄の座標系と弟の座標系で時間の目盛りが γ 倍違うことを考慮すると OA>OB となる。

一方、兄にとっての同時刻線は図の破線（斜め線）であるから、

【兄の主観】自分が OB と移動している（空間的には移動してない）間に、弟は OC と移動した。

となる。この場合は目盛りの違いを考慮しても、OB>OC であるので、まとめて、OA>OB>OC となっている。つまり、互いに互いの時間を「遅い」と感じる。ここまでは、問題は完全に「相対的」である。

問題は兄がUターンした時に何が起こるかである。この時、兄の速度が変わったことに応じて、「同時刻線」が傾きを変える。つまり、B 点で一瞬で加速が終わったとすると、加速前は B 点と C 点が「同時刻」だったのに、加速後は B 点と D 点が「同時刻」なのである。兄の主観では、一瞬で弟の時間が C 点から D 点までいっきに経過したように感じることになる。弟の主観では、このような一瞬の時間経過はない。この不平等性のおかげで、兄の方が時間が遅くなるという不平等性が生じる。

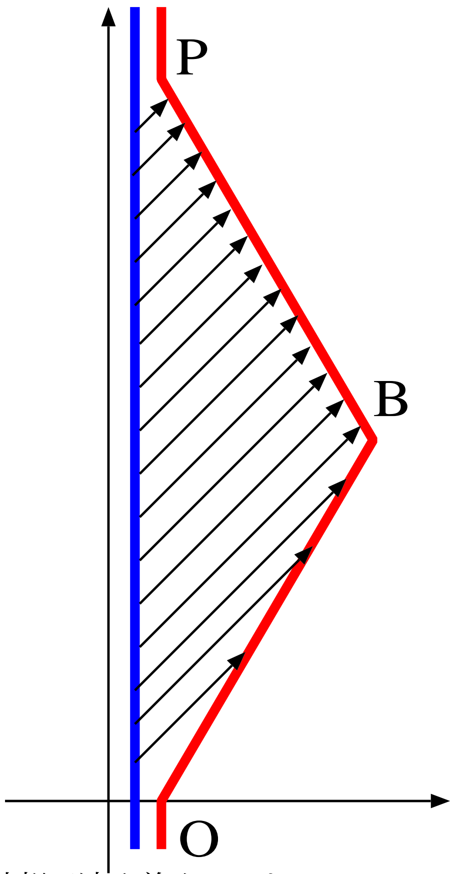
帰りについて考えると、

【弟の主観】兄が BP と移動している間に、自分は AP と移動した（空間的には移動してない）。

に対し、

【兄の主観】自分が BP と移動している（空間的には移動してない）間に、弟は DP と移動した。

であって、AP>BP>DP となって、やはり問題は相対的である。つまり、兄の加速という一瞬の間だけ、相対性が崩れているのである。



ここで、「経過したように感じる」ということをもう少しまじめに検証してみよう。実際には、兄は弟から光がこない限り、「弟の時計が指している時刻」を知ることはできない。そこで弟から時報を乗せた信号が電波で兄に向けて送られていたとしよう。この電波の様子を描いたのが右の図である。図でわかるように、B 点（兄のUターン地点）までは、兄が聞く時報の間隔は、弟が時報を出す間隔よりもずっと空いている。兄は「ずいぶん間延びした時報だなぁ」と思うはずである。兄が弟から遠ざかっているために、光が到達するのに余分に時間がかかるせいである。

逆に、B 地点を過ぎてからは、兄が受け取る時報の間隔は弟が出す時報の間隔よりも、ずっと短くなる。兄が近づくことによって時報が速く着くのである。よって、兄が自分の見た目だけで判断したとしたら、

折り返し点（B 点）に着くまでは弟はゆっくり年をとっていたのに、折り返してからは弟の方が速く年を取るようになった。戻ってきたら弟の方が年をとっていた。

と判断することになるだろう。つまり、兄が弟を目でみている限りにおいて、瞬間的に時間がたつなどということはない。最初に述べた考え方の場合は、兄が「今見ている弟の姿は○年前に出た光のはず。ということは今の弟の年齢はこれくらい」という計算をやって自分と弟の時計を比較しているのである。そしてこの計算法が、Uターンする前とした後でがらっと変わってしまう（同時刻がずれるから）ために、一瞬で弟の時間がたってしまうという結果になる。

別の言い方をすると、弟は常に一つの慣性系の上に乗っているが、兄はそうではない。往路の慣性系と復路の慣性系は別の座標系であり、加速する時に兄は「座標系の乗り換え」を行う。その時に時間がずれるのである。

ここで、もう一歩つっこんだ主張をしてみよう。

> 相対論の本質は「物理は相対的であって、どっちが静止しているかを決めることはできない」というものではなかったか。ならば兄の方が動いたと考えなくては問題が解けないというのは、相対論の本質にもとるのではないか。

ところがそうではない。大事なことは、兄が途中で「減速＋加速」をしているということである。「（二つの慣性系のうち）どっちが静止しているか決められない」とずっと述べてきたが、加速をしている間の兄は慣性系にはいない。物理的には、この間大きな慣性力を受けているはずである（急ブレーキと急発進をしているのだから）。この慣性力が働くか否かという物理的な違いによって、兄は自分が慣性系にはいないことを実感できる。弟にはもちろんそんなことはない。つまり、兄と弟の立場はこのような意味で（物理的に）対等ではないのである。

さらにこのパラドックスに対して深く考えると、次のような主張もできる。

> なるほど、兄は慣性力を感じるから自分が慣性系にいないことがわかる、というのはもっともらしい。しかし兄はそれを慣性力と考えず「ややっ、突然宇宙全体に重力が発生したぞ」と解釈することも可能であるはずだ。そう考えたとしたら、やはり動いているのは弟の方になるのではないか。

運動が相対的かどうか、という話が「宇宙全体に力が発生したとしたら？」という疑問にまで拡大するあたり、マッハによる「ニュートンのバケツ」問題を思い出させる。残念ながら、ここまでつっこんだ質問をしてこられると、この講義の範囲内では解答は出せない。一般相対論を使うと「重力が発生した」という立場で問題を解き直すことができ、この立場で計算すると重力の影響で時間にずれが生じるので、やはり兄の方が若くなる。

9.2　２台のロケットのパラドックス

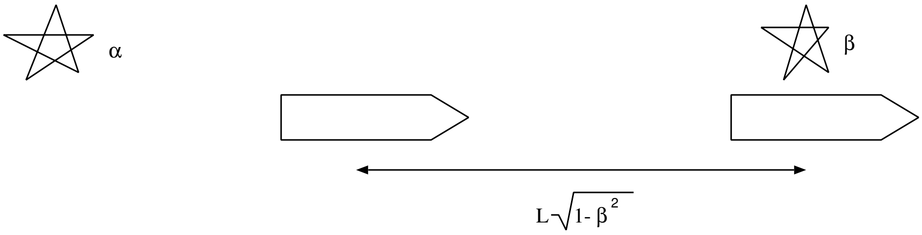
続いて、ローレンツ収縮（もちろん新しい意味の方）に関するパラドックスを紹介しよう。

> **今、２台のロケット A と B が、それぞれ星 α と星 β の近くにいる。**

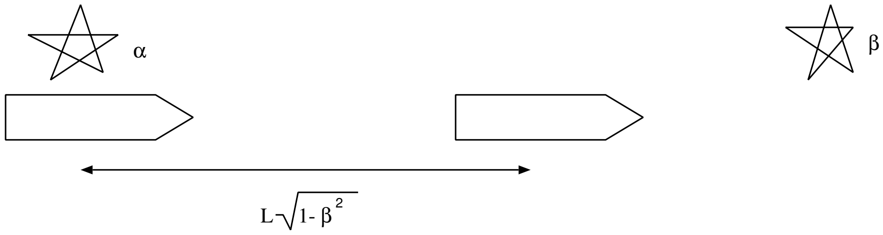
２台のロケットの距離（星αと星βの距離）は L であるとする。ここでこのロケットが同時に加速して、瞬時に速度 v に達したとする。すると、ロケットとロケットの間隔はローレンツ収縮して、$L\sqrt{1-\beta^2}(\beta=\frac{v}{c})$ となるはずである。ではいったいこの２台のロケットの位置関係はどのようになるのだろう？

たとえば $L=10$ 光年として、$\beta=0.8$ とすると、$\sqrt{1-\beta^2}=0.6$ なので、$L\sqrt{1-\beta^2}$ は 6 光年となる。

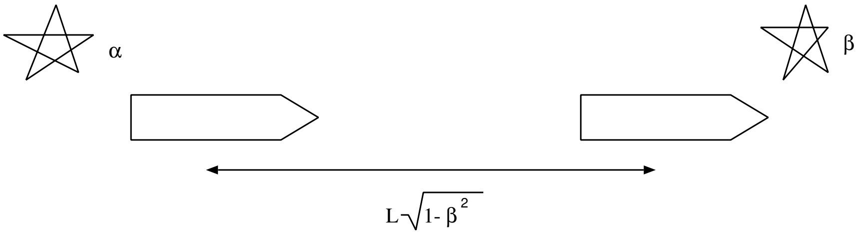
「瞬時に加速したんだから、まだ B はβの近くにいるだろう」と考えると、



となる。しかしこれでは、A が一挙に 4 光年もαから離れてしまっている。しかし、「まだ A はαの近くにいるだろう」と考えると

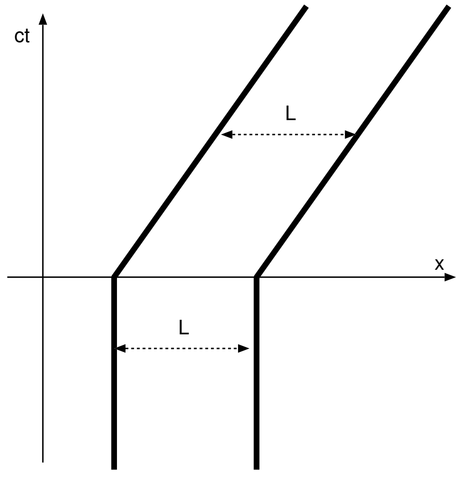


となって、今度は B が 4 光年もバックすることになる。「じゃあきっと真ん中でしょ」と考えると、



となって A が一瞬で 2 光年進み、B が一瞬で 2 光年バックすることになる。そんなばかなことはないだろう。

実際にどうなるかという解答は、わかりきっている。「A はαの近くにいるし、B はβの近くにいる」というものである。一瞬で加速したというのだから、まだ遠くまで行っていないのは当然である。



相対論で何かの運動を考えていてよくわからなくなった時は、(x,ct) のグラフを書いてみるのがよい。２台のロケットの動きを (x,ct) グラフに書き込めば、右のようになるだろう。当然、ロケットとロケットの間隔は L のままである（もしロケットの間隔が $L\sqrt{1-\beta^2}$ に変化するとしたら、どんな変な図を書かなくてはいけないか、考えてみるとよい！）。

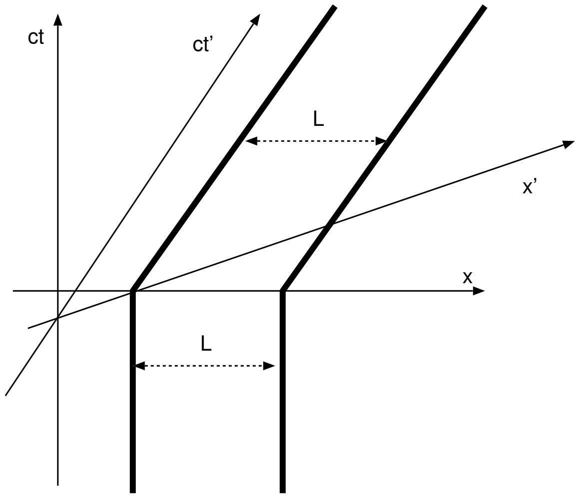
では、動いている物体は長さが縮むという、（新しい意味での）ローレンツ短縮の話は間違いなのだろうか？

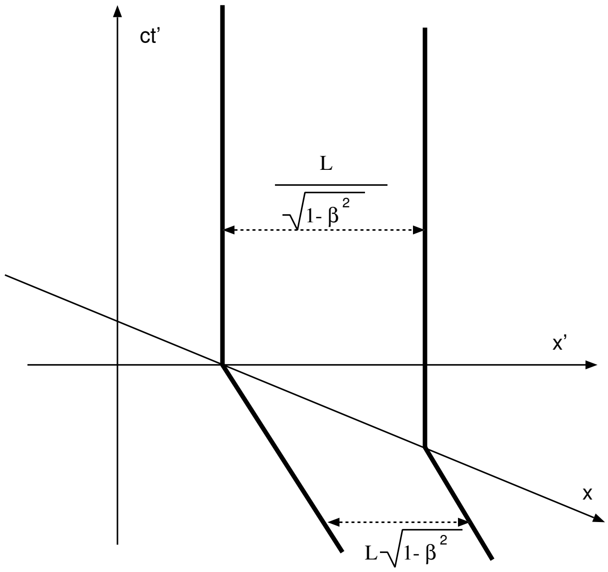
ここでもう一度前章の（新しい意味での）ローレンツ短縮について考えてみよう。長さ L の棒を、棒に対して動いている座標系から見ると、長さが $L\sqrt{1-\beta^2}$ に

見える。今は棒がロケット間の距離に変わっているが、本質的な内容は同じである。ここで上の考察と、ローレンツ短縮の両方が満足されるとしたら、「ロケットが加速し終わった後のロケット静止系では、ロケット A とロケット B の間隔は $\dfrac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$ になっていて、それがローレンツ短縮して L になっている」と考える他はない。

しかし、静止していた時に L だったロケットの間隔が、動き出すと伸びるというのはなぜだろう???

そこで、このパラドックスの問題文を読み直してみよう。相対論を考えるときには注意深く使わなくてはいけない言葉が無造作に使われているのに気が付くはずである。それは、「**ここでこのロケットが同時に加速して、瞬時に速度** v **に達したとする。**」というところの '**同時**' である。相対論において、ある座標系で同時に起こることは別の座標系では同時に起こらない。





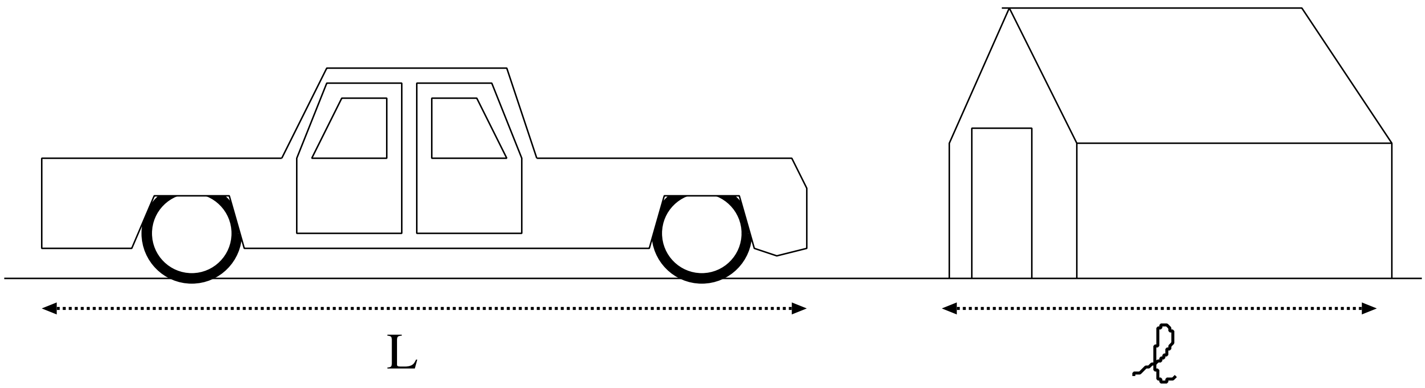
ということを思い出して、さっきの時空図に、ロケットが加速し終わった後のロケット静止系を書き込んでみよう。結果は上左の図のようになる。この座標系 (x', ct') での同時刻面は x' 軸が示すように斜めに傾く。それゆえ、この座標系で見ると、ロケットの先端の方が先に加速し始めたことになる。

これをよりよく見るために、(x', ct') 座標系が水平・垂直になるように書き直したのが上右図である。このように、加速後の座標系を基準にとって考えると、ロケットは先端が先に加速を始めるので、結果として「伸びる」ということになる。

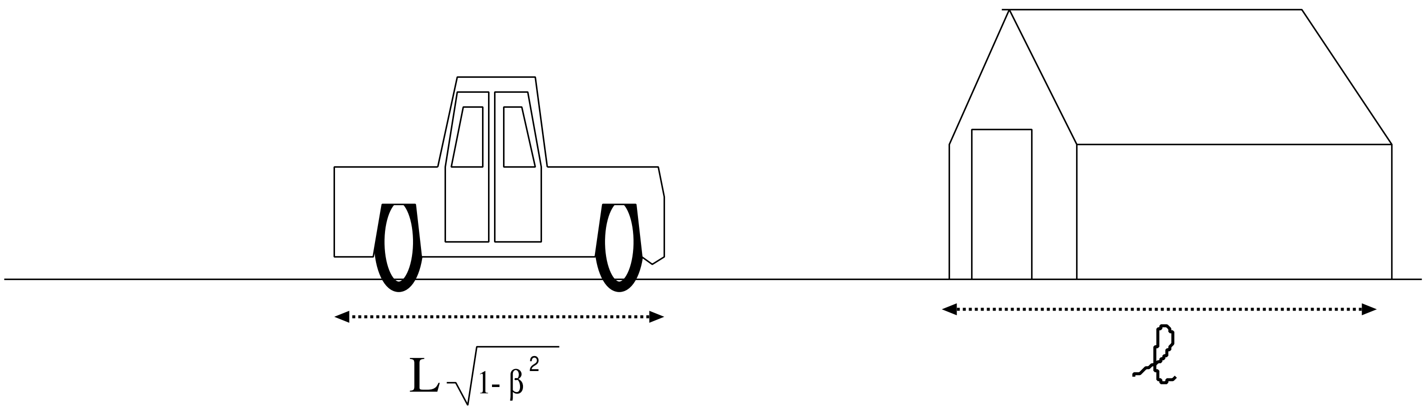
相対論では離れた場所の「同時」は座標系が変わればどんどん変化する。それゆえ、「２台のロケットが同時に発進する」などという表現には注意が必要なのである。同じ理由で、相対論においては「変形しない物体（剛体）」などというものはあり得ない（もっとも、全く動かないか等速運動を続けるのなら話は別）。何かの加速を受けると必ず、その物体内の別の場所は（座標系によっては）別のタイミングで加速させられてしまうからである。

9.3　ガレージのパラドックス

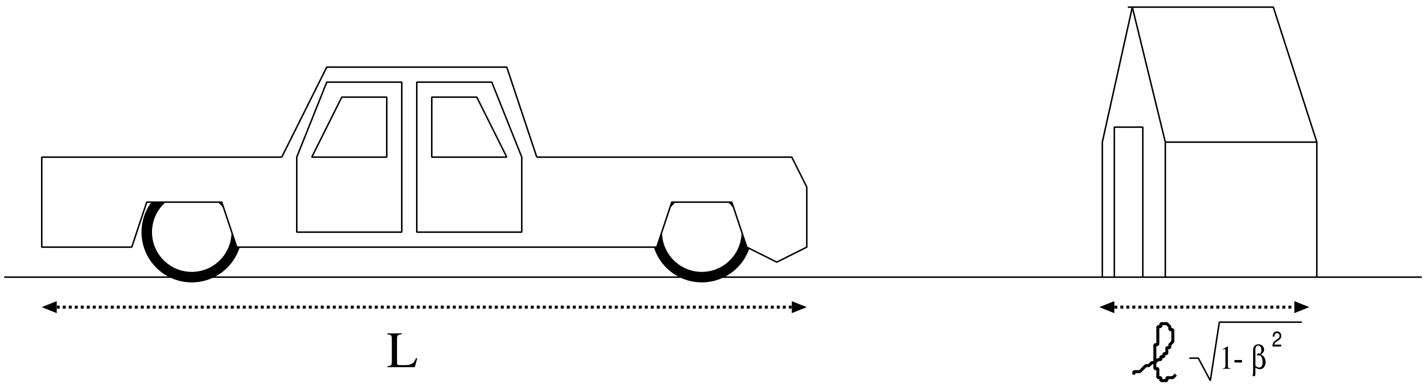
２台のロケットのパラドックスに似た問題である。簡単に言うと「固有長さ L の車を固有長さ ℓ（$L > \ell$）のガレージに入れることができますか」という問題である。



常識的に考えればできないに決まっているが、車の方が亜光速で走っているとすれば、その長さは $L\sqrt{1-\beta^2}$ に縮む。だからガレージの中に車が亜光速でつっこんできて、中に入ってしまっている時にさっとドアを閉めれば車はガレージの中に入る。そのまま亜光速で走り続ければ壁に激突して壊れるだろうが、今は壊すかどうかは関係なく、入るかどうかだけを問題にしている。「壊して入れるのは入れるうちに入らない」という反論は却下である。



これがなぜパラドックスかというと、相対論的考え方をして、車が止まっていてガレージが走ってくる座標系で考えてみると、入らないように思えるからである。この場合はガレージの方が $\ell\sqrt{1-\beta^2}$ に縮んでいるのであるから。



このパラドックスがどのように解決されるか、正解は述べないが、ここまでの講義で「相対論的考え方」を身につけることができている人なら、上の文章の中に相対論的に考える時に注意しなくてはいけない表現が混じっていることに気づくだろう。

第10章　電磁気の４次元的な記述

10.1　マックスウェル方程式を４次元的に

せっかく、電磁気学の基本方程式が不変になるようにローレンツ変換を定義したわけであるが、では電磁場そのものがどのようにローレンツ変換されるのか、まだ計算していなかった。その部分を今から実行する。そのためには、電場と磁場を使って電磁場を表現することはあまり得策ではない。電場や磁場は３次元のベクトルではあるが、４元ベクトルではないからである。

そこで、電磁場を相対論的に表現するものとして４元ベクトルポテンシャルを導入する。

もう一度マックスウェル方程式を考えよう。

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \left(\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) \tag{10.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{10.2}$$

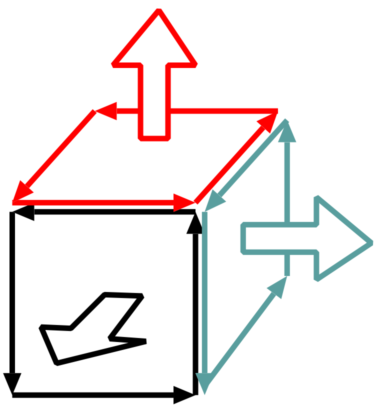
$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \qquad \left(\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right)\right) \tag{10.3}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10.4}$$

ただし右の括弧内は真空中であるとして、$\vec{D}, \vec{H}$ を使わないで書いた形である。以下では真空中のみを考えることにする。この式は $\vec{j}, \rho$ が与えられているとして、$\vec{E}, \vec{B}$ を求めるという式になっている。

ここでまず $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ という式に注目しよう。「div が 0 になるようなベクトルは、別のベクトルの rot で書ける」という法則[1]があるので、そのベクトルを $\vec{A}$ と書くことにして、$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ とする。$\vec{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ。

【補足】 **この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。**



「div が 0 になるようなベクトルは、別のベクトルの rot で書ける」を証明するには、具体的にそういうベクトルが作れることを示せばよい（面倒ではあるが、少し試行錯誤するとできる）。ここではその逆「何かのベクトルの rot の div は 0 である」ということを、図で説明しよう。rot のそもそもの定義は、微小な面を考えて、その面の回りを回りながらベクトルを線積分した結果を微小面積で割ったものであった。別の言い方をすれば、$\mathrm{rot}\vec{A}$ とは、$\vec{A}$ を力と見立て、微小面積を回る経路で一周した時に $\vec{A}$ のする仕事である。

ベクトルの rot で作ったベクトルの div を作ってみると、左の図のようになる。立方体の各面で、外向きのベクトルに対して右ネジの方向に回りつつその仕事を計算するのが $\mathrm{rot}\vec{A}$ であり、その「外向き」の量を全部足したものが $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})$ となる。図をよく見ると、矢印が各辺を２回ずつ、逆向きに通っている。この部分で計算される「仕事」は互いに消し合うので、全部足すと 0 になる。

【補足終わり】

[1] 適切な境界条件のもとで成立する。

静電気学では、$\mathrm{rot}\vec{E}=0$ である。「rot が 0 になるようなベクトルは、スカラーの grad で書ける」という法則[2]もあるので、$\vec{E}=-\mathrm{grad}\phi$ と書ける。ϕ は電位、またはスカラーポテンシャルと呼ぶ。

この状況の物理的意味は以下の通りである。$\vec{F}$ が力だとして、その線積分 $\int\vec{F}\cdot d\vec{x}$ は仕事である。これを微小な面積の回りで積分したものが rot であるから、これが 0 であるということは、一周回ってくると仕事が 0、つまりこの力が保存力だということを意味する。保存力であれば対応する位置エネルギー ϕ が存在し、$\vec{F}=-\mathrm{grad}\phi$ と書ける。

静電気学を離れ、時間的に変化するような電磁場を扱うとなると、この式は少し修正される。なぜなら、時間的に変化する電磁場では $\mathrm{rot}\vec{E}$ は 0 ではなく、$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ が成立するからである（つまりは、回路に誘導起電力が発生するよ、ということを述べている）。この式から、

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} \tag{10.5}$$

となる。ゆえに、$\vec{E}$ は $-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ という項を含むべきである（$\vec{E}$ に元から含まれている $-\mathrm{grad}\phi$ は、rot を取ると消えることに注意）。以上から、

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A},\quad \vec{E}=-\mathrm{grad}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{10.6}$$

と置くことで、マックスウェル方程式のうち、(10.2) と (10.4) は自動的に満たされた。

ここで、我々のやりたいことは相対論的に共変な式に書き直すことなので、$\vec{E},\vec{B}$ の定義をできる限り４元ベクトルを使った式に直していこう。まず、

$$B_1=\partial_2A_3-\partial_3A_2, B_2=\partial_3A_1-\partial_1A_3, B_3=\partial_1A_2-\partial_2A_1 \tag{10.7}$$

と書ける。

$\vec{E}$ の式に関しては、$\frac{\partial}{\partial t}$ があるが、４次元的な式にするためには、ここは $\frac{\partial}{\partial(ct)}=\frac{\partial}{\partial x^0}=\partial_0$ に直したい。そこで両辺を c で割って、

$$\frac{1}{c}\vec{E}=-\mathrm{grad}\left(\frac{\phi}{c}\right)-\partial_0\vec{A} \tag{10.8}$$

という式にする。これをテンソル記号で書くと、

$$\frac{1}{c}E_i=-\partial_i\left(\frac{\phi}{c}\right)-\partial_0A_i \tag{10.9}$$

となる。ここで、$\frac{\phi}{c}=A^0=-A_0$ とおくと、

$$\frac{1}{c}E_i=\partial_iA_0-\partial_0A_i \tag{10.10}$$

である。こうすることによって、$\vec{E}$ も $\vec{B}$ も $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ の形（A_μ を微分して、添字を取り替えたものを引く形）になった。ただし、A^0 が A^i と合わせて４元ベクトルとなるかどうかは、まだわからない。それは後で確認しよう。

そこで電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$（もちろんこれがテンソルになるかどうかの証明はまだされていない）を

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{10.11}$$

[2]実際は、この法則も、「div が 0 なら rot で書ける」の方も、適切な境界条件のもとでのみ成立する。たいていの場合は適切な境界条件がとられている。

と定義すれば、

$$\frac{E_i}{c} = F_{i0} = -F_{0i} = F^{0i} = -F^{i0} \tag{10.12}$$

および

$$B_1 = F_{23}, B_2 = F_{31}, B_3 = F_{12} \quad \text{まとめて、} B_i = \epsilon_{ijk}F_{jk} \tag{10.13}$$

のようにして電場と磁場を一つの式で表せる。

定義からわかるように、$F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$。すなわち、$F_{\mu\nu}$ は反対称である。それゆえ、成分は６個しかない。電場３個と磁束密度３個がちょうどこの６個になっている。行列の形にまとめて書くと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

である。

マックスウェル方程式のうち、$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ は

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \tag{10.15}$$

と書けるし、$\mathrm{rot}E = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ は両辺を c で割ってから x 成分を考えると、

$$\partial_2 F_{30} - \partial_3 F_{20} = -\partial_0 F_{23} \tag{10.16}$$

となり、変形すると、

$$\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = 0 \tag{10.17}$$

と書ける。まとめると、

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \tag{10.18}$$

と一つの式にまとまる。μ, ν, ρ には、0〜3 のうち、３つの重ならない数字が入る。

残る式を考えよう。$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$ は、両辺を c で割ってから書き直すと、

$$\partial_1 \underbrace{F^{01}}_{\frac{E_1}{c}} + \partial_2 \underbrace{F^{02}}_{\frac{E_2}{c}} + \partial_3 \underbrace{F^{03}}_{\frac{E_3}{c}} = \frac{1}{c\epsilon_0}\rho = \mu_0 \rho c \tag{10.19}$$

となる（最後では $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ を使った）。ここで、どうせ 0 である $\partial_0 F^{00}$ を足しておくと、

$$\underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = \partial_\mu F^{0\mu} = \mu_0 \rho c \tag{10.20}$$

となる。

$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right)$ の x 成分は

$$\partial_2 \underbrace{F_{12}}_{B_3} - \partial_3 \underbrace{F_{31}}_{B_2} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \underbrace{c\partial_0}_{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\underbrace{cF^{01}}_{E_1} \right) + j^1 \right) \tag{10.21}$$

と言う式が出せる。再び $c^2 = \dfrac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ を使いつつ変形すると、

$$\begin{aligned} \partial_2 F^{12} - \partial_3 F^{31} =& \ \partial_0 F^{01} + \mu_0 j^1 \\ \underbrace{\partial_1 F^{11}}_{=0} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + \partial_0 F^{10} =& \ \mu_0 j^1 \\ \partial_\mu F^{1\mu} =& \ \mu_0 j^1 \end{aligned} \tag{10.22}$$

以上から、$\rho c = j^0$ とすると、

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\nu \tag{10.23}$$

とまとまった式になることがわかる。では、$\rho c = j^0$ とすることは正しいだろうか？

実際、電荷密度 ρ と電流密度 $\vec{j}$ は $(\rho c, \vec{j})$ はという組み合わせで 4 元ベクトルになっている。つまり、$(\rho c, \vec{j})$ は 4 元ベクトル j^μ の時間成分、空間成分と考えることができるのである。4 元ベクトルであるからある座標系からそれに対して x 方向に速度 v で動いているような別の座標系へと座標変換すれば、

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1), j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0), j'^2 = j^2, j'^3 = j^3 \tag{10.24}$$

のようにローレンツ変換されることになる。

簡単な場合で上の式を確認しよう。x, y, z の 3 方向にそれぞれ L の広がりを持った立方体を考え、その中にまんべんなく電荷 Q が静止して分布しているとしよう。この時、$\rho = \dfrac{Q}{L^3}$ であり、$\vec{j} = 0$ である。

これを x 軸マイナス方向に速さ v で動きながら見たとしよう。立方体の x 方向の辺のみがローレンツ短縮され、$L\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ と変化する。それゆえこの座標系での電荷密度は

$$\rho' = \frac{Q}{L^3\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.25}$$

である。一方電流密度は、面積 L^2 の中を単位時間あたり $L^2 v$ の体積が通過していくことになるから、電荷密度に $L^2 v$ をかけてから単位面積あたりにするために L^2 でわって、

$$j'^x = \frac{Qv}{L^3\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, j'^y = j'^z = 0 \tag{10.26}$$

となる。この式は $j^\mu = (c\rho, 0, 0, 0)$ から速度 $-v$ のローレンツ変換をした結果とぴったり一致する。

というわけで、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \tag{10.27}$$

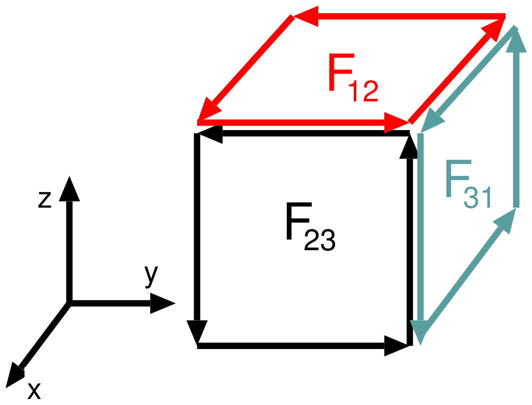
という式も作ることができた。前の式と符号が変わっているのは、$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ を使って F の添字をひっくり返したからである。

この式を、A^μ を使って書くと、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = -\mu_0 j^\nu \tag{10.28}$$

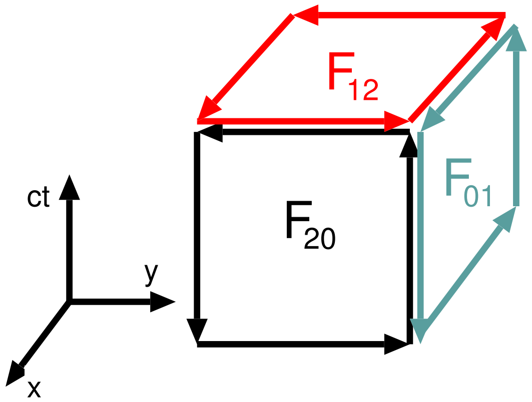
となる。この式の右辺がローレンツ不変に対してベクトルとなっているからには、左辺もやはりローレンツ変換に対してベクトルでなくてはならない (そうでなかったら、電磁気学は相対論的に不変ではないということになってしまう!)。よって、A^μ は 4 元ベクトルとして変換しなくてはいけない。これから、$A^0 = \dfrac{\phi}{c}$ と置いたことが正当化される。A^0 は確かに 4 元ポテンシャル A^μ の時間成分として変換されるのである。

(10.28) という式が 4 元ポテンシャルを使って書いたマックスウェル方程式である。4 元ベクトルで表現されたことから、これが相対論的に不変な理論となることは自明である。



$F_{\mu\nu}$ は、いわば A_μ の４次元 rot である。３次元の rot では、「ベクトルの rot はベクトル」であったが、実はこれが成立するのは３次元でだけである。なぜなら、その定義上、rot は「微小な面を考えて、その回りをぐるっと回る」という操作に対応している。３次元では、面は３つある（xy 平面、yz 平面、zx 平面）。しかし、２次元では xy 平面一つしかないし、４次元では xy, yz, zx の他に xt, yt, zt を合わせて合計６つある。重複をゆるさず二つの方向を決めれば面が決まるので、一般に n 次元では $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の面がある。

３次元の rot の div を取ると０になることは、空間内に立方体を描くことで示すことができた。４次元の rot であるところの $F_{\mu\nu}$ でも、４つの座標軸 (ct, x, y, z) のうちから３つ選んで立方体を作り、その立方体の各面を回るような rot を考えることで同様の式を作ることができる。例えば上の図は (x, y, z) の３つの軸で立方体を作った場合である。天井と床から $\partial_z F_{12} = \partial_z B_z$ が出る（天井と床では逆符号なので、(天井) − (床) という計算がされ、微分になるのである。同様に、左と右から $\partial_y F_{31} = \partial_y B_y$ が、正面と裏から $\partial_x F_{23} = \partial_x B_x$ が出る。全部足すと $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ が出る。



(ct, x, y) の３つの軸を使って作った図が左のもので、この場合は天井と床から $\partial_0 F_{12} = \frac{1}{c}\partial_t B_x$、左と右から $\partial_y F_{01} = -\frac{1}{c}\partial_y E_x$、正面と裏から $\partial_x F_{20} = \frac{1}{c}\partial_x E_y$ が出る。全部足して分母の c を払うと、

$$\partial_t B_z - \partial_y E_x + \partial_x E_y = 0 \tag{10.29}$$

という式になるが、これは $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の x 成分である。同様に y 成分、z 成分の式も出る。つまり、元々のマックスウェル方程式のうち４つが４次元 rot の性質から出るのである。なお、ローレンツ変換すれば、この ct 軸と x, y, z 軸が混じり合う。つまりこの４つのマックスウェル方程式は、４次元的には互いにからみあっているのだと考えることもできる。

10.2 電場・磁場のローレンツ変換

４元ベクトルポテンシャルは

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1), A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0), A'^2 = A^2, A'^3 = A^3 \tag{10.30}$$

または共変ベクトルで表すと、

$$A'_0 = \gamma(A_0 + \beta A_1), A'_1 = \gamma(A_1 + \beta A_0), A'_2 = A_2, A'_3 = A_3 \tag{10.31}$$

のようにローレンツ変換される（$A^0 = -A_0, A^i = A_i$ を使えばすぐ導ける）ので、電場や磁場のローレンツ変換はこれから導くことができる。この時、微分演算子（これも共変ベクトルである）の方も、

$$\frac{\partial}{\partial(ct')} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial(ct)}\right), \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{10.32}$$

と変換されることを忘れてはいけない。たとえば電場の x 成分は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}E'_x =&\ \partial_{x'}A'_0 - \partial_{ct'}A'_x \\
=&\ \gamma^2\left(\left(\partial_x + \beta\partial_{ct}\right)\left(A_0 + \beta A_x\right) - \left(\partial_{ct} + \beta\partial_x\right)\left(A_x + \beta A_0\right)\right) \\
=&\ \gamma^2(1-\beta^2)(\partial_x A_0 - \partial_0 A_x) \\
=&\ \frac{1}{c}E_x
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

となって変化しない。同様に、

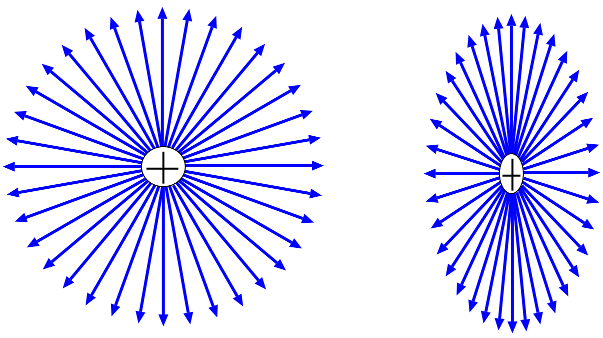
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}E'_y =&\ \partial_{y'}A'_0 - \partial_{ct'}A'_y \\
=&\ \gamma\left(\partial_y\left(A_0 + \beta A_x\right) - \left(\partial_{ct} + \beta\partial_x\right)A_y\right) \\
=&\ \gamma\left(\partial_y A_0 - \partial_0 A_y + \beta\left(\partial_y A_x - \partial_x A_y\right)\right) \\
=&\ \gamma\left(\frac{1}{c}E_y - \beta B_z\right)
\end{aligned}
\tag{10.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}E'_z =&\ \partial_{z'}A'_0 - \partial_{ct'}A'_z \\
=&\ \gamma\left(\partial_z\left(A_0 + \beta A_x\right) - \left(\partial_{ct} + \beta\partial_x\right)A_z\right) \\
=&\ \gamma\left(\partial_z A_0 - \partial_0 A_z + \beta\left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\right) \\
=&\ \gamma\left(\frac{1}{c}E_z + \beta B_y\right)
\end{aligned}
\tag{10.35}
$$

となる。

　まとめると、

$$
E'_x = E_x, E_y = \gamma(E_y - vB_z), E_z = \gamma(E_z + vB_y) \tag{10.36}
$$



である。

　磁場の方も同様に計算して、

$$
B'_x = B_x, B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \tag{10.37}
$$

という結果が出る。結局電場も磁場も、座標系の運動方向と平行な方向は変化せず、垂直な方向が変化する。垂直な方向の電場や磁場が γ 倍になる（増える）のは、図のように電気力線（あるいは磁力線）がローレンツ短縮により圧縮される効果であると考えると理解しやすい。

　電場・磁場のローレンツ変換の式は複雑であり、４元ベクトルポテンシャルを使った式 (10.30) の方が便利である。実は、電磁場を表す物理量としては $\vec{E}, \vec{B}$ よりも A_μ の方が本質的なのだと考えることができる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

10.3　ゲージ変換

　できあがった４次元的なマックスウェル方程式 $\partial_\mu\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu A^\mu = -\mu_0 j_\nu$ を見ると、

$$
A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda \tag{10.38}
$$

のように、任意のスカラー関数 Λ の微分に対応する分だけ、A_μ の値をシフトさせても方程式が不変であることに気づく。この変換は、歴史的経緯から「ゲージ変換」[3]と呼ばれる。

そこで、この変換を適当に行えば、A_μ を特別な条件を満たすようにすることができる。たとえば極端な例としては、

$$\Lambda = -\int A^0 dx^0 \tag{10.39}$$

と選ぶ。すると、

$$A_0 \to A_0 - \partial_0 \int A^0 dx^0 = 0 \tag{10.40}$$

となって、$A_0 = 0$ と選ぶことができるのである。問題に応じて、計算が楽になるような条件を選べばよい。この条件を「ゲージ条件」と呼ぶ。$A_0 = 0$ は radiation ゲージと呼ばれる。他にも、クーロンゲージ（$\partial_i A_i = 0$）、ローレンスゲージ（$\partial_\mu A^\mu = 0$）[4]などがある。ここでは、ローレンスゲージを取ろう。するとマックスウェル方程式は、

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = -\mu_0 j_\nu \tag{10.41}$$

または、$\partial_\mu \partial^\mu = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$ を使えば、

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) A_\nu = -\mu_0 j_\nu \tag{10.42}$$

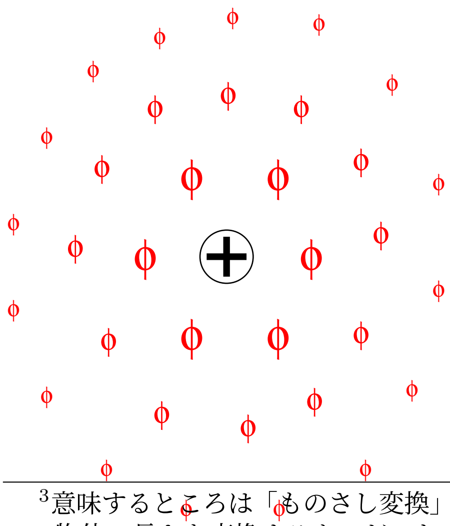
という式になり、非常に解きやすくなる。

このゲージ変換があるため、物理的には同じ状況であるのに、A_μ の値が違う、ということが起こりえる。そういう意味で A_μ は測定によって決定できる量ではない。この点で「A_μ は非物理的な量であって、本質的なのは $\vec{E}, \vec{B}$ である」という考え方も前にはあった。しかし、後に $\vec{B} = 0$ であっても $A_\mu \neq 0$ であるような状況で A_μ の影響が観測に現れることがある（もちろん、その影響の現れ方はゲージ変換しても変化しない）ことが確認されたので、今では A_μ の実在性を疑う人はいない[5]。

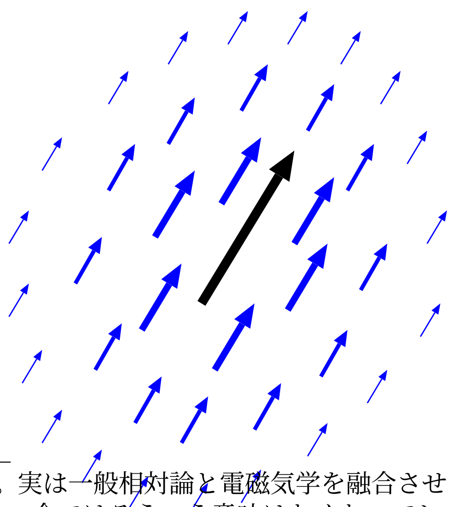
【補足終わり】

10.4　ベクトルポテンシャルとはどういうものか

ベクトルポテンシャルはなじみがない人が多いかもしれないが、実はこっちを使った方が電磁気がわかりやすくなるのではないかと思うほど、便利な概念である。ここで、(10.42) を使ってそのことを見よう。特に、静電磁場の場合を考える。すなわち、時間的に一定であるような電磁場であれば、(10.42) は



電荷の回りのスカラーポテンシャル



電流の回りのベクトルポテンシャル

[3]意味するところは「ものさし変換」である。実は一般相対論と電磁気学を融合させようというワイルの統一理論の中で、物体の長さを変換するものだったのである。今ではそういう意味はなくなってしまったのだが、名前だけが残っている。

[4]このローレンス（Lorenz）さんは、ローレンツ力のローレンツ（Lorentz）さんとは別人なのであるが、非常によく混同され、「ローレンツゲージ」とか「Lorentz ゲージ」と書いてある本がたくさんある。ややこしいことに、ローレンスゲージはローレンツ不変なゲージなのである。

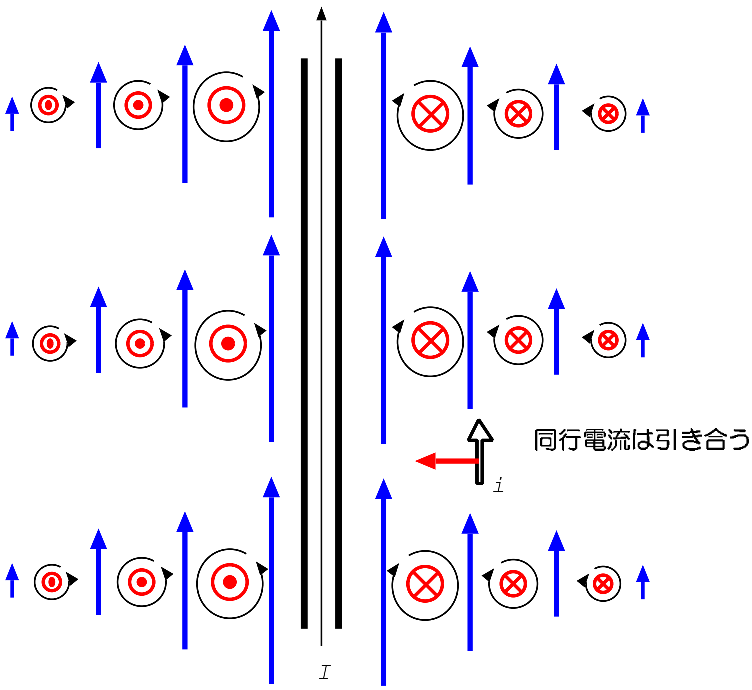
[5]この効果をアハロノフ・ボーム効果と言い、実際に実験で確認したのは日本の外村彰氏である。その詳細は量子力学を知らないとわからないので、ここでは触れない。

$\Delta A_\nu = -\mu_0 j_\nu$ と、単なるラプラス方程式になる。この式は

$$\text{時間成分}:\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho,\qquad \text{空間成分}:\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \tag{10.43}$$

である。つまり、電荷があればその回りに静電ポテンシャルが生まれるように、電流があればその回りにベクトルポテンシャルが生まれる。ベクトルポテンシャルは電流と同じ向きにできる。

このように作られたベクトルポテンシャルが、磁場を作ることになる。例として直線電流の場合を図で描くと右のようになる。



電流のそばには強いベクトルポテンシャルが、遠くには弱いベクトルポテンシャルができている。このベクトルポテンシャルを流れのようなものだと考えると、この流れは回転を作る。なぜなら、外側ほど「流れ」が弱いからである。

この図において、導線の左側では右（内側）の $\vec{A}$ の方が強いので、$\vec{A}$ を何かの流れと考えれば、反時計回りの渦ができていることになる。逆に右側では時計回りの渦ができる。

この渦こそが rot であり、rot の結果のベクトルはこの渦が右ネジを回す方向だとした時、ネジの進む方向を向く。

よって、導線の左側では紙面裏から表に突き抜けるような磁場がそこにある。逆に右側では紙面表から裏へ向かう方向の磁場がある。他の場所でも同様なので、導線を一周するようにまわる磁場ができあがる。これは、「電流をネジの進行方向とした時、右ネジを回す方向に磁場ができる」といういわゆる右ネジの法則の通りである。つまり「電流が磁場を作る」のではなく「電流はベクトルポテンシャルを作る。ベクトルポテンシャルの回転が磁場である」というふうに考えることができる。

なお、電荷 q がスカラーポテンシャルの中にいると $q\phi$ という位置エネルギーを持ったように、電流 $\vec{i}$ がベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の中にいると $-\vec{i}\cdot\vec{A}$ という位置エネルギーを持つ。

位置エネルギーが下がるような方向に力を受けるという原則からすると、（＋電荷が−電荷に引きつけられるように）同方向の電流は引きつけ合う。また、なるべくなら電流とベクトルポテンシャルは同じ方向を向きたがる。電磁石と電磁石の間に働く力なども、このエネルギーで説明することができる[6]。

10.5　ローレンツ力の導出

この電磁場から電荷にどのような力が働くかを計算してみるのだが、ここで特殊相対原理を使うと簡単に求めることができる。特殊相対原理によればどのような座標系をとっても物理法則は同じ形

[6] 電荷は同種が反発するのに電流は同方向が引きつけ合うのは、位置エネルギーの符号の違いだが、その違いはローレンツ内積 $j_\mu A^\mu = -j^0A^0 + j^iA^i$ の符号から来ている。

を持つ。その方程式は必然的にテンソルの形になっていなくてはいけない。力に関しては４次元的に考える時は４元力 F^μ で考えなくてはいけない。そこで、電磁場による力の式は４元力を用いて、

$$F^\mu = \text{（なにか、４元ベクトルになる式）} \tag{10.44}$$

と書けるはずである。この式の右辺には、まず電場および磁場を表す $F_{\mu\nu}$ が入るであろうことはすぐ予想できる。また、答を盗み見するようだが、結果として磁場と電荷の間に働く力に電荷の速度が入ることを知っているので、４元速度 V^μ も式に入ってきそうである。つまり、

$$F^\mu = (\text{未知の定数}) \times F^\mu{}_\nu V^\nu \tag{10.45}$$

という答になるだろう。未知の定数を決定するために、たまたま今考えている粒子が静止しているとする。その場合、$V^0 = c, V^i = 0$ であるから、

$$F^\mu = (\text{未知の定数}) \times F^\mu{}_0 c \tag{10.46}$$

となる。$F^0{}_0 = 0, F^i{}_0 = \dfrac{E_i}{c}$ であることを考えると、

$$F^i = (\text{未知の定数}) \times E_i \tag{10.47}$$

となる。電場の定義式 $(\vec{F} = q\vec{E})$ から考えると、未知の定数は今考えている電荷の電気量 q にすればよい。

結局、電荷の受ける力（４元力）は、

$$F^\mu = qF^\mu{}_\nu V^\nu \tag{10.48}$$

と書ける。この式の $\mu = 1$ 成分を見てみると、

$$F^1 = qF^1{}_\nu V^\nu = qF^1{}_0 V^0 + qF^1{}_2 V^2 + qF^1{}_3 V^3 = q\left(\frac{E_x}{c} c\gamma + B_z v_y \gamma - B_y v_z \gamma\right) = q\gamma\left(E_x + (\vec{v} \times \vec{B})_x\right) \tag{10.49}$$

となる。この力はミンコフスキーの力 F^μ の第１成分なので、$\dfrac{dP^\mu}{dt} = f^\mu$ で表される方の力であれば、$F^i = f^i\gamma$ であるから、$f^1 = q\left(E_x + (\vec{v} \times \vec{B})_x\right)$ となる。その３次元成分を取れば

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{10.50}$$

となり、この式はローレンツ力の式そのものである。ゆえに、

（１）特殊相対性原理。

（２）電荷に働く力は $F^{\mu\nu}$ と V^μ を使った式になる。

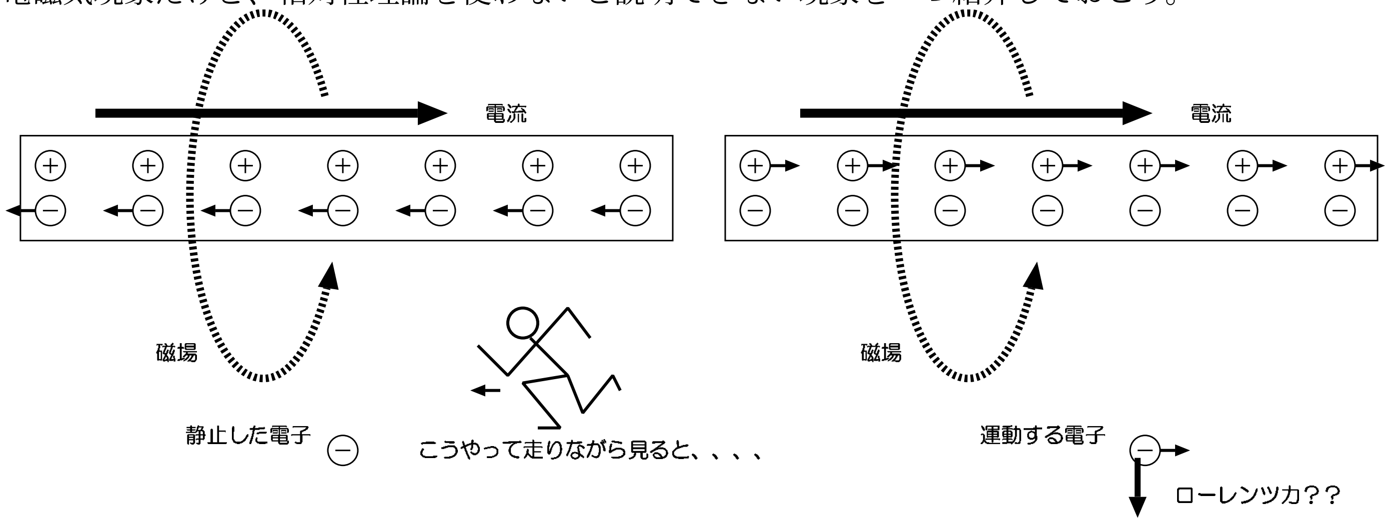
（３）電荷が止まっていればその力は $q\vec{E}$ である。

という条件だけから、ローレンツ力の式を導出することができた。

[問い 10-1] ローレンツ力の４元力としてのテンソル表現 $F^\mu = \eta_{\nu\rho} F^{\mu\nu} V^\rho$ を使って、４元力と４元速度が直交することを示せ。
（ヒント：$F_{\mu\nu}$ の反対称性 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ を使おう）

10.6　電磁場に関するパラドックス

ここまでの話でわかるように、相対論は電磁気学を発展させることによって生まれた理論である。というより、古典電磁気学を完成させる最後の１ピースだったと言ってもいい。そこで、高校レベルの電磁気現象だけど、相対性理論を使わないと説明できない現象を一つ紹介しておこう。



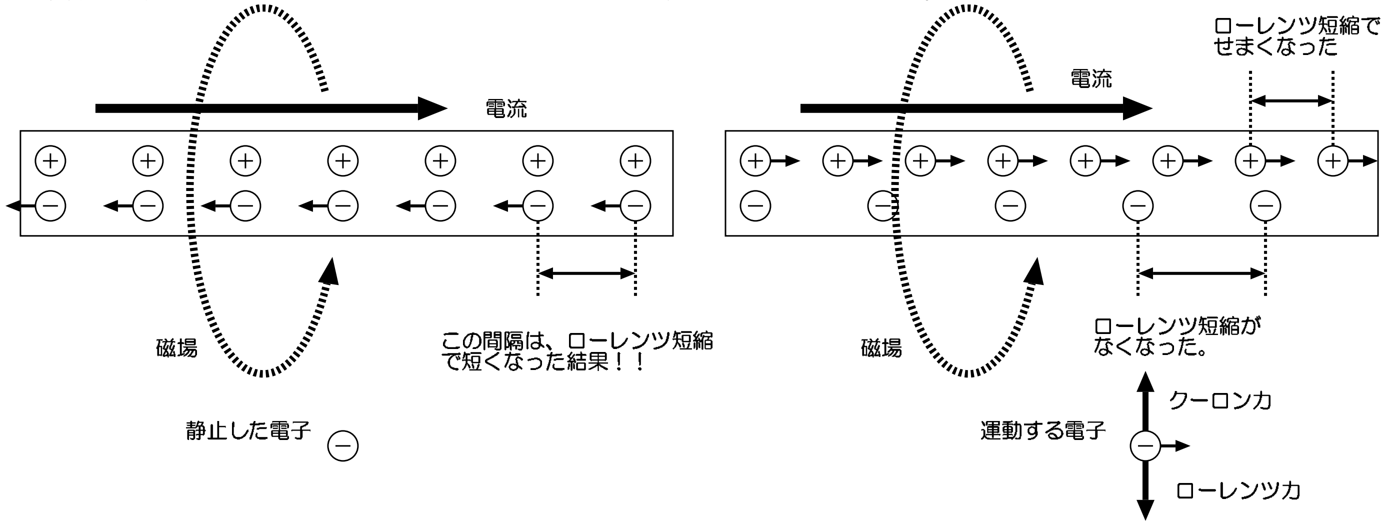
電流が流れている導線から少し離れたところに静止した電子がいる。導線には流れている自由電子（－電荷）がいるが、静止している金属イオン（＋電荷）もいて、全体として電荷は中和している。ゆえに導線のまわりに電場はない。電流があるから磁場はあるが、磁場は止まっている電子に力を及ぼすことはない。よってこの電子は力を受けない。

ここで、流れている電子と同じ速度で移動しながらこの現象を見たとしよう。電子は止まってしまうが、金属イオンは逆に動き出すので、やはり電流は流れている。故に磁場はやはり発生している。今度は外においてある電子は動いている。磁場中を動く電子は力を受けるので、この立場で考えると電子には力が働く。

さて、はたして電子に力は発生するのか、しないのか ??

電線の中の電子の動く速度はけっこうゆっくり（歩く速度より遅いぐらい）なので、この実験は実際にやることができるが、もちろん、電子は動かない。見る人の立場によって結果が変わるはずはない。

相対論を知っていると、この謎には下の図のような答を出すことができる。すでに電磁場のローレンツ変換を求めておいたので、それを見てもらうとわかると思うが、導線に対して動く人から見ると、導線に対して止まっている人には見えない電場が見えるのである。



この電場はもちろん、理由もなく発生するのではない。電場が発生する原因は、導線の中を考えるとわかる。最初導線内には等しい電荷があって電場がキャンセルしている、と言ったが、相対論によれば動いている物体はローレンツ短縮で長さが縮むはず。一群の電荷が動いたとすると、運動方向に圧縮されて電荷密度が上がることになる。ということは、今導線内にある電子の流れは「すでにローレンツ短縮した結果」として＋電荷とキャンセルしている。これを動きながら見ると、今度は＋電荷がローレンツ短縮により圧縮され、電子の方は逆に圧縮される原因がなくなり、いわば「圧縮が解除される」ことになるのである。結果として、運動しながら見ると導線は＋に帯電していることになる。この＋に帯電した導線は電子を内側にひっぱり、磁場によるローレンツ力を打ち消す。

この問題が教えてくれる教訓は「相対論なんてのは宇宙の話や素粒子の話をする時にしか出てこない、特殊な世界の話」と思いこんではいけないということである。量子力学がミクロな世界にとどまらないように、相対論も普段見る物理現象にも効いているのある。相対論の助けなしには、電磁気現象を完全に理解することはできない。

索 引