波動論2008年度講義録

前野昌弘

平成21年2月3日

目 次

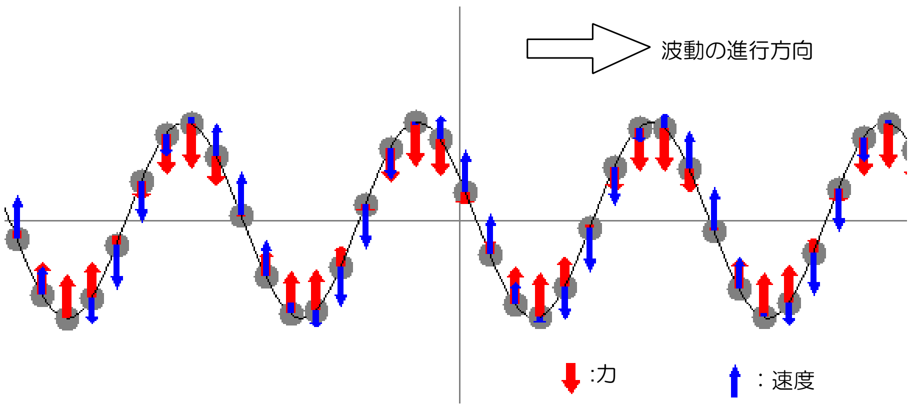
第0章　「波動論」のあらすじ

この講義では「波動」を扱う。波動とは、「振動が空間を、時間的に遅れながら伝播していく現象」である。この章では波動論という講義の中でどんなことを扱っていくかの「あらすじ」を述べつつ、波動論を勉強することでどんな物理がわかるようになるのか、それを紹介しよう。あくまで「あらすじ」なので説明はかなりおおざっぱなものになっているが、詳しい説明は次章以降で行うので、ここでわからなくても心配しなくてよい。

0.1　波動—伝わる振動

波動は、「振動が空間を、時間的に遅れながら伝播していく現象」である。ここで、伝わっていくのは「振動」であって、物質ではないことに注意しよう。たとえば身近な波動の例の「音」で説明しよう。音は空気の振動である。例えば声を出した時、人の声帯の振動によって空気が振動し、その空気の振動が伝わって他の人の耳の鼓膜を振動させる。その振動を感知して人は音を聞く。けっして、ある人の口から出た空気が他の人の耳に飛び込むのではない。あくまで、「振動している」という状態が伝わるのである。

もっとも単純な１次元の波動（横波）を描いたものが右の図である。太い矢印は各点に働く力を、細い矢印は各点の物体の運動速度を表している。波は右方向に進行している。ただし、波を構成する物質（「**媒質**」と呼ぶ）の振動は上下方向である。媒質は右には動いていないことに注意しよう。上の図の媒質のうち、ある一点のみを取り出して見れば、上下にしか運動をしていない。ただ、その運動が場所によって少しずつ遅れながら振動しているため、振動が進行しているように見えるのである。



各点各点の媒質は、中心より上にある時には下向きに、中心より下にある時には上向きに力を受けている。つまり、つねに中心の位置に戻るようにするような力が働いているわけである。この力を「元に戻す力」ということで「**復元力**」と呼ぶ。

その性質から、復元力は中心位置に来ると０になる。ここでもし物体に止まってしまったならば、そこで振動は終わってしまう。そうならないためには、中心にやってきた物体はそのままその勢いで通り抜けなくてはいけない。つまり、物体に「**慣性**」がなければ振動は続かない。実際の波は物質でないものが媒質になっている場合もあるが、とにかく媒質になんらかの「勢い」を保存するシステムがないと、振動は続かない。

もうひとつ、波が発生するために必要な条件は、ある場所の運動（変位）が隣に伝わることである。媒質がどんな運動をしてもその隣にそのことが伝わらないのであれば、振動はしても「波」にはならない。波には「**伝播**する」という性質が不可欠である。上の図の場合、媒質をつなぐ部分をゴムひものような張力のある糸だと考えると、この張力による引っ張りが復元力を作ると同時に隣の媒質へと振動を伝えていることがわかるであろう。

以上をまとめると、

波動現象が発生する条件

(1) 運動になんらかの「**慣性**」があること。

(2) 物体の位置を「平衡点」に戻そうとする「**復元力**」が存在すること

(3) ある地点の変化がその隣の場所の変化の原因となること。つまり変化が「**伝播**」すること。

ということになる。後で説明するが、音・光・地震波・海の波など、すべて上の条件を満たしている。物理においてこれらの条件が満たされている場合は非常に多い。

真空中で一個の振り子が振動している場合、(1) と (2) は満たしているが、この振動を伝える手段がないので (3) が満たせていない。

板などの片方を熱すると、熱が伝わって反対側も熱くなってくる。このような現象を熱伝導と言うが、この現象は波動が起こる条件のうち二つは満たしている。というのは、

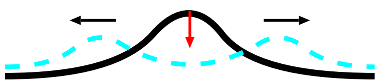
復元力 高温部分から低温部分へと熱が流れるので、温度は常に一定になろうとする。これは、温度勾配をなくそうとする作用なので、立派な復元力である。

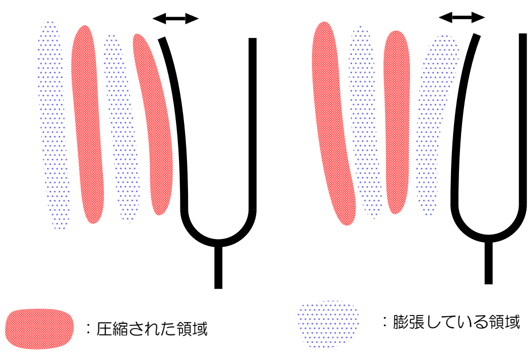
伝播 熱が流れるということは、温度がまわりより高い場所（低い場所）はまわりの温度を上げる（下げる）ということ。つまり現象は伝播する。

である。以上から (2) と (3) は満たしているが (1) を満たしていない。つまり、今温度が下がっていたとしても、まわりの温度と同じになればそこで温度変化は止まってしまう。よって熱伝導は波動にならない[1]。

0.2 いろいろな波動現象

水面にできる波はもちろん、前節であげた３つの条件を満たしている結果起こる。水面に高い部分ができると、その高い部分は回り同様低くなろうとする[2]。この復元力によって高い場所が低くなるということは、当然ながら回りに水が移動することであって、結果として回りの水位が高くなる[3]。こうして伝播していくのが水面の波である。





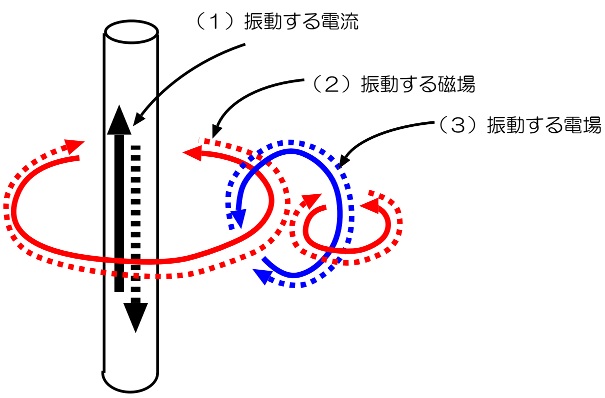
音は空気の振動である。具体的には、空気の圧縮と膨張による振動である。たとえば音叉を叩いたとしよう。音叉の棒が振動すると、その振動によって空気が圧縮されたり膨張されたりする。圧縮された空気は高圧になり、回りを押す。逆に膨張すると定圧になり、むしろ回りの空気から押されることになる。この膨張および圧縮と、そこから元に戻ろうとする作用が復元力として作用する。また、圧縮した空気が回りを押した結果として、今度は回りが圧縮されることになる。これが音の伝播の原因である。空気は窒素分子や酸素分子という、質量を持った粒子の集合であるから、当然慣性を持つ。ゆえに、音の振動は遠くへ伝わる波となる。

人間に聞こえる音の振動数は 20Hz から 20000Hz と言われている。Hz というのはヘルツと読み、１秒に何回振動するかを表す[4]。音の振動数の違いは「音の高さ」として認識される。音楽で

[1]「熱の本質は分子の運動で、分子には慣性があるじゃないですか」と思う人もいるかもしれないが、ここで「慣性がない」と言っているのはあくまで温度変化の話。温度上昇には勢いはつかない。
[2]ちなみに低くなろうとする理由には表面張力と重力、二つの原因がある。小さい波（風呂などの水面の波）では主に表面張力であり、大きい波（海でできる波）は主に重力である。
[3]ゆえに、厳密に言うとこの場合、媒質は進行方向にもそれと垂直な方向にも運動することになる
[4]電磁波の（実験的）発見者である物理学者 Hertz の名前にちなむ。

は、ピアノの鍵盤の真ん中あたりにある「ラ」(A_4 という記号で表す)の振動数が 440Hz と決められている[5]。音の速度(音速)は常温ではだいたい 340m/s 程度である。

いっぽう、光は電磁場の振動である。このことは、電磁気の方程式を作り上げた Maxwell が気が付いた。Maxwell 方程式によると、以下のようなしくみで電磁波が発生することがわかる。



(1) ある場所に振動する電流または電束密度が発生する(たとえば電波のアンテナなら周期的に変動する電流を流している)。

(2)「電流」もしくは「電束密度の時間変化」は、周囲に渦をまくような磁場を伴う ($\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$)。

(3) 周囲の空間の磁場が時間変動には、さらにその周囲に渦をまくような電場を伴う ($\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$)。

以上がくりかえされることにより、空間の中を電場と磁場の振動が広がっていく。

電磁場の場合には何が「復元力」および「慣性」になるのであろうか?

電磁誘導の性質として「磁場の変化を妨げる向きに電流を流そうとするような電流が発生する」ということを聞いたことがあるであろう。同様に、「電場の変化を妨げるように磁場が発生する」という現象も起こる。これらはまさに「電場(磁場)を作らせまいとする」=「復元力」と「できた電場(磁場)を消すまいとする」=「慣性」なのである。この時、電磁誘導などによってできる電場や磁場は今考えている場所から離れたところにもできるため、電磁波も伝播していく。Maxwell はその波動(電磁波)の伝播速度が光速と一致していることに気づき「光は電場と磁場の波である」と気づいた。

なお、真空中の光の速度 299792458m/s で、これは今や定義値である。人間の眼に見える光の波長はだいたい 4×10^{-7}m から 8×10^{-7}m である。電場や磁場のできる方向と電磁波の進む方向は垂直である。それゆえに、「光(電磁波)は横波である」と言われる(逆に縦波の電磁波はない!)。

0.3　波長の違いと性質の違い

同じ波であるのに、音と光はだいぶ違う様相を示す。その違いは何から来るのだろう?—この謎の中に波動の持つ面白い性質が隠れているので、少しだけ説明しておこう(証明を含めた詳しい話は後でゆっくりやる)。

一つにはもちろん、人間の感覚機能の違いである。たとえば光の振動数の違いは人間には「色」として認識される。一方、音にはそういうものはない。二つの音が混じった音は、ちゃんと「混じった音」として聞き取ることができる。一方赤い光と緑の光が混ざると黄色に認識されてしまう![6]

この人間の目の仕組みのおかげで、「三原色」を使ってカラー画像を3つの信号で送ったり、3色のインクでカラー写真が印刷できるのである。ちなみに世界最初のカラー写真を作ったのは、電磁気学を完成させたマックスウェルである。

人間は光がどの方向から来たかはちゃんと眼で判断できるが音についてはそれほどよい精度ではわからない。これらは眼と耳の構造の違いにもよるが、波長の違いという大きな物理的性質の違いによるところも大きい。音の波長は、普段しゃべっている声などでは数センチから数十センチである。つまり、10^{-1} メートル程度。これに対し、光の波長はだいたい 10^{-7} メートル。波長にして 100 万倍ほどの差があることになる。この波長の違いが大きな差を生む。

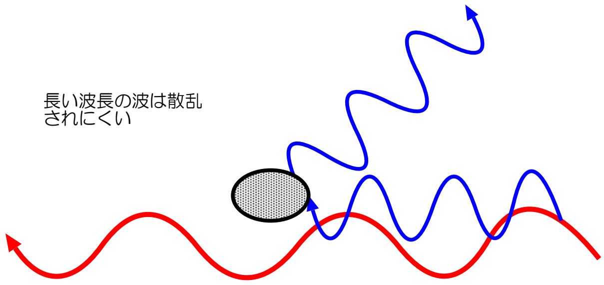
たとえば、光の場合、何か遮蔽物の後ろには届かない。一方、音は遮蔽物の後ろにも届く。波は障害物の後ろに回り込むという現象を起こすことがある。これを「**回折**」と呼ぶ。回折は、障害物が波長と同じくらいの大きさか、より小さい時、特によく起こると言われる。つまり、波長の長い波ほど回折しやすく、遠く遮蔽物の影にも届きやすい。ラジオの電波(波長数百メートル)はテレビの電波(波長数十センチ)よりも山岳部などによく届くが、それはこれが理由である。

---

[5] 音楽でよく使われる和音は「ド・ミ・ソ」だが、この場合、音の振動数の比が約 4:5:6 になっている。

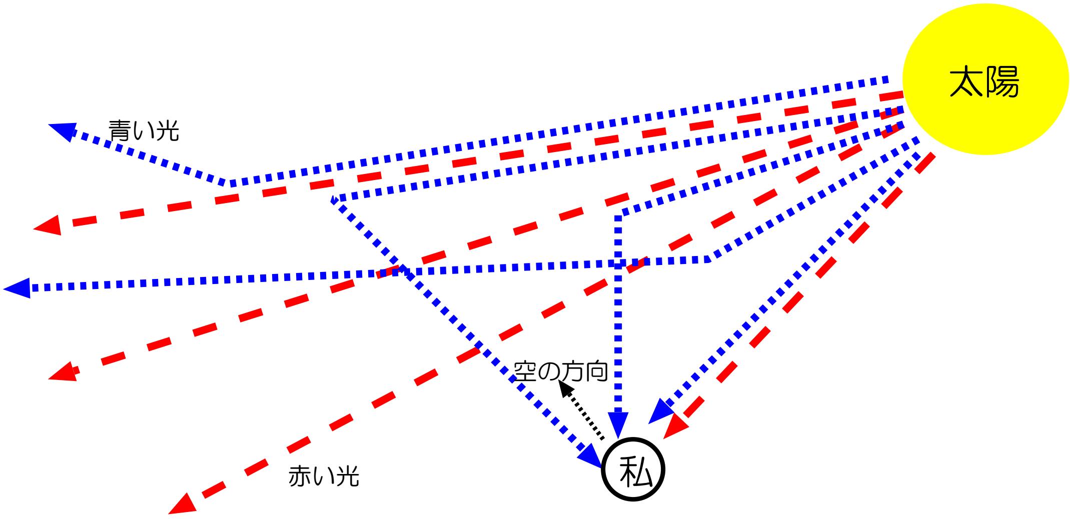
[6] このことを実感したければ、黄色い色が写っているカラーテレビ表面に近づいてよ〜く見てみよう。実は黄色はどこにもなく、赤と緑がある。見えにくい人は虫眼鏡などで拡大するか、水滴を表面につけてみるとよくわかる。

この「波長が長い波はじゃまされにくい」という性質は「散乱」という現象にも現れる。これは障害物によって波が方向を変える（反射したり、少し曲がった方向に進んだり）することであるが、波には「波長が障害物のサイズよりも長いと散乱されにくい」という性質がある。



たとえば空が青いのは、波長が短い青の方が空気による散乱が大きいからである。次の図のように、太陽から地球に来る光はほとんど直進するが一部だけは散乱し、方向を変える[7]。方向を変えた光が目に入ると、人はそれを「空から来た光」と感じる。散乱は波長が短い光の方が強いので、空の色は青くなるのである。

逆に夕焼けが赤いのは、赤い光は散乱されにくいので、夕日の太陽光が（昼に比べて）長い距離の大気中を走っても赤い成分が散乱されずに残るからである。よって、空の青さを見れば空気分子のサイズを推測できる。



夜でもすいすいと飛んでいるこうもりは、目で見るのではなく、超音波（通常の音よりも振動数が高く波長が短い音）を出して障害物を感知している。

なぜコウモリは超音波を使うのだろう ??—もちろん「他の鳥や動物に聞かれないように」という理由も大きいのだろうが、もう一つ波長が短いことが有利に働くのである。まずすでに述べたように、短い波長の音の方がより散乱されやすく、跳ね返って来やすい。また、跳ね返ってきた音から「どこで音が跳ね返ったのか？」を特定する時、「波長が短い方が分解能が高くなる（つまり、より精密に音の反射した位置がわかる）」ということがわかっている（これについても具体的な理由はまた後で、しかし、量子力学を勉強すると、「波長が短い」ということは「運動量が大きい」ということであるとわかり、不確定性関係により、運動量が大きいと位置の不確定性が小さくなるということもわかるだろう）。コウモリが使っている超音波は、波長が1センチ以下という短いもの[8]であり、この程度の波長だとちゃんと木の枝の位置を知ることができる[9]。

なお、光は波長が 10^{-7}m 程度と短いおかげで、充分高い分解能を持つ。それゆえ我々はくっきりと物を見ることができる。もし光の波長が数センチだったら、いろんなものがぼやけて見えることだろう。実は光を使って物を見る時、光の波長より小さい物を見ることは難しい。光学顕微鏡を使ってバイ菌（10^{-6}m 程度）を見ることはできるが、ウィルス（10^{-8}m 程度）を見ることができない[10]。

なお、波長の違いの他に、音と光の大きな違いは音は縦波だが光は横波であることである。日常生活ではその差はあ

[7]図では青い光が全部散乱するかのごとく書いてあるが、実際は青い光もほとんどは直進する。赤い光も全く散乱しないわけではない。図は少々オーバーに書いている。

[8]人間の耳に聞こえるのは振動数 20 ヘルツから 20000 ヘルツと言われる（個人差があり、年を取ると振動の高い音は聞こえなくなる）。音速を 300m/s とすると、波長が 1.5 メートルから 1.5 センチということになる。

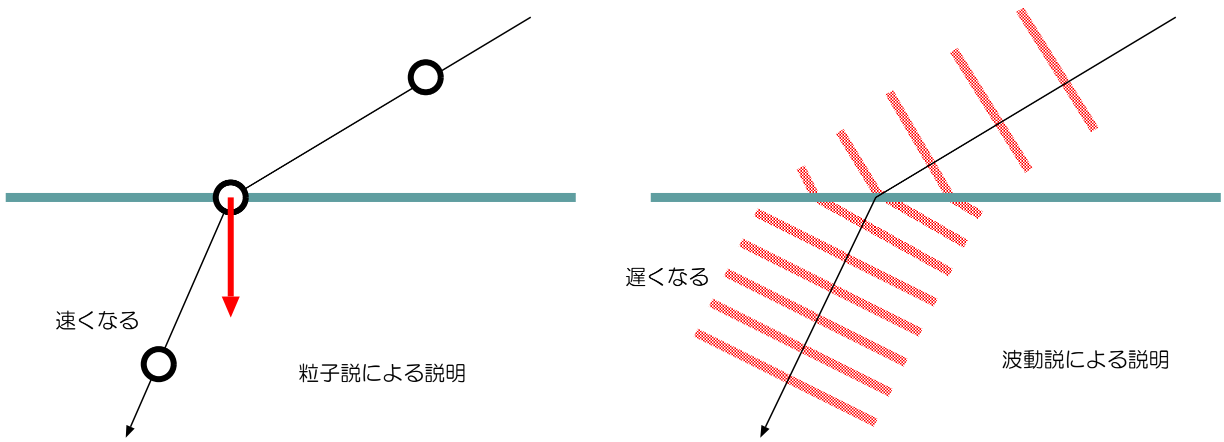
[9]なお、コウモリは跳ね返ってくる超音波のドップラー効果から「この障害物は動いているかどうか」を判定することまでできる。人間がレーダー・ソナーなどの電子機器を使ってやっていることを生身で行っているのである。

[10]ウィルスを見るには電子顕微鏡が必要であり、電子顕微鏡を持たない野口英世はついに黄熱病のウィルスを発見できなかった。

まりわからないが「偏光」などという現象があるのは、光が横波であるためである。

0.4　光に関する論争

17 世紀には「光は粒子か、波動か」という論争が行われた。ニュートンは粒子説をとなえ、ホイヘンスは波動説をとなえた。この時問題となったのは「屈折はどう説明できるのか？」である。



粒子論者（ニュートンなど）は、光が空気中から水中に入るときに屈折するのは、水の中にひっぱりこまれるような力が働くからだとしていた。そうだとすると、光は水中にいる時の方が速く進むことになる。

波動論者（ホイヘンスなど）は、逆に水中の方が遅いために、波が下に曲げられるという節をとなえた。水中で遅くなることによって、波面の間隔が空気中より詰まった状態になることで、波の進行方向が変わると考えたのである。

果たして光は水中の方が速いのか、それとも遅いのか。

当時はまったく実験データがなかったため、どちらにも軍配はあがらなかった。後に 1850 年にフーコーの実験が「水中の方が遅い」ということを確認する（実際には約 1.33 倍遅い。これは波動説による屈折の説明に一致する)。なお、その前の 1801 年にヤングの実験によって光が干渉現象を起こすこともわかっていたので、19 世紀には「光は波である」ということが受け入れられていった。もちろんそのとどめになるのが、1865 年の Maxwell 方程式から電磁波が導出され、1888 年にはヘルツが実験的に電磁波を確認したことである。

ところで、時代は下って 20 世紀になると、「光は粒子でも波動でもある」という不思議な話になっていく（なんでこうなるのは量子力学を勉強すべし)。では屈折の話はどうなったのだろう ???—水中の方が遅いことから、間違いなく波だということになったのではなかったのか ???—その謎解きは後の楽しみにしておこう。

ちなみに、音の屈折と光の屈折は全く逆になる。それは、音は水中の方が速いからである。

0.5　これから学ぶべきこと

以上のように、波動という現象は物理のあちこちに、いろいろなサイズで現れる。眼が見えるのも耳が聞こえるのも波のおかげ、遙か彼方の放送局の電波が届いてテレビを見たりラジオが聴けたりするのは電波のおかげであるし、地球内部の構造がわかる（時には北朝鮮の核実験がわかったりもする）のは地震波のおかげである。波がどのように伝播し、反射し屈折し回折し散乱するのか、そのような性質がわからないと、現代科学技術を理解することはできない。

特に量子力学を理解するには波動は不可欠である。なぜなら量子力学では全ての（ほんとうにすべての！）物質がすべて波動関数と呼ばれる「波」で表現されるからである。

この「あらすじ」では本講義の内容の一部についてざっと眺めてみた。来週からの講義では、波動の持つ一般的な性質についてより詳細に、かつ具体的に講義していく。現代物理を理解するには波の理解は不可欠である。波がわからなければ、現代物理はわからない。量子力学、電磁気学への応用はもちろん、波動現象は物理をとらえるためにたいへん大事である。しっかり理解していこう。

第1章　ウォーミングアップ—単振動

この章ではまずはウォーミングアップとして、一点での（伝わらない）「振動」を考えよう。

この章で学ぶ大事なこと

- **単振動の方程式の性質**
- **単振動の方程式のいろいろな解き方**
- **単振動の表現いろいろ**

1.1　単振動の運動方程式

物体が振動するためには、復元力が必要である。物体の振動の中で、もっとも単純な振動が単振動である。単振動とは、運動方程式が（適当な変形を施した後でもよいので）

単振動の運動方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \tag{1.1}$$

という形になるような運動である。$x(t)$ は物体の位置などを表す「座標」であり、時間の関数となる。

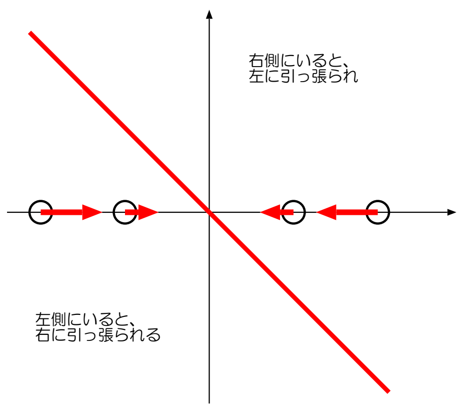
単振動が起こる一例としては、一端を固定したばね定数 k のばねの他端にくくりつけられた質量 m の物体がある。

この場合の運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{1.2}$$

であり、$k = m\omega^2$ と置いて整理すると上の方程式 (1.1) になる。

運動方程式がわかればその物体がどのような運動をするかがわかる。今の場合はもちろん単振動するのだが、このような力が働くと振動が起こるということを数式でなく、まずは「どんな運動が起こるのか」という考察から確認しておこう。



この力 $-kx$ のグラフを書くと右の図のようになる。図にあるように、この力は中心 $x=0$ より右側にある物体を左に、左側にある物体を右に引っ張る。このような力が働くとき、物体を $x=0$ ではない位置（とりあえず a を正の数として $x=a$ にしよう）に置いたとすると、以下のような現象が起こる。

(1) 物体に左向きの力が働き、左に加速する。

(2) 物体は左（つまり $x=0$ に向かって）動き出す。

(3) $x=0$ に達すると力も 0 になる。しかし、ここまで受けた力により、左向きの速度を獲得しているので、そのまま $x=0$ を通り抜けて左へ進む。

(4) $x=0$ を越えて右側に出ると、今度は左向けの力が働くため、物体は減速し、ついには止まる。

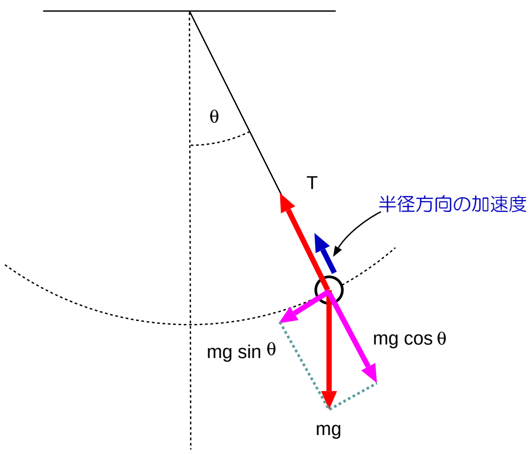
(5) しかし、止まる位置は右側 ($x<0$ の場所) なので、今度は左向きに力が働き、物体は左に動き出す。

(6) やがて物体は $x=0$ に達し、ここで力は 0 になるが、今度はその場所で左向きの速度を獲得しているので、左へ動き続ける。

(7) やがて物体は静止する。

(8) 以下同じ事の繰り返し。

このような現象が起こるには、ある点（平衡点）よりも右にいるときには左向きに、左にいる時には右向きの力が働けばよい。そのような性質を持つ力を**復元力**と言うのである。式で書いて $-kx(t)$ となる力はもちろん、復元力である。もちろんこれ以外にも、$-k(x(t))^3$ でもいいだろうし、もっと複雑怪奇な関数でも、「元の状態に戻そうとする力」であれば「復元力」と呼べる。ただ、この授業で扱うのは $-kx(t)$ の形のみである。



$-kx(t)$ の形の復元力がよく出てくるのは、それがもっとも簡単な式だからという理由の他に、「複雑な関数で表された復元力も、平衡点（力が 0 になるポイント）付近で展開すると $-kx(t)$ の形になっていることが多い」ということもある。

たとえば、長さ ℓ の糸でつるした振り子の運動の運動方程式は、左の図に書いたような力が働き、その糸と垂直な方向の成分だけを考えて運動方程式を立てると、

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta \tag{1.3}$$

となる。この場合の平衡点は $\theta=0$ である[1]。

これは単振動の運動方程式ではない。実際に解こうとすると楕円関数なども出てきてたいへん面倒な式になる。しかしここで、

$$\sin\theta=\theta\underbrace{-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5+\cdots}_{\text{この部分は無視する}} \tag{1.4}$$

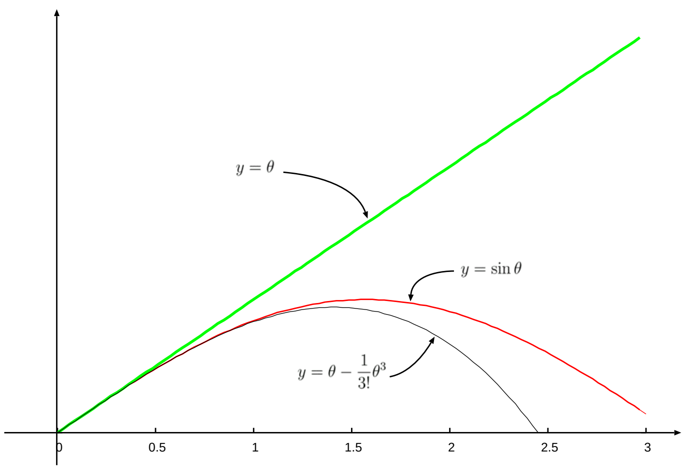
と展開して第一項のみを考える[2]ことにする。

このような近似（1 次式の部分だけを取る）を「**線型近似**」と呼ぶ。線型近似の結果、運動方程式は

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta \tag{1.5}$$

となり、単振動の方程式と同じとなる。多くの物理現象が、線型近似すると単振動と同等になる。

単振動をする物体を総称して、「調和振動子 (harmonic oscillator)」と言う。調和振動子 (あるいは単振動) は、ばね振り子の運動はもちろん、光（電磁波）、音、固体の振動など、いろいろな状況において出現する。したがって物理現象を理解するためには、単振動の理解は不可欠である。



[1] 厳密に言えば、$\theta=\pi$ も平衡点であるが、これは「不安定な平衡点」であって、単振動の中心になり得ない。

[2]「こんなことしていいの？」と不安に思う人が多いが、たとえば $\theta=\frac{\pi}{6}(30\ ^\circ)$ の場合でも、$\theta=\frac{\pi}{6}=0.5235987758\cdots$ に対し、$\frac{1}{3!}\theta^3=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3=0.02392459621\cdots$、$\frac{1}{5!}\theta^5=\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5=0.0003279531945\cdots$ となる。第 1 項だけをとっても、右辺の誤差は 5 %以下である。それに、たいていの振り子の振れ角は 30 °よりずっと小さい。

1.2　単振動の方程式の解き方いろいろ

さて、ではこの運動方程式を解く方法を考えよう。実際のところ、これは解かなくても、三角関数で表される解 $x(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$ があることはよく知られている。しかし、ここでは一般的に方程式を解く方法を考えておこう。以下のように、いろんな方法が考えられる（これで網羅できているわけではない）。

(1.1) を解く方法いろいろ

この運動が円運動の射影であることを使う 平面上の等速円運動の射影をとるとこの運動が出てくるので、それを使って解く。

積分する 微分の反対は積分なので、どんどん積分していけば x が求まるはずである。

定数係数の線形同次微分方程式の一般論を使う解法 定数係数で、線形同次（つまり、変数 x の１次の項のみで書かれている）な微分方程式は、一般論として $e^{\lambda t}$ の形の解を持つ。

級数展開で解く 解をテーラー展開などの級数で書いて、その各項を決めていく。

フーリエ変換を使う という方法もあるが、ここでは解説しない（「物理数学 IV」でやる範囲）。

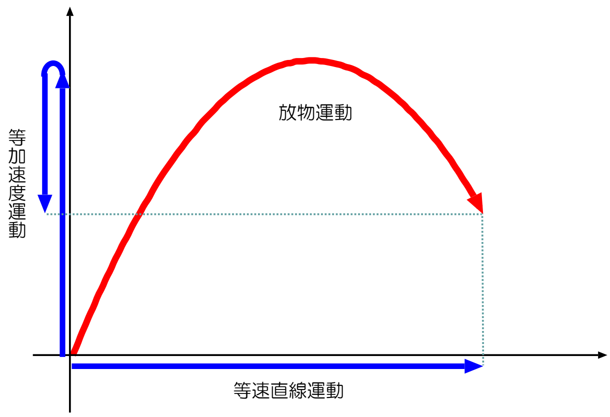
実際に解くという意味では（答えさえ求まれば）どの方法で解いたっていいのだが、ここでは後々にいろんな方法で解く練習として、この一つの方程式を以上の方法の全部で解いて解き比べをしてみよう。

1.2.1　円運動の射影であることを使う

微分方程式がちゃんと解けるならばこういう方法を使う必要は実はないのだが、単振動のイメージをつかむためには、「単振動は円運動の射影である」という考えも悪くない。まず運動の射影ということについて確認しておこう。

たとえば落体の運動を考えよう。重力場中に投射された物体は放物線を描く。式で書くならばこの運動は

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.6}$$



である（v_{0x}, v_{0y} はそれぞれ x 方向、y 方向の初速度で、g は重力加速度。$t=0$ で原点にいたと仮定した）。この式の x 成分だけを見るとそれは等速直線運動であり、y 方向だけを見ると等加速度運動である。つまり、

$$(放物運動) = (等速直線運動) \times (等加速度運動) \tag{1.7}$$

という運動の分解ができるわけである。この記号「×」は x 方向の運動と y 方向の運動を合成する、という意味で読み取って欲しい。

x 方向、y 方向はそれぞれに運動方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg \end{cases} \tag{1.8}$$

を満たす。初期位置が原点で初速度が (v_{x0}, v_{y0}) だったとしてこの運動方程式を解けば、(1.6) が求められる。

この二つの式を一個のベクトルの式でまとめて書くと、

$$m\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = m\vec{g} \tag{1.9}$$

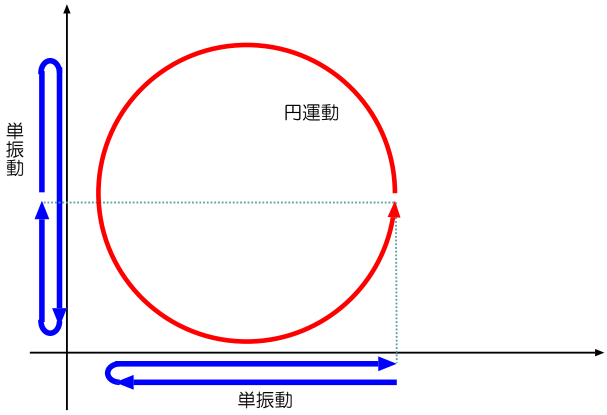
となる。$\vec{g}$ は下向き（y 軸負の向き）で大きさ g のベクトルである。

放物運動が分解できたのと同様に、

$$(\text{等速円運動}) = (\text{単振動}) \times (\text{単振動}) \tag{1.10}$$

と分解できると考えることができる。

そのことを示すために、円運動を復習しよう。半径 r の円周上を速度 v で回っている物体を考える。この回転の速さを表すのに、速度 v（つまり、物体が単位時間にどれだけの距離動くか）を使って表すこともできるが、角速度 ω（つまり、単位時間に中心から見てどれだけの角度動くか）を使って表すことも多い。速度と角速度の間には

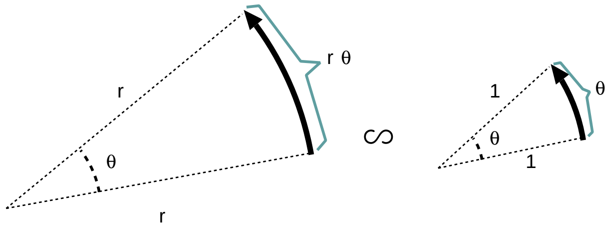


円運動の速度と角速度の関係

$$v = r\omega \quad (v \text{ は速度、} r \text{ は半径、} \omega \text{は角速度}) \tag{1.11}$$

という関係がある。

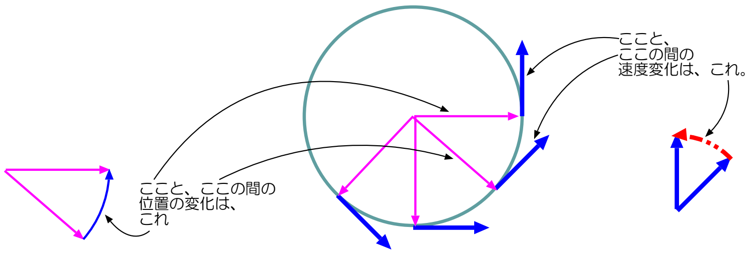
それは、角度の単位である rad が、右の図のように、「半径 1 で中心角 θ なら、弧の長さは θ になる」と定義されているおかげである[3]。半径 r で角度 θ なら $r\theta$ となるし、半径 r で角度 ω（つまり 1 秒間での移動）ならば距離は $r\omega$ となる。円運動を特徴づける量にはこの他に周期 T（1 周にかかる時間)、回転数 n（単位時間に何周するか)、などがある。すぐにわかるように、周期と回転数は互いの逆数である（$T = \frac{1}{n}$)。また、角速度は単位時間に回る角度で、2π 回ると一周であるから、



周期・回転数と角速度の関係

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, n = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{または} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \tag{1.12}$$

という関係がある。



次に、円運動の加速度を考えよう。速度は「単位時間あたりの位置座標の変化」と定義され、「加速度は「単位時間あたりの速度の変化」で定義される。円運動の速度が $v = r\omega$ なのは、微小時間 Δt が経過して $\omega\Delta t$ だけ回転すると、$r\omega\Delta t$ だけ移動するから ($v = \frac{r\omega\Delta t}{\Delta t} = r\omega$) と考えることができる。同様に速度の変化を考えると、$v = r\omega$ という長さを持った速度ベクトルが、円運動の角速度 ω と同じ角速度でぐるぐると回っているということになる Δt の微小時間が経過して物体が $\omega\Delta t$ だけ回転すれば、速度ベクトルもそれだけ回転する。同様に考えると、速度の変化（＝加速度）は

円運動の加速度の大きさ

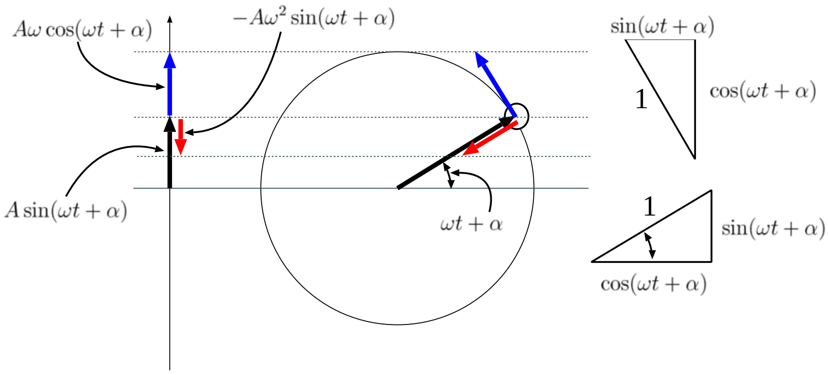
$$a = \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = \frac{r\omega \times \omega\Delta t}{\Delta t} = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r} \tag{1.13}$$

[3]当然、90 °を直角とする角度の単位を使う場合は $v = r\omega$ は使えない。物理ではほとんど常に rad を使う。

となる ($v = r\omega$ なので、最後の 3 つの表現はみな同じである)。

さて、この運動を x 方向と y 方向に分解してみよう。半径 r で角速度 ω の円運動なので、

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega t + \alpha) \\ y = r\sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \tag{1.14}$$



である（図参照)。速度に関しては

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -r\omega\sin(\omega t + \alpha) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} r\cos(\omega t + \alpha) \end{cases} \tag{1.15}$$

となる。この式は、図からもわかるし、x, y の式を微分しても得られる。同様に、

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y \end{cases} \tag{1.16}$$

とわかる。これをベクトルの方程式で書くならば、

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\omega^2\vec{x} \tag{1.17}$$

である。

ここで注目すべきことは、x, y と a_x, a_y が比例定数 $-\omega^2$ で比例していることである（式ではもちろんのことだが、図を見て理解しよう)。

「角速度 ω の円運動を x 方向に射影すると、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ を満たす運動ができる」

ということがわかったので、その逆を考えれば、

「運動方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ を満たす運動は、角速度 ω の円運動を射影したような運動である」

と結論できることになる。

この時、円運動における角速度に対応する量 ω を「角振動数」と呼ぶ。また、$\omega t + \alpha$ の部分は「角度」とは呼ばず「位相」と呼ぶ（数式的な取り扱いは角振動数 $\leftrightarrow$ 角速度、位相 $\leftrightarrow$ 角度で何の違いもない)。また α は $t = 0$ における位相なので「初期位相」と呼ばれる。これらの用語は振動だけではなく、波動でも使われる。

この方法は「円運動を射影するとこうなるから、こういう方程式の解としてこんな運動が起こるだろう」という筋道をとっているので、「運動を先に決めて、それにみあう方程式を探した」という方が近いかもしれない。

1.2.2　積分する

円運動の射影であると考える方法は、単振動だからたまたま使えた方法であるが、この節の話は一般的な微分方程式で使える。微分方程式の解き方としては単純な方法である。

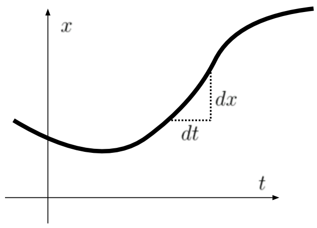
まず (1.1) よりもさらに単純な方程式である $\dfrac{dx}{dt} = \lambda x$ の場合で説明しよう。この式を積分するには、「微分して元の関

数の λ 倍になる関数」を探してくればよいわけであるが、以下のようにして微分方程式を解くこともできる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \lambda x \\
&\Big\downarrow \text{（両辺に } dt \text{ をかけて、} x \text{ で割る）} \\
\frac{dx}{x} &= \lambda dt \\
&\Big\downarrow \text{（両辺を不定積分）} \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \lambda dt
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

このような計算の $\dfrac{dx}{dt} = \lambda x$ から $\dfrac{dx}{x} = \lambda dt$ と変形するところで、「こんなことしていいの？」と疑問に感じる人がいるようだ。「$\dfrac{dx}{dt}$ はこれで一つの記号であって、dx を dt で割ったものではない！」と教わるから、こうしてはいけないと思ってしまうようである。結論を言うと、これはやっても問題ない。

今考えている問題では、x と t は独立な変数ではなく、t を決めれば x が決まる。グラフで書けば、$t-x$ グラフの任意の点が存在するわけではなく、ある線の上だけが現実に存在するところ。$\dfrac{dx}{dt}$ とはその線の上で x を変化させた量 dx と t を変化させた量 dt の比である。ただし、dx も dt も 0 になるような極限で定義されているので、そういう意味では「記号であって単なる割り算ではない」ということになる。だが、この線の上の話をしている限り、「$\dfrac{dx}{dt} = a$ なら、$dx = a dt$」と考えることには何の問題もない。ただ、あくまでも「dx や dt というのは微小量（＝後で 0 になるような極限を取る量）」であることは忘れてはいけない。こういう計算においては $(dx)^2$ やら $(dt)^2$ が 0 にされる（微小な量の自乗は 0 とみなす）ことも忘れずに。



ここまでくれば、後は積分するだけである。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} &= \int \lambda dt \\
&\Big\downarrow \text{（} \frac{1}{x} \text{ の積分は } \log|x| \text{）} \\
\log|x| &= \lambda t + C \quad \text{（} C \text{ は積分定数）} \\
&\Big\downarrow \text{（両辺を exp して）} \\
x &= \pm e^{\lambda t + C} = \pm C' e^{\lambda t} \quad (C' = e^C)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

$\dfrac{dx}{dt} = \lambda x$ の場合はこのように素直に積分できたわけであるが、$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ はそのまま積分するのは無理で、「両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ をかける」というテクニックが必要である。そうすると、

$$
\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \frac{dx}{dt} \tag{1.20}
$$

となる。この式をよく見ると、左辺は $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ の微分であり、右辺は $-\dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$ の微分である。

これで

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C \tag{1.23}
$$

となる。C は積分定数で、どういう値を取るかは初期条件で決まる。ただ、この式を見る限り、負の数はあり得ない（もし $C < 0$ なら、右辺が負になり、どうみても 0 以上である左辺と $=$ にならない）。そこで、$C = \dfrac{1}{2}\omega^2 A^2$ と置いて[4]、

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\omega^2 (A^2 - x^2) \tag{1.24}
$$

[4] こういうことをすると「勝手にこんなことしていいんですか !?」と不安になったり、「こんなふうに決めつけてはいけない！」と怒り出したりする人がいる。しかし、C は「（今のところ）任意の正の数」であり、$\dfrac{1}{2}\omega^2 A^2$ も「（今のところ）任意の正の数」である。A がまだ決まっていないのだから、決めつけているわけではないのである。ただし、$C = -\dfrac{1}{2}\omega^2 A^2$ とする人がいたら、その時は「左辺がプラスなのに右辺がマイナスじゃないか！」と怒った方がいいだろう。

余談

この「$\frac{dx}{dt}$ をかけてから t で積分する」という処方を、位置エネルギー U で表現される保存力 $-\frac{dU}{dx}$ の元で運動する物体の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} \tag{1.21}$$

に適用すると、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -U + C \tag{1.22}$$

という形になる。つまり、エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2 + U = (\text{一定})$ である。この積分テクニックはエネルギー保存則を導出していることになるのである。力学ではよく使われる計算である。なお、「dx をかけて積分するが、左辺に関しては $dx = \frac{dx}{dt}dt$ と変数変換する」という処方だと考えても結果は同じ。

とする。当然、$A^2 \geq x^2$ が成立していなくてはいけない。これから、

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \tag{1.25}$$

という式が出るので、さらにこれを積分する。まず、

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm\omega dt \tag{1.26}$$

と変数分離して、左辺においては $x = A\sin\theta$ と変数変換[5]すると、

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{A\cos\theta d\theta}{A\sqrt{1 - \sin^2\theta}} = \pm d\theta \tag{1.27}$$

となる。この変数変換 $x = A\sin\theta$ は $A^2 > x^2$ を満たす変換になっていることに注意。たとえば $x = A\tan\theta$ などという変数変換をしてしまうと、θ の値によっては $A^2 < x^2$ となってしまって不都合が生じる。今は不都合がない上に式が簡単になる変数変換があったわけである。

(1.27) の最後の $d\theta$ の前の複号は、$\cos\theta$ が正か負かによって変わる。この複号は (1.25) で出てきた複号とは出所が違う。つまり別の複号であるから、「両辺に $\pm$ が出てきたから消してしまおう」というわけにはいかないことに注意しよう。

複号を残したままで積分をすると

$$\theta = \pm\omega t + \alpha \tag{1.28}$$

となる。α は新たな積分定数。これから、

$$x = A\sin\theta = A\sin(\pm\omega t + \alpha) \tag{1.29}$$

となる。複号がついているが、符号マイナスの方は、

$$\begin{aligned} x &= A\sin(-\omega t + \alpha) \\ &= A\sin(-(\omega t - \alpha)) \\ &\qquad (\sin(-\theta) = \sin(\theta + \pi)) \\ &= A\sin(\omega t - \alpha + \pi) \end{aligned} \tag{1.30}$$

となる。つまり、$\alpha \to -\alpha + \pi$ という置き換え (α は任意だから置き換えても問題ない) でこのマイナス符号をとっぱらってしまうことができるので、

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1.31}$$

[5]「こんな変数変換、どうやって思いつくの？」と疑問に思うかもしれない。残念ながら「こうやれば確実に正しい変数変換が見つかる！」というような万能特効薬は存在しない。物を言うのは経験（「前にも似たような積分やったことあるぞ」）と、試行錯誤（「とりあえずやってみよう→だめか→じゃあ次はこれ」）である。スマートな方法より「汗水たらして頑張る」ことが大切。

の方だけを解として採用すれば充分である[6]。

今は二階微分方程式[7]を解いたわけであるが、このようにして n 階微分方程式を解いていくと、最終的に解が求まるまでに n 回積分することになることを注意しよう。積分すると必ず積分定数が現れる。そして積分定数は、微分方程式だけでは決まらない（初期条件や境界条件を使って定める）。よって、

n 階微分方程式の解のパラメータ

n 階微分方程式の解はかならず、ちょうど n 個の「方程式からは決まらないパラメータ」を含むことになる。

運動方程式は二階微分方程式であるから、二個、「方程式からは決まらないパラメータ」を含む。多くの場合、その二つのパラメータは初期位置と初速度である。単振動の場合「振幅」と「初期位相」に（$A\sin(\omega t+\alpha)$ と書いた時の A と α）になることもあるし、これを $A\sin\omega t + B\cos\omega t$ と書いた場合であれば、「sin 部分の振幅」と「cos 部分の振幅」をパラメータとしていることになる。

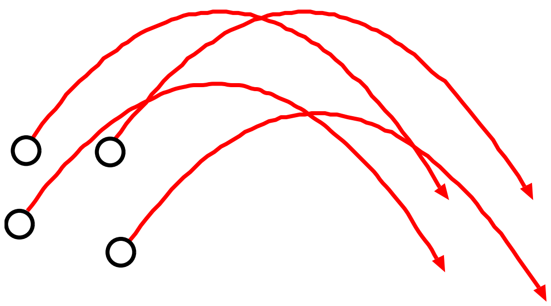
なぜ運動方程式の解は二つのパラメータを含まなくていけないか

この事の物理的理由を説明しておく。今考えているのは物体の運動であるから、同じ力が働いている場合でも、

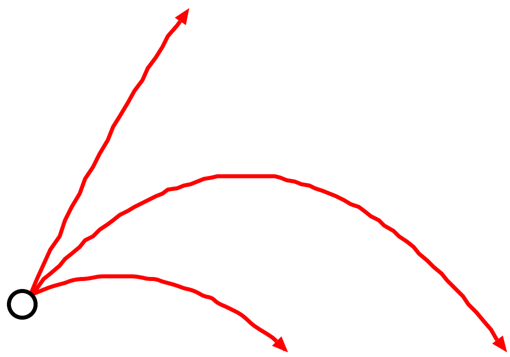
(1) 最初にどこにいるか（初期位置）

(2) 最初どんな速度を持っているか（初速度）

に応じていろいろな運動が起こらなくてはいけない。同じ方程式を満たしてもいても、初期位置と初速度が変化する分だけ「解のバリエーション」がなくてはいけないのである。



初速度は同じでも、出発点が違えば運動は違う。



出発点が同じでも初速度が違えば運動は違う。

つまり、運動方程式の解は常に 2 個の「運動方程式では決定できないパラメータ」を持つ。ただし、平面上なら座標が二つなのでパラメータの数は 4 になるし、３次元なら 6 になる。

「運動方程式では全ては決まらないのか、つまらないなぁ」なんて思ってはいけない。最初にどこにいるのか、どんな速度を持っているかと無関係に「今どこにいるのか」が決定できてしまうなどということはあり得ないのだから。

1.2.3　定数係数の線型同次微分方程式の一般論を使う

ここでは線型同次[8]であり、かつ係数が全て定数であるような微分方程式を解く時に一般的に使える方法を説明する。線型同次で定数係数でないと使えないのだが、その替わり、線型同次で定数係数な方程式なら確実に解く事ができる方法で、知っているととても便利である。

[6] ここで α は「任意の定数」として導入したので、$\alpha\to\alpha+\pi$ と置き換えたって何の問題もない。
[7] 時々「二回微分方程式」と書く人がいるが、「二階」が正解。「二回、微分した」という意味で「二回微分方程式」と書きたくなる気持ちはわかるが…。
[8] 「線型同次」とは、未知数（今の場合は f）の１次の項のみを含む式であるということ。

$$A_n \frac{d^n f}{dx^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + A_2 \frac{d^2 f}{dx^2} + A_1 \frac{df}{dx} + A_0 f = 0 \tag{1.32}$$

のような方程式を解くとしよう（A_n はすべて、x によらない定数である）。このような方程式は解の形を $e^{\lambda x}$ と仮定することで解くことができることを以下で示そう。

$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$、$\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}\cdots$であることを考えると、上の式に $f = e^{\lambda x}$ を代入すると、

$$\left(A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right)e^{\lambda x} = 0 \tag{1.33}$$

という式に変わる。$e^{\lambda x}$ は 0 ではないから、これで問題は

$$A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \tag{1.34}$$

という n-次方程式を解けという問題に変わったわけである。この n-次方程式を「**特性方程式**」と呼ぶ。特性方程式が無事解けて、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ という n 個の解が見つかれば (実は n 個解が見つからない場合があるのだが、それについては後で補足する)、

$$f = a_n e^{\lambda_n x} + a_{n-1}e^{\lambda_{n-1}x} + \cdots + a_2 e^{\lambda_2 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} \tag{1.35}$$

が解となる。一般論として、n 階の微分方程式の解は n 個の未定数（パラメータ）を持つ。上の解には n 個のパラメータを含んでいるから、これ以上解はみつからない。

少し話を具体的にして、

$$\frac{d^2}{dx^2}f + \frac{df}{dx} - 2f = 0 \tag{1.36}$$

という方程式を解いてみよう。解を $e^{\lambda x}$ と仮定すると、

$$\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)f = 0 \tag{1.37}$$

となるので、特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ となり、これを

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 =& \quad 0 \\ (\lambda+2)(\lambda-1) =& \quad 0 \end{aligned} \tag{1.38}$$

と因数分解して解くと、$\lambda = 1, -2$ という二つの解が出る。ゆえに求めるべき解は

$$f = Ae^{x} + Be^{-2x} \tag{1.39}$$

となる（A, B は未定のパラメータ）。

このようにして解が求められる理由は、以下のように考えることもできる。$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$ と因数分解できるということは、方程式 (1.36) は

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\right)\left(\frac{d}{dx} - 1\right)f = 0 \tag{1.40}$$

と “因数分解” できるということなのである。この式は

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\right)f = 0 \quad \text{または} \quad \left(\frac{d}{dx} - 1\right)f = 0 \quad \text{が成立する。} \tag{1.41}$$

ということだと考え直せる。つまり $f = e^{-2x}$ と $f = e^{x}$ が解となる、というわけである。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

この解法は、n-次の特性方程式 (1.34) が重解を持つ場合はうまくいかない。重解があると解の数が減ってしまうからである[9]。一例として

$$\frac{d^2}{dx^2}f - 2k\frac{df}{dx} + k^2 f = 0 \tag{1.42}$$

[9]「複素数解でも大丈夫なのか？」と心配する人がいるかもしれないが、複素数解であっても立派な解である。すぐ後で虚数解が出る場合が出てくる。

の場合で、対処方法を考えよう。上で述べた手順通りにやると、

$$\lambda^2 - 2k\lambda + k^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (\lambda - k)^2 = 0 \tag{1.43}$$

となって、解は $\lambda = k$ しか出ない。ということはつまり、e^{kx} だけが解となる。しかし、二階線型微分方程式なのだから、解は二つ出る筈である。

ここで以下のことに注意しよう。特性方程式に重解があるということは、元の方程式は

$$\left(\frac{d}{dx} - k\right)^2 f = 0 \tag{1.44}$$

と書けるのである。e^{kx} は $\left(\frac{d}{dx} - k\right) f = 0$ の解である。今求めたいのは「$\left(\frac{d}{dx} - k\right)$ を 2 回かけて 0 になる関数」であるのに、「$\left(\frac{d}{dx} - k\right)$ を 1 回かけて 0 になる関数」($= e^{kx}$) だけを求めたことになる。

実は「$\left(\frac{d}{dx} - k\right)$ を 1 回かけると (定数) $\times\, e^{kx}$ になる関数」も解になるのである。そういう関数はすぐに作ることができる。答は

$$xe^{kx} \tag{1.45}$$

である。実際これに $\left(\frac{d}{dx} - k\right)$ をかけてやると、

$$\left(\frac{d}{dx} - k\right)\left(xe^{kx}\right) = \frac{d}{dx}\left(xe^{kx}\right) - kxe^{kx} = \frac{dx}{dx}e^{kx} + x\frac{d}{dx}e^{kx} - kxe^{kx} = e^{kx} \tag{1.46}$$

となる。これにもう一度 $\left(\frac{d}{dx} - k\right)$ がかかれば、答は 0 である。

よって、λ を決める方程式に重解があった時は、$e^{\lambda x}$ だけでなく、$xe^{\lambda x}$ も解になる。こうして、ちゃんと 2 個の解が得られた。

以上のように考えると、特性方程式に重解が現れた場合、二重解なら $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$ を、三重解なら $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}$ を解とすればよいことがわかる（以下同様)。

【補足終わり】

では、単振動の方程式に戻ろう。一般論通り、$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\lambda t}\right) = -\omega^2 e^{\lambda t} \tag{1.47}$$

となるから、特性方程式は

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tag{1.48}$$

となり、その解は $\lambda = \pm \mathrm{i}\omega$ である。つまり解は

$$x(t) = Ce^{\mathrm{i}\omega t} + De^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.49}$$

となる。$x(t)$ は実数の筈なので、$(x(t))^* = x(t)$ とならなくてはいけない。

$$(x(t))^* = C^* e^{-\mathrm{i}\omega t} + D^* e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.50}$$

だから、$D = C^*(C = D^*)$ である必要がある。ここで「二階微分方程式なのに解にパラメータが一つしかない！」と心配する人もいるかもしれないが、それは無用である。なぜなら今の場合 C は複素数なので、$C = C_R + \mathrm{i}C_I$ というふうに C の実数部 C_R と C の虚数部 C_I に分ければ、ちゃんと実数 2 個分のパラメータがあることになる。

複素数 $z = x + \mathrm{i}y$ は $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ と書くこともできる。x, y と r, θ の関係は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1.51}$$

であり、直交座標と極座標の関係と同じである（なので、$z = e^{\mathrm{i}\theta}$ のような書き方のことを「極表示」と呼ぶ)。$= \sqrt{x^2 + y^2}$ なので、$r = |z|$ と書くこともある。

極表示を使ったならば、

$$x(t) = Ce^{\mathrm{i}\omega t} + C^* e^{-\mathrm{i}\omega t} = |C|e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\omega t} + |C|e^{-\mathrm{i}\alpha}e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.52}$$

と書けるのだが、$e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$ であることを思えば、

$$x(t) = |C|\cos(\omega t + \alpha) \tag{1.53}$$

という答が出たことになる[10]。

このように複素数を使って単振動を表す方法とその利点については、また後で述べる。

1.2.4 級数展開で解く

最初に書いておくが、単振動の運動方程式を解くときに、こんな面倒なことをする必要はない。ここまでで説明した手法で充分だろう。しかし、後々、ここまでの方法では簡単には解けない微分方程式を解く時もあるだろう。その時には今から説明する級数展開という方法が役にたつ。そこで、簡単な場合でその予行演習をしておこうというのがこの項の目的である。

まず、時刻 $t=0$ で物体が $x=A$ にいて、初速度が 0 であったとしよう。すると、この時右辺は $-\omega^2 A+(t=0$ で 0 になる部分) という形になる。左辺にも同じ項がでなくてはいけない。2 階微分して $-\omega^2 A$ になるためには、x には $-\frac{1}{2}A\omega^2 t^2$ という項が必要である。すると左辺は $A - \frac{1}{2}A\omega^2 t^2 + \cdots$ という形になる。数式で表現すると、

$$
\begin{array}{rrll}
 & \dfrac{d^2x}{dt^2} & = -\omega^2 x & \\
 & & & \big\downarrow\ (x = A \text{ と置いてみよう}) \\
(\text{左辺に } -\omega^2 A \text{ が足りない}\rightarrow) & 0 & = -\omega^2 A & \\
 & & & \big\downarrow\ (x \text{ に} -\frac{1}{2}A\omega^2 t^2 \text{を足す。}) \\
(\frac{1}{2}A\omega^4 t^2 \text{が足りない}\rightarrow) & -\omega^2 A & = -\omega^2 A + \dfrac{1}{2}A\omega^4 t^2 & \\
 & & & \big\downarrow\ (x \text{ に} \frac{1}{24}A\omega^4 t^4 \text{を足す}) \\
 & \vdots & \text{以下、えんえんと続く。} &
\end{array}
\tag{1.54}
$$

これをえんえん続けると、

$$x = A\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{24}\omega^4 t^4 - \frac{1}{720}\omega^6 t^6 + \frac{1}{40320}\omega^8 t^8 + \cdots\right) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\omega t)^{2n} \tag{1.55}$$

となることがわかるが、これはすなわち、$x = A\cos\omega t$ ということである。

もっと一般的な式を出しておこう。まず、解を

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \tag{1.56}$$

とする。まだ a_n を決めていないので、これで（時刻 $t=0$ において発散したりしないという条件はつくが）任意の関数を表すことができる。これを運動方程式に代入する。左辺は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots \tag{1.57}$$

となる。ここで、$n=0$ と $n=1$ は $n(n-1)=0$ となるので和に入らないことに注意しよう。ゆえに、この式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots \tag{1.58}$$

[10]数学で始めて複素数を習った時「なんでこんなものが必要なのか？」という疑問は誰もが持ったことだと思う。複素数を使って方程式の解を出すということで、こういう解法が編み出されたわけである。複素数の存在は、いろんなところで我々を助けてくれる。

と書いてもいい（n の和が 2 からになったことだけが違いである)。

結局運動方程式は

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = -\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{1.59}$$

と書けることになる。左辺には t^{n-2}(n は 2 から ∞ まで) が、右辺には t^n (こっちの n は 0 から ∞ まで) があることに注意しよう。同じ次数のものが上下にならぶように式を書き直すと、

$$\begin{array}{cccccccc} & 2\cdot 1\cdot a_2 & +3\cdot 2\cdot a_3 t & +4\cdot 3\cdot a_4 t^2 & +\cdots & +k(k-1)a_k t^{k-2} & +(k+1)ka_{k+1}t^{k-1} & +\cdots \\ = & -\omega^2 a_0 & -\omega^2 a_1 t & -\omega^2 a_2 t^2 & +\cdots & -\omega^2 a_{k-2}t^{k-2} & -\omega^2 a_{k-1}t^{k-1} & +\cdots \end{array} \tag{1.60}$$

となる。

この式は任意の t の値で成立しなくてはいけないのだから（つまり t の恒等式なのだから)、t^k の各係数がすべて一致しなくてはいけない。そこで、上の式を縦に見ることで、$2a_2 = -\omega^2 a_0, 6a_3 = -\omega^2 a1, \cdots$ のように次々と a_n に関する式を作ることができる。代表として t^{k-2} に比例する項を取り上げると、

$$\begin{aligned} k(k-1)a_k =& \quad -\omega^2 a_{k-2} \\ a_k =& \quad \frac{-\omega^2}{k(k-1)} a_{k-2} \end{aligned} \tag{1.61}$$

となる。次にこの式を $k \to k-2$ と置き換えた式 $a_{k-2} = \dfrac{-\omega^2}{(k-2)(k-3)} a_{k-4}$ を代入する。以下同じことを

$$\begin{aligned} a_k =& \quad \frac{-\omega^2}{k(k-1)} \cdot \frac{-\omega^2}{(k-2)(k-3)} a_{k-4} \\ =& \quad \frac{-\omega^2}{k(k-1)} \cdot \frac{-\omega^2}{(k-2)(k-3)} \cdot \frac{-\omega^2}{(k-4)(k-5)} a_{k-6} \end{aligned} \tag{1.62}$$

のように延々続けていくと、k が偶数なら最後に $\dfrac{-\omega^2}{2\cdot 1} a_0$ が出ておわる。その間に $-\omega^2$ は $\dfrac{k}{2}$ 個出るだろう。

一方、k が奇数なら、最後に $\dfrac{-\omega^2}{3\cdot 2} a_1$ が出て終わる。$-\omega^2$ は $\dfrac{k-1}{2}$ 個出る。結果をまとめると、

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-\omega^2)^{\frac{k}{2}}}{k!} a_0 & k \text{ が偶数} \\ \dfrac{(-\omega^2)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} a_1 & k \text{ が奇数} \end{cases} \quad \text{または、} \begin{cases} a_{2n} = (-1)^n \dfrac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 \\ a_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1 \end{cases} \tag{1.63}$$

a_0, a_1 は最後まで決まらない。二階微分方程式なのだから、決まらないパラメータが二つあってちょうどよい。

$$\sin\theta \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \tag{1.64}$$

$$\cos\theta \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n} \tag{1.65}$$

という展開と見比べると、解は

$$x(t) = a_0 \cos\omega t + \frac{a_1}{\omega} \sin\omega t \tag{1.66}$$

である。当然ながら、結果は他の場合と一致する。

級数展開という方法は、ずいぶんややこしいと思えるだろう。しかし、こういう方法を使わないと解けない微分方程式も、もちろんある。ある意味、級数展開は微分方程式を解くための最終兵器である。

1.3　複素数で表現する単振動

ここで、後で使うために、単振動を複素数を使って表現する方法を学んでおく。諸君の中には「複素数なんて嫌いだ」とか「複素数が出てくるとよくわからなくなる」とか思う人が多いかもしれない。しかし、振動を複素数で表すことで計算は飛躍的に簡単になる。たとえ最初とっつきにくく感じたとしても、複素数で計算する方法を知っておいた方が、将来においては絶対に得をする。我慢をして複素数を使う方法を習得すれば、後のメリットは非常に大きい。また、量子力学の波動関数は本質的に複素数で書き表すべきものであり、量子力学を複素数を使わずに計算することは不可能ではないにせよとても面倒なことになる。量子力学で使う時のためにも、複素数による計算に慣れておくことは大事である。

そこでここで、複素数を使って振動を表すとはどういうことか、それにはどのようなメリットがあるのかをまとめておく。

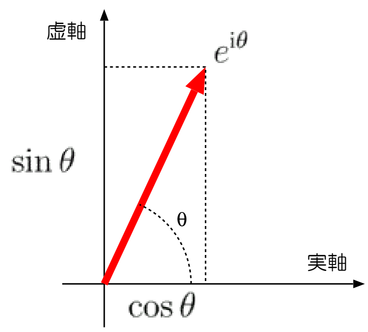
本来の単振動の解は $y = A\cos(\omega t+\alpha)$ または、$y = B\sin(\omega t+\beta)$ である。sin と cos は本質的には位相の差だけであって、α を適当にずらせば同じである。具体的には、$\cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ なので、$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}, A = B$ とすればこの二つの式は同じである。以下では cos の方の式で考えよう。

ここで、$Ae^{\mathrm{i}(\omega t+\alpha)}$ という複素関数を考える。下に示す「オイラーの公式」を使うと[11]、複素関数 $Ae^{\mathrm{i}(\omega t+\alpha)}$ の実数部分を取れば $A\cos(\omega t+\alpha)$ になることがわかる。

オイラーの公式

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

右に書かれているのは「複素平面」と呼ばれる平面で、その複素数の実数部分を横軸、虚数部分を縦軸として描いたグラフである。複素平面上では、$e^{\mathrm{i}\theta}$ という数は「長さが１で、実軸と角度 θ の傾きを持つベクトル」になる。



以下で $A\cos(\omega t+\alpha)$ のような式をたくさん考えるわけであるが、これを $e^{\mathrm{i}(\omega t+\alpha)}$ の実数部分であると考えると、計算が楽になるのである。

実数だけでいいものをわざわざ虚数部分を足しているわけで「計算すべきものの数が増えてむしろややこしくならないか？」と心配する人がいるかもしれないので、この時点ですぐわかる複素数表示のメリットを上げよう。

$$Ae^{\mathrm{i}(\omega t+\alpha)} = \underbrace{Ae^{\mathrm{i}\alpha}}_{=A'} e^{\mathrm{i}\omega t} = A' e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.67}$$

と書き直すと、未知数の部分を A' に押し込めることができる。A は実数だが A' は複素数なので、未知数は $(A,\alpha) \to A'$(実数２成分 $\to$ 複素数１成分) と変化した。ゆえに未知数の数が減ったわけではない。ただ、一カ所に固まったということが大事なのである。sin または cos を使っていると、

$$\underbrace{A}_{\text{未知数}}\sin(\omega t + \underbrace{\alpha}_{\text{未知数}}) \tag{1.68}$$

となる。それに比べ、

$$\underbrace{A'}_{\text{未知数}} e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.69}$$

と一カ所に固められていると、計算の見通しが立ちやすくなり、少し楽になる。

---

[11] オイラーの式を証明するには、$e^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$ という式の n が偶数の部分と n の奇数部分を考えるとよい。上の公式 (1.65) と (1.64) が出てくる。

次に、三角関数の加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) =& \quad \sin A\cos B+\cos A\sin B \\
\cos(A+B) =& \quad \cos A\cos B-\sin A\sin B
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

が複素数を使うと簡単に出ることを示そう。$\cos(A+B), \sin(A+B)$ は、$e^{\mathrm{i}(A+B)}$ の実数部分と虚数部分である。一方、$e^{\mathrm{i}(A+B)} = e^{\mathrm{i}A}e^{\mathrm{i}B}$ と書けるので、

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}(A+B)} =& \quad e^{\mathrm{i}A}e^{\mathrm{i}B} \\
\cos(A+B)+\mathrm{i}\sin(A+B) =& \quad (\cos A+\mathrm{i}\sin A)(\cos B+\mathrm{i}\sin B) \\
\cos(A+B)+\mathrm{i}\sin(A+B) =& \quad \cos A\cos B-\sin A\sin B+\mathrm{i}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

という計算をしてやり、左辺と右辺を比較するとちゃんと加法定理が出る。このことは、次のような意味を持つ。

三角関数を表すのに、「$\cos\theta$」と書くのと、「$e^{\mathrm{i}\theta}$ の実数部分」と書くのは、全く同じである。しかし、「θ に α を足してください」という操作をするよう頼まれたとしよう。この「角度を α 足す」という操作は、$\cos\theta$ に対しては「$\cos\theta \to \cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha$」という計算になる。一方、$e^{\mathrm{i}\theta}$ に対しては「$e^{\mathrm{i}\theta} \to e^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$」という操作になる。複素数を使うと「角度を α 足す」という操作が「$e^{\mathrm{i}\alpha}$ をかける」という計算で終わってしまうのである。これは計算をとても単純にしてくれる。

同様に、

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 =& \quad e^{2\mathrm{i}\theta} \\
(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2 =& \quad \cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta \\
\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\mathrm{i}\cos\theta\sin\theta =& \quad \cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

という計算から倍角公式

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta =& \quad \cos^2\theta-\sin^2\theta \\
\sin 2\theta =& \quad 2\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

を作ることができる（３倍角公式や４倍角公式も同様)。

たとえば、$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$ という式がある。この式は、右辺に加法定理を使うと証明できる。念のために書いておくと、

$$
\begin{aligned}
\cos(A+B) =& \quad \cos A\cos B-\sin A\sin B \\
& \qquad\qquad (A=\theta, B=\tfrac{\pi}{4}\text{を代入すると、}) \\
\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) =& \quad \cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4} \\
& \qquad\qquad (\cos\tfrac{\pi}{4}=\sin\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\text{なので}) \\
=& \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

という計算を行う（これが左辺 $\div\sqrt{2}$ である)。

だが、左辺を見てすぐに右辺を書き下すのは（慣れれば簡単だが、慣れるまでは）難しい。しかし複素数での表示を使うと

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\theta} =& \quad \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \\
\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} =& \quad \mathrm{i}\cos\theta-\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

となることから、$\cos\theta$ は $e^{\mathrm{i}\theta}$ の実数部分であり、$-\sin\theta$ は $ie^{\mathrm{i}\theta}$ の実数部分である。ゆえに、

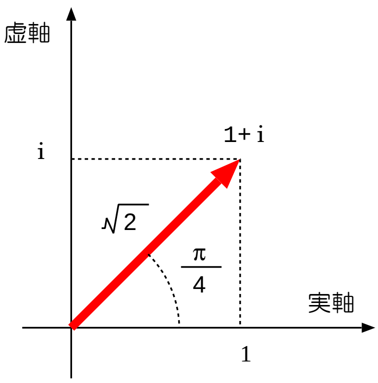
$$
\begin{array}{lrl}
 & \cos\theta & = e^{\mathrm{i}\theta}\text{ の実数部分} \\
+) & -\sin\theta & = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\text{ の実数部分} \\
\hline
 & \cos\theta-\sin\theta & =(1+\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\theta}\text{ の実数部分}
\end{array}
\tag{1.76}
$$

となって、$(1+\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\theta}$ の実数部分を考えれば $\cos\theta-\sin\theta$ が計算できることがわかる。この式において、$e^{\mathrm{i}\theta}$ という「θ が変化すると変化する部分」が一塊となって同類項でくくってしまえたことに注意しよう。これが複素数の形で書いた時のありがたみである。

ここで $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ であることに思い至れば、すぐに、

$$e^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\theta+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{1.77}$$

とできる。これの実数部分をとれば、$\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ である。



$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ に思い至るためには、右の図のような複素平面の図を描くとよい。複素平面上で、右向きの長さ 1 のベクトルは「実数 1」を表し、上向き長さ 1 のベクトルは「虚数単位 i」を表す。二つを足した物は、数としては $1+\mathrm{i}$、複素平面上では右上斜め 45 °向きの長さ $\sqrt{2}$ のベクトルである。複素平面内で原点のまわりに角度 α 回るという操作は、複素数で言うと $e^{\mathrm{i}\alpha}$ をかける、という掛け算になる。

この程度の計算ではまだ複素数のありがたみは十分に現れていない。たくさんの振動を足し算して合成していくような計算では特に、複素数はとてもありがたい。そのことは計算をしていく上で少しずつ納得していけると思う。結局のところ、「いったん複素数化→複素数で足し算→実数部分を取り出す」という一見遠回りに見える計算の方が、実数のみの計算よりも楽にできることがあるのである（特に波動や振動を考えるときには！）。

複素数を使うメリットは、２つの振動の合成を行う時、上のような図形的な足し算ができるということにある。もう少しややこしい場合の例を見よう。振幅の等しい二つの波が、位相差 $\frac{\pi}{3}$ で合成されたとしよう。実数表示で計算するなら、

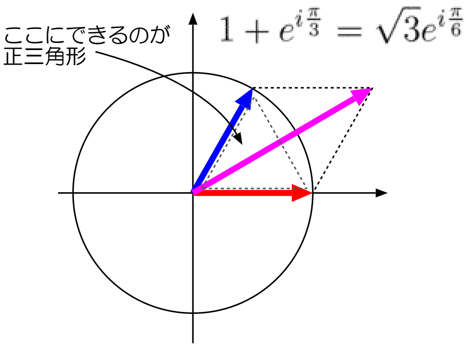
$$A\cos(\omega t)+A\cos(\omega t+\frac{\pi}{3}) \tag{1.78}$$

という計算をする。この和も、三角関数の公式を駆使すれば計算できる。しかしまず

$$Ae^{\mathrm{i}\omega t}+Ae^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=A\left(1+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.79}$$

のようにいったん複素化して足し算を行い、$1+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ の部分を複素平面で考えるほうが計算は楽である[12]。

図のように、1 という複素平面上のベクトルと $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ という複素平面上のベクトルは、$\frac{\pi}{3}$ という頂点角を持った二等辺三角形（ということは、正三角形である）を作る。合成されたベクトルは角度 $\frac{\pi}{6}$ を持ち、長さは正三角形の高さの 2 倍にあたる、$\sqrt{3}$ である。式で表現すれば



$$1+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \tag{1.80}$$

となる。

より一般的な場合を考えて、その時の複素数表示の威力を確認しておこう。

$$A\sin(\omega t+\alpha)+B\sin(\omega t+\beta)=\sqrt{A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2}\sin(\omega t+\gamma) \tag{1.81}$$

という公式がある。ただし、γ は後で求める角度である。

これも複素化してから考えよう。まず $Ae^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\alpha}+Be^{\mathrm{i}\omega t+\beta}$ を考える（これの虚数部分が $A\sin(\omega t+\alpha)+B\sin(\omega t+\beta)$ である）。

$$Ae^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\alpha}+Be^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\beta}=Ce^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\gamma} \tag{1.82}$$

として、C と γ を求めていこう。複素化したおかげで、この式から t 依存性を取り除くことはすぐに実行できて、

$$Ae^{\mathrm{i}\alpha}+Be^{\mathrm{i}\beta}=Ce^{\mathrm{i}\gamma} \tag{1.83}$$

である。

[12]なお、さらに足し算する三角関数の数が 3 個 4 個と増えていくと、ますます三角関数の公式を使って足し算など、していられなくなる。そういう問題を解くときは複素数サマサマである。

C を求めるために、この式の複素共役 $Ae^{-\mathrm{i}\alpha}+Be^{-\mathrm{i}\beta}=Ce^{-\mathrm{i}\gamma}$ を持ってきてかける（これができるのも複素表示のメリットの一つ）と、

$$\begin{aligned}\left(Ae^{\mathrm{i}\alpha}+Be^{\mathrm{i}\beta}\right)\left(Ae^{-\mathrm{i}\alpha}+Be^{-\mathrm{i}\beta}\right)&=C^2\\ A^2+ABe^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}+ABe^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)}+B^2&=C^2\\ A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2&=C^2\end{aligned}\tag{1.84}$$

となる。ゆえに、$C=\sqrt{A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2}$ である[13]。

もしも複素表示でなかったら

$$A\sin(\omega t+\alpha)+B\sin(\omega t+\beta)=C\sin(\omega t+\gamma)\tag{1.85}$$

から出発することになる。γ を含まない C の式を出したいのであれば、たとえばこの式 t に関する恒等式だとして、

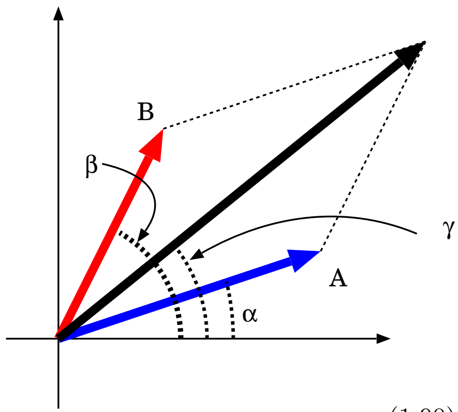
$$A\sin\alpha+B\sin\beta = C\sin\gamma\tag{1.86}$$
$$A\cos\alpha+B\cos\beta = C\cos\gamma\tag{1.87}$$

という二つの式を作って、$\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$ を使って γ を消去する。答はもちろん同じだが、少々複雑である。

これから、$e^{\mathrm{i}\gamma}$ も、

$$e^{\mathrm{i}\gamma}=\frac{Ce^{\mathrm{i}\gamma}}{C}=\frac{Ae^{\mathrm{i}\alpha}+Be^{\mathrm{i}\beta}}{\sqrt{A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2}}\tag{1.88}$$

と計算される。なお、γ がどの角度になるのは、図に示した[14]。この式の実部と虚部を考えれば、



$$\cos\gamma=\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta}{\sqrt{A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2}},\quad \sin\gamma=\frac{A\sin\alpha+B\sin\beta}{\sqrt{A^2+2AB\cos(\alpha-\beta)+B^2}}\tag{1.89}$$

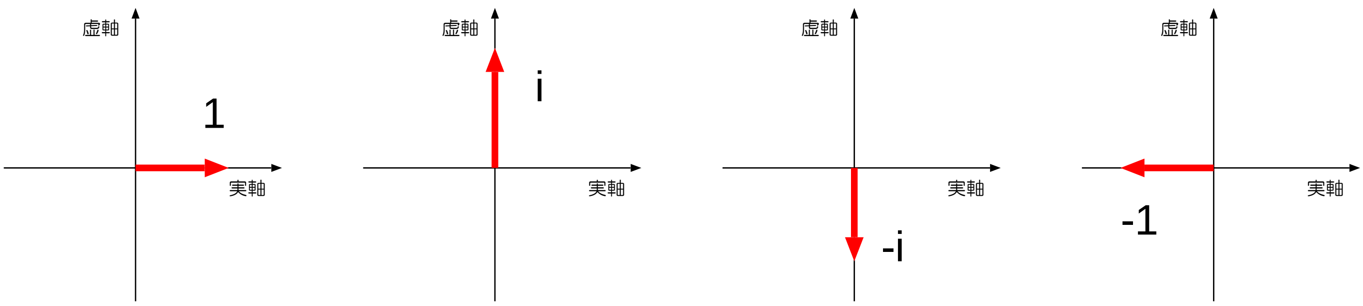
あるいは、

$$\tan\gamma=\frac{A\sin\alpha+B\sin\beta}{A\cos\alpha+B\cos\beta}\tag{1.90}$$

という式を作って γ を計算することができる。

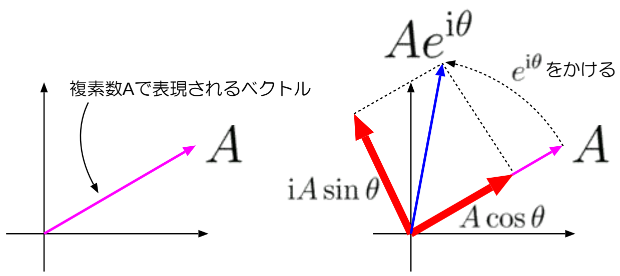
単振動は、回転を射影したものであったが、射影に対応するのが「複素平面での回転 $Ae^{\mathrm{i}\omega t}$ の実数部分（あるいは虚数部分）だけを取り出す」という操作である。

なお、$e^{\mathrm{i}\theta}$ が「角度 θ の回転」を意味するわけであるが、$\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ であることを考えると、i をかけると言う計算は「$\frac{\pi}{2}$ の回転」であり、i で割るという計算（これは、$-\mathrm{i}$ をかけるという計算と同じ）は「$-\frac{\pi}{2}$ の回転」を意味する。虚数の性質である「i を 2 回かけたら -1 になる」ということは、複素平面上で考えると「$\frac{\pi}{2}$ の回転（つまり 90 °回転）を 2 回やれば、π の回転（つまり 180 °回転）になる」という意味を持ってくることになる。



[13] ここで、C の答えに ± はつかない。C がもし負だったら、$\gamma\to\gamma+\pi$ と置き換えることでマイナス符号と取っ払うことができる。
[14] この図の三角形に余弦定理を使って C を求めるという方法もある。

なお、このように考えると、「$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ をかける」という操作は「元のベクトルの $\cos\theta$ 倍と、元のベクトルを 90 °回してから $\sin\theta$ 倍したものの和を作れ」という操作であるから、確かに「角度 θ 回転せよ」という操作になっている。



1.4　単振動の運動方程式の性質

単振動の運動方程式には、重要な性質がいくつかある。そしてそれらの性質は、物理のいろんな分野に現れる方程式に共通のものである。当然、これらの性質は後で出てくる波動方程式で重要になってくる。そこでその重要な性質について、ここでまとめておく。

1.4.1　線型微分方程式の性質

もう一度 (1.1) を見よう。この式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\underline{x(t)}=-\omega^2\underline{x(t)} \tag{1.91}$$

のように、両辺ともに、$x(t)$ の一次式になっている。方程式が $x(t)$ の一次式で書けている時、「この方程式は $x(t)$ に関して線型である」[15]という言い方をする。「**線型** (linear)」は「1 次式」の別名だと思えばよい。なぜ線形と呼ぶかというと、それはもちろん、グラフで書けば直線になるという意味である。

他にもたとえば、

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi \tag{1.92}$$

は「ψ に関して線型」だし、

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right)\phi=0 \tag{1.93}$$

は「ϕ に関して線型」である。なお、上の例はどちらも変数に関して一次の項のみを含む。この場合を特に「**同次** (homogeneous)」であると言う。一方、変数に関して 0 次の項（定数項）も含む場合は「**非同次** (inhomogeneous　または non-homogeneous)」と言う[16]。たとえば、電位 V と電荷密度 ρ の関係式であるポアッソン方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.94}$$

は「V に関して線型で非同次」ということになる。

線型同次方程式には利点がある。

線形同次微分方程式の解の重ね合わせ

> 線型で同次な微分方程式の解が複数個（例えば $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_i(x),\cdots$）見つかったとすると、これらに適当な係数をかけて足し算したもの
>
> $$a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\cdots+a_if_i(x)+\cdots=\sum_i a_if_i(x)$$
>
> もまた、この方程式の解である。

という性質を持つことである。たとえば $\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\omega^2x(t)$ の解として $X(t)$ と $Y(t)$ を見つけたとすると、$X(t)+Y(t)$ も、$X(t)-Y(t)$ も、あるいは $\sqrt{3}X(t)+45Y(t)$ も、全て解である。

---

[15]「線型」を「線形」と書く本もあるが、意味は同じ。
[16]「同次」「非同次」ではなく「斉次」「非斉次」と呼ぶこともある。

一応確認しておこう。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{3}X(t)+45Y(t)\right) &= \sqrt{3}\frac{d^2}{dt^2}X(t)+45\frac{d^2}{dt^2}Y(t) \\ &= -\sqrt{3}\omega^2X(t)-45\omega^2Y(t) \\ &= -\omega^2\left(\sqrt{3}X(t)+45Y(t)\right)\end{aligned} \tag{1.95}$$

となることから、$\sqrt{3}X(t)+45Y(t)$ は立派な解である。

$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\omega^2\left(x(t)\right)^2$ のように方程式が線型でない場合、たとえ $X(t)$ と $Y(t)$ が解であったとしても、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{3}X(t)+45Y(t)\right) &= \sqrt{3}\frac{d^2}{dt^2}X(t)+45\frac{d^2}{dt^2}Y(t) \\ &= -\sqrt{3}\omega^2\left(X(t)\right)^2-45\omega^2\left(Y(t)\right)^2 \\ &= -\omega^2\left(\sqrt{3}\left(X(t)\right)^2+45\left(Y(t)\right)^2\right) \\ &\neq -\omega^2\left(\sqrt{3}X(t)+45Y(t)\right)^2\end{aligned} \tag{1.96}$$

となるので $\sqrt{3}X(t)+45Y(t)$ は元の方程式の解ではなくなってしまう。

線型同次方程式の「重ね合わせが可能」という性質は物理をずいぶん簡単にしてくれる。線型でない場合を「**非線型**」というが、この場合は方程式を解くことも、解いた解を整理することもたいへんややこしくなる[17]。この講義では線型な方程式で表現されるような物理を主として扱うことにする。

線型だが非同次な場合については重ね合わせの原理は使えないが、例えばある微分演算子を $\mathcal{D}$ として

$$\mathcal{D}X=J \tag{1.97}$$

という、X に関する線型非同次方程式を解く時、この式における J（「非同次項」と呼ぶ）を 0 とした方程式

$$\mathcal{D}Y=0 \tag{1.98}$$

を作ってこれが解けた（Y が求められた）とすると、

$$\mathcal{D}(X+Y)=J \tag{1.99}$$

と元の方程式は等価となる。つまり

非同次方程式の解に同次方程式の解を重ね合わせる

> 線型非同次方程式（例：$\mathcal{D}X=J$）の解に、その方程式の非同次項を 0 にして作った線型同次方程式（$\mathcal{D}Y=0$）の解を足しても、やはり解（$\mathcal{D}(X+Y)=J$）である。

ということが言える。これを使って解をたくさん作ることができる。

また、同様に、

$$\mathcal{D}X=J_1,\quad \mathcal{D}Y=J_2 \tag{1.100}$$

という二つの非同次方程式が解ければ、この二つを足す事で、

$$\mathcal{D}(X+Y)=J_1+J_2 \tag{1.101}$$

という新しい非同次方程式を作ることができる。具体的な例で説明しよう。

電荷密度 ρ_1 で表せる電荷分布があったとする。この時はポアッソン方程式と呼ばれる $\triangle V_1=\frac{\rho_1}{\varepsilon_0}$ という式を解くと電位 V_1 が求められる。次に電荷密度 ρ_2 で表せる電荷分布があったとすれば、$\triangle V_2=\frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$ という式を解くと電位 V_2 が求められる。

[17] しかしそれゆえに面白い現象が隠れていることもあり「非線型物理」というのは物理の一分野になっている。

では、この二つの電荷が両方存在している時、すなわち電荷密度が $\rho_1+\rho_2$ の時はどうすればよいかというと、この二つの式を足せば

$$\triangle(V_1+V_2)=\frac{\rho_1+\rho_2}{\varepsilon_0} \tag{1.102}$$

という式となることからわかるように「電荷密度 ρ_1 がある時の電位 V_1 と、電荷密度 ρ_2 がある時の電位 V_2 を足せば、電荷密度 $\rho_1+\rho_2$ がある時の電位が得られる」というわけである。

線形微分方程式では、このようにして解の足し算（重ね合わせ）ができる。

ところで「解をたくさん作ることができる」と言ったが、既知の解の和で書かれている解は元の解と独立ではない[18]。

二階線型微分方程式ならば独立な解は二つしかない（n 階線型微分方程式なら n 個しかない)。ゆえに、二個の独立な解を見つけたら、「全ての解を見つけた」と宣言してかまわないことになる[19]。それ以外の解は、これまでみつけた2つの解を組み合わせて表現できるのである。

このことを一般の場合で説明しよう。n 解線型微分方程式の n 個の互いに独立な解 $f_1,f_2,\cdots f_n$ をみつけたとしよう。すると、$a_1,a_2,\cdots,a_n$ を任意の数として、$a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$ も解になった。この a_i もまた、方程式から決まらないパラメータで、すでに n 個ある。ゆえに、それ以上に解が見つかることはない。この条件自体は方程式をどう解いたかには関係ないことなので、どんな解き方であれ、

線型微分方程式の解の個数

n 階の線型微分方程式を解いたのなら、n 個の互いに独立な階を見つければ十分である。

ということが言えるのである。

単振動の場合、解を $A\sin(\omega t+\alpha)$ と書くと二つの解が出てないように見えるかもしれないが、

$$A\sin(\omega t+\alpha)=A'\sin\omega t+B'\cos\omega t \tag{1.103}$$

と表現することもできる。この二つが同じ意味であることは加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$ からわかる。この場合、$A'=A\cos\alpha, B'=B\sin\alpha$ である。この右辺の表現では、$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ という二つの独立な解を重ね合わせて新しい解を作っていることになる。

1.4.2 固有値方程式

(1.1) は

$$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}}_{\text{演算子}}\underbrace{x(t)}_{\text{関数}}=\underbrace{-\omega^2}_{\text{定数係数}}\underbrace{x(t)}_{\text{元の関数}} \tag{1.104}$$

という形になっている。このような形の方程式を「**固有値方程式**」と呼び、この方程式の解となる関数を「**固有関数**」、この時出てくる定数係数を「**固有値**」と呼ぶ。もっと複雑な、たとえば

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta\right)=-\lambda\Theta \tag{1.105}$$

など[20]も、$\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{d}{dx}\right)$ の部分を演算子と考えると、固有値方程式である（固有関数は Θ、固有値は $-\lambda$)。

このような固有値方程式の、固有値と固有関数の関係（たとえば、固有値が変わると固有関数がどのように変化するか、など）からいろいろと面白く便利な関係が得られる（詳しくは後で話そう)。固有関数と固有値は、振動や波動はもちろん、量子力学やその他の物理でもよく登場する概念で、これも計算を飛躍的に簡単にしてくれる便利なツールである。

---

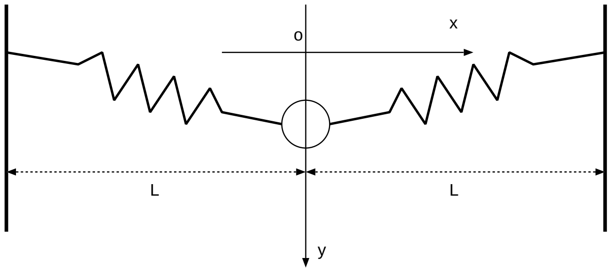
[18]ある一つの関数 f が他の関数 $g,h,\cdots$ などの適当な係数をかけてからの和の形で書けない時、「f は独立だ」と言う。逆に $f=3g-2h$ などと書けた時は、「f,g,h は独立でない」と言う。

[19]残念ながら、非線型な方程式の場合、こうはいかない場合がある。

[20]これは Legendre の微分方程式と呼ばれるもので、これの解が Legendre 多項式である。極座標で波動方程式を解く時などに頻繁に用いられる。

1.5　章末演習問題

[演習問題 1-1]
ばね定数 k、自然長 L のばねを 2 本、質量 m の物体に取り付け、図のように配置した。



(1) 図のように、x, y 座標を置く。物体が垂直方向にのみ運動し、$x = 0$ に保たれるとして、運動方程式を求めよ。

(2) つりあいの位置を求めよ。

(3) y のつりあいの位置からの変位は小さいと仮定すると、運動が単振動となることを示し、その角振動数を求めよ。

[演習問題 1-2] 以下の定数係数線型同次微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) - 3\dfrac{d}{dx}f(x) - 10f(x) = 0$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) - 6\dfrac{d}{dx}f(x) + 9f(x) = 0$

(3) $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x) - f(x) = 0$

[演習問題 1-3] 微分方程式 $\dfrac{d}{dx}F(x) = kF(x)$ の解は $F(x) = Ae^{kx}$ であること（A は任意の定数）を、$F(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$ と級数展開することで示せ。

[演習問題 1-4] $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x) - 6\dfrac{d}{dx}f(x) + 10f(x) = 0$ という方程式の実数解を求め、そのグラフの概形を書け。

[演習問題 1-5] 次の複素数の和が 0 になることを、複素平面上に図を描いて説明せよ。

(1) $1 - \mathrm{i} + \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

(2) $1 + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

(3) $1 + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}} + e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}} + e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$

[演習問題 1-6] 以下の三角関数の公式を、$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ という式を利用して証明せよ。

(1) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

(2) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

(3) $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

(4) $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

第2章　減衰振動、強制振動

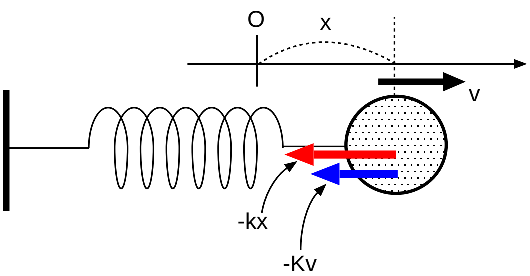
この章もウォーミングアップの続きである。単振動は、「**フックの法則に従う力だけが働く**（たとえば空気抵抗などは考えない)」という理想化された状況で起こる振動であった。ここでは少し状況を現実に近づけてみよう。

この章で学ぶ大事なこと

- **抵抗がある場合の振動**
- **周期的な外力が加えられる場合の振動**
- **共振現象**

2.1　減衰振動

ばね振り子を考える。ただし、いつも前提として置く「空気の抵抗を無視して」を今回はとっぱらって、空気の抵抗をちゃんと計算にいれてみよう。空気の抵抗がどんな式になるかはいろんな考え方があるが、ここでは速度 $\frac{dx}{dt}$ に比例するとしよう。その比例定数を K で表すと、運動方程式は



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\frac{dx}{dt} \tag{2.1}$$

となる。$K\frac{dx}{dt}$ の前にマイナスがついているのは、その時持っている速度とは逆向きに働くこと（つまり「抵抗」であること）を示している。これを解くには、定数係数の線型同次微分方程式の一般的解法を使うのがよさそうである。すなわち、$x = Ae^{\lambda t}$ と置くことにより、

$$m\lambda^2 Ae^{\lambda t} = -kAe^{\lambda t} - K\lambda Ae^{\lambda t} \tag{2.2}$$

という式が作られる。これから、

$$m\lambda^2 + K\lambda + k = 0 \tag{2.3}$$

を解いて λ を求めましょう、という問題になる。これは2次方程式であるから解の公式を使って、

$$\lambda = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.4}$$

となる。判別式（ルートの中身）$K^2 - 4mk$ の符号によって、解の様子はだいぶ変わってくる。

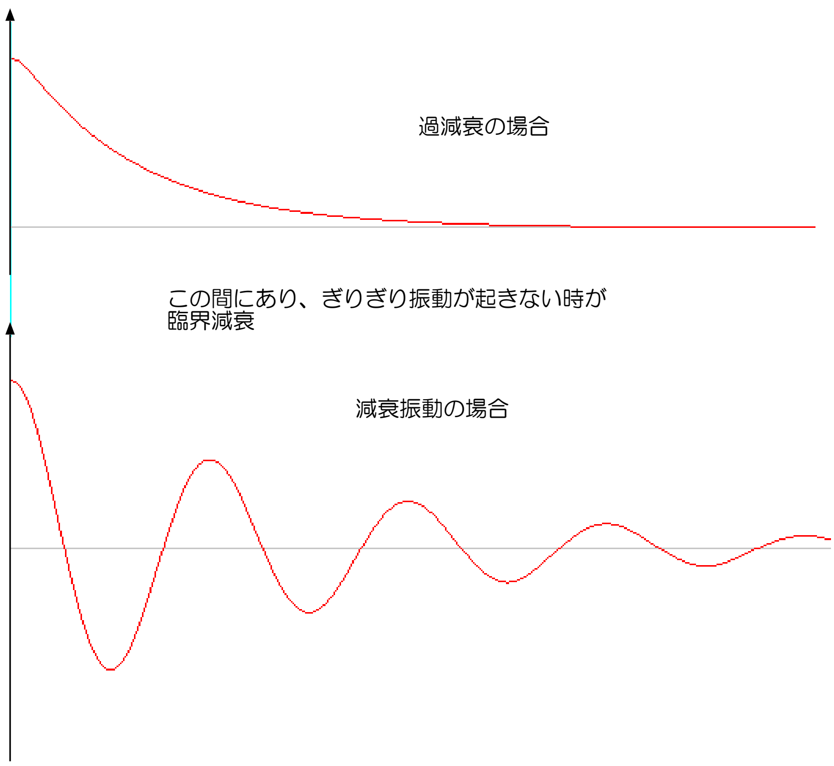
$\boxed{[K^2 - 4mk > 0 \text{ の時}]}$

λ には二つの解が出るが、どっちも実数である。$\lambda_1 = \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}$ と $\lambda_2 = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}$ になる。この λ_1, λ_2 はどちらも負なので、t が大きくなると 0 に近づく解である。ので、一般解は

$$x = C_1 e^{-\left(\frac{K - \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{K + \sqrt{K^2 - 4mk}}{2m}\right)t} \tag{2.5}$$

となる。

この運動が起こる条件を考えてみると、$K^2-4mk>0$ となるのは、「K が大きい（すなわち、摩擦による抵抗が大きい。ねば〜〜〜〜っとした液体の中で物体が振動しているところを思い浮かべるべし）」あるいは「m が小さい（つまり、軽い。軽いがゆえに抵抗力の影響を受ける。紙切れが空気中では落ちるのが遅いのと同じ）」または「k が小さい（つまり、ばねによる復元力が小さい）」ということになる。どの場合でも振動が起こらなくなりそうだ、と実感できるだろう。



$\boxed{K^2-4mk<0 \text{ の時}}$

こうなる時というのは K が小さい時。つまり抵抗があまりかからなくて、振動に対するじゃまが少ない時である。じゃまが少ないので振動は起こるが、抵抗のせいで少しずつ振幅が減っていく。この運動を「**減衰振動**(dumped oscillation)」と言う。ここで「減衰 (dump)」は振幅が e^{-Kt} に比例して小さくなっていくことを示している。これを数式で確認しよう。

この時も二つ解が出るが、ともに複素数である。$\lambda_1=\dfrac{-K+\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}$ と $\lambda_2=\dfrac{-K-\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}$ と置こう。一般解は

$$x=Ce^{-\left(\frac{K-\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}\right)t}+De^{-\left(\frac{K+\mathrm{i}\sqrt{4mk-K^2}}{2m}\right)t} \tag{2.6}$$

x は実数であるから、$D=C^*$ なので、$C=\dfrac{A}{2}e^{\mathrm{i}\alpha}, D=\dfrac{A}{2}e^{-\mathrm{i}\alpha}$ とおいて、

$$x=\frac{A}{2}e^{-\frac{K}{2m}t}\left(e^{\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right)}+e^{-\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right)}\right)=Ae^{-\frac{K}{2m}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right) \tag{2.7}$$

と書き直せる。この振動は、振幅が Ae^{-Kt} のように時間が経つと小さくなっていく単振動だと考えることができるだろう。

その単振動の角振動数は $\dfrac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}$ である。$K=0$ ならば、これはちょうど $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となって、普通の単振動と同じである[1]。Kv という抵抗力があるおかげで角振動数が小さくなっている（＝周期が長くなっている）ことがわかる。抵抗があれば振動が遅くなるというのは物理的にももっともなことである。

この運動が起こる条件を考えてみると、$K^2-4mk<0$ となるのは、「K が小さい（すなわち、摩擦による抵抗が小さい）」あるいは「m が大きい（つまり、重い。重いがゆえに抵抗力の影響を受けにくい。鉄球が空気抵抗をものともせずどすんと落ちるのと同じ）」または「k が大きい（つまり、ばねによる復元力が大きい）」ということになる。どの場合でも振動が起こりそうだ、と実感できるだろう。

$\boxed{K^2-4mk=0 \text{ の時}}$

上の二つの場合のちょうど境界に対応する。運動自体はこの時、(2.4) の解は一つ $x=Ce^{-\frac{K}{2m}t}$ しかない。しかし、すでに述べたように、二階微分方程式である (2.1) の解は独立なものが二つあるはずである。

[1](2.7) で $K=0$ とおけば、普通の単振動の式 $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\alpha\right)$ が出てくる。

(2.4) を見ると、$K^2 - 4mk = 0$ の時は $\lambda = -\dfrac{K}{2m}$ という解しかない。これはつまり、元々の運動方程式が

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{K}{2m}\right)^2 x = 0 \tag{2.8}$$

という形になるということである (上の式を展開して $K^2 = 4mk$ を使えば、(2.1) に戻ることはすぐに確かめられる)。この方程式の解はまず $e^{-\frac{K}{2m}t}$ であるが、実はこの方程式は上の式の $\left(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{K}{2m}\right)^2$ を $\left(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{K}{2m}\right)$ に変えた方程式

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{K}{2m}\right) x = 0 \tag{2.9}$$

の解である。(2.9) の解なら (2.8) の解なのは当然である。しかし、(2.8) の解はこれだけではなくもう一つ、$te^{-\frac{K}{2m}t}$ がある。確認しよう。$te^{-\frac{K}{2m}t}$ に $\dfrac{d}{dt} + \dfrac{K}{2m}$ を一回かけると、

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{K}{2m}\right) te^{-\frac{K}{2m}t} = e^{-\frac{K}{2m}t} \tag{2.10}$$

となる。これにもう一回 $\dfrac{d}{dt} + \dfrac{K}{2m}$ を一回かける 0 になる。

よって一般解はこの二つの和で表現され、

$$(at + b)e^{-\frac{K}{2m}t} \tag{2.11}$$

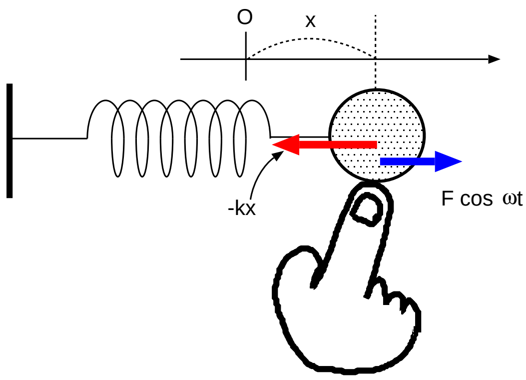
ということになる (a, b は初期条件から決まる定数)。この運動は「**臨界減衰**」とか「**臨界制動**」とか呼ばれる。過減衰の場合同様、振動は起きていない。過減衰と減衰振動の、ちょうど境目（臨界）にある運動なのである。

2.2 強制振動

前節は抵抗が働く場合（つまりエネルギーがロスする場合）であったが、今度は逆にエネルギーが外部から注ぎ込まれる場合（つまり、外部から力を加えて振動を起こさせる場合）を考えよう。つまり、振り子を手で揺らしているような場合である。解くべき方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) + F\cos\omega t \tag{2.12}$$

である。



2.2.1 線型非同次方程式の解き方

(2.12) は、線型ではあるが非同次である（つまり、$x(t)$ の 0 次の項 $F\cos\omega t$ を含んでいる）。このような方程式の解き方の一つとして、(2.12) を満たす関数をとにかく一個見つけてきて、その解（特解）を使って解くべき方程式を同次方程式に直してしまうという方法ある。以下、(2.12) を例にして、その方法を説明しよう。

まず、

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -kX(t) + F\cos\omega t \tag{2.13}$$

を満たす関数 $X(t)$ を見つける。実は一つ解を見つけるならば簡単である。「$F\cos\omega t$ の部分は角振動数 ω で振動しているのだから、$X(t)$ もそうだろう」と推測して、$X(t) = A\cos\omega t$ としてみよう。代入すると、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(A\cos\omega t) = -kA\cos\omega t + F\cos\omega t \tag{2.14}$$

という式ができるが、例によって微分した後で $\cos\omega t$ で割ってから計算していくと、

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 mA =& \quad -kA + F \\
& \qquad\qquad\qquad (-kA \text{ を移項}) \\
(k - m\omega^2)A =& \quad F \\
& \qquad\qquad\qquad (k - m\omega^2 \text{で割る}) \\
A =& \quad \frac{F}{k - m\omega^2}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

となるので、解は

$$X(t) = \frac{F}{k - \omega^2}\cos\omega t \tag{2.16}$$

となった。

ここで、「ああ解が見つかった」と安心してはいけない。二階微分方程式を解いたのであるから、解は未定のパラメータを二つ含まなくてはならない。ところが、上の解には決まってないパラメータが一つもない。つまり、求めるべき解は「２個のパラメータで表現されるたくさんの解（一般解)」なのに、たった一つの解だけを求めたことになる。その意味でこのような一つの解を「**特解**」と呼ぶ。これではたくさんの解のうち、たった一つを求めただけであって、「解が見つかった」とはまだ言えないのである（二階微分方程式の解は二つの決定できないパラメータを持つ、ということを思い出せ！)。

そこで、特解を一つ見つけた後で、一般解を求める方法を説明しよう。$x(t) = y(t) + X(t)$ とおくと、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y(t) + \underline{X(t)}) = -k(y(t) + \underline{X(t)}) + \underline{F\cos\omega t} \tag{2.17}$$

という式ができる。ここで、アンダーラインの部分はその部分だけでも式が成立する。したがってアンダーラインしてない部分を見ると、$y(t)$ が満たすべき方程式は

$$m\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -ky(t) \tag{2.18}$$

とわかる。(2.17) は (2.13) と (2.18) を辺々足した形になっていることに注意しよう。

これで、解くべき方程式は線型同次である (2.18) になった。これを通常の方法で解けば、二個のパラメータを含んだ解が得られる。つまり、非同次方程式の特解と同次方程式の一般解を足せば、非同次方程式の一般解が得られるのである。

2.2.2　共振・共鳴

(2.18) の解はもはやおなじみの

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{2.19}$$

である ($\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ で、振幅 C と初期位相 α が運動のパラメータ)。よって一般解は、

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{k - m\omega^2}\cos\omega t \tag{2.20}$$

となった。$k = m(\omega_0)^2$ であることを使うと、

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{m\left((\omega_0)^2 - \omega^2\right)}\cos\omega t \tag{2.21}$$

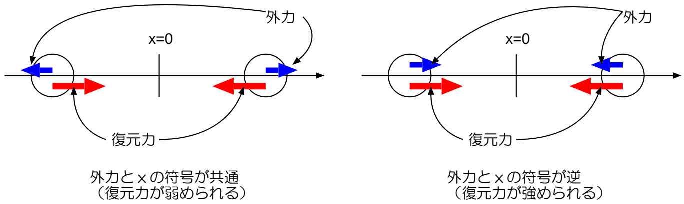
となる。つまり、外からかかる力の角振動数 ω と、強制力がなかった時に起こる単振動の角振動数 ω_0 の各々の自乗の差が振動の振幅に効いてくることになる。強制力がない場合の振動を「**固有振動**」と呼び、その振動数、角振動数を固有振動、固有角振動数と呼ぶ。

上の式からわかるように、ω が ω_0 に近い時（強制振動の振動数が固有振動数に近い時)、振動の振幅は非常に大きくなる。このような現象を「**共振**」または「**共鳴**」[2]と言う（英語では resonance)。

[2]「共振」は物体の振動の場合に、「共鳴」は音の場合によく使われるが、明確な区別はない

ここで、$C=0$ の場合を考察しておこう。その場合、

$$x(t)=\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)}\cos\omega t \tag{2.22}$$



となる。この式を見ると、$\omega_0>\omega$ の時、物体の位置 x と外力 F が同符号になっている。それが図の左側で、この時、復元力と外力は逆を向く。

結果として「復元力を弱くした」のと同じことである。すると当然、実際に起こる振動の周期は外力がない時より長くなる。$\omega_0<\omega$ の時は、外力は復元力を強めるので、周期は短くなる。

以下で、最初の位置、初速度が両方とも 0 である場合について計算し、グラフを書いてみよう。初速度が 0 であることから、

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-C\omega_0\sin\alpha \tag{2.23}$$

となるので、$\alpha=n\pi$ となる。ここでは $\alpha=0$ を選ぼう[3]。これで最初の位置は

$$x(0)=C+\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)} \tag{2.24}$$

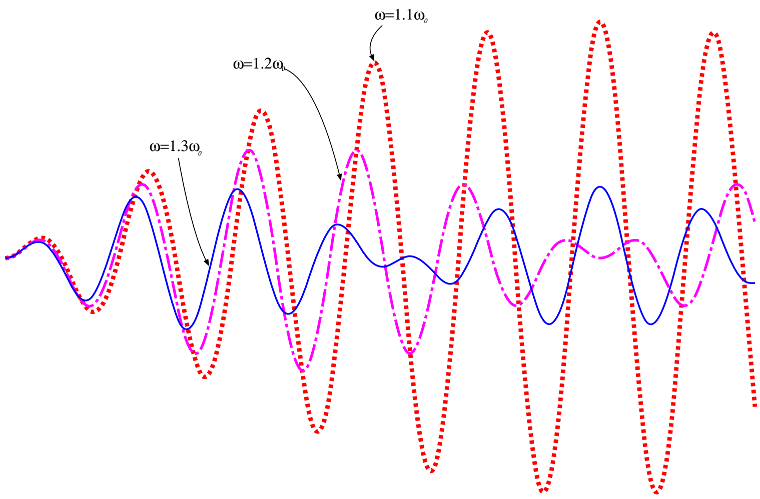
となる。

これも 0 にならねばならぬことから $C=-\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)}$ と決まる。これで

$$x(t)=\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right) \tag{2.25}$$

という解になるので、cos で表される二つの振動（各々の角振動数が ω,ω_0）の差ということになる。

右のグラフは $\omega=1.1\omega_0,\omega=1.2\omega_0,\omega=1.3\omega_0$ の３つの場合について (2.25) の形で表される強制振動の様子をグラフにしたものである。振動数の違う二つの振動の和 (差) なので、いわゆる「うなり」を生じて、振幅が時間的に変化している。振幅が増加している時、強制力はうまく物体にエネルギーを与えるように（つまり、物体の速度の方向と同じ方向に力が働き、仕事がプラスになるように）働いている。ところが、強制力の振動数と固有振動が少しずれているため、この状態はいつまでも続かず、やがて強制力がエネルギーを減ずるように（つまり、物体の速度と逆向きに力が働いて仕事がマイナスになるように）働きはじめ、振幅が小さくなるのである。



例によって複素化してこの振幅の増減の様子を計算する。$\omega=\Omega+\Delta\omega,\omega_0=\Omega-\Delta\omega$ というふうに、ω と ω_0 の平均を Ω、平均からのずれを $\Delta\omega$ として計算すると、

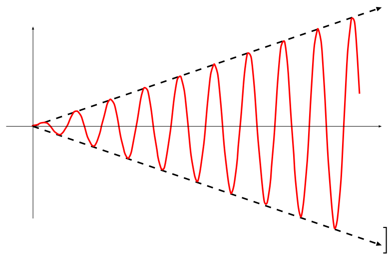
$$e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{\mathrm{i}\omega_0 t}=e^{\mathrm{i}\Omega t}\left(e^{\mathrm{i}\Delta\omega t}-e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t}\right)=2ie^{\mathrm{i}\Omega t}\sin\Delta\omega t \tag{2.26}$$

となるので、角振動数 Ω の振動が、振幅が $2\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)}\sin\Delta\omega t$ のように時間的に変動しつつ、振動していると考えてもよい。

最大振幅は $2\frac{F}{m\left((\omega_0)^2-\omega^2\right)}$ で与えられるので、ω が ω_0 に近いほど大きい。

[3]実はここで $\alpha=\pi$ と選んだとしても、最終結果は同じ。

ここで「$\omega = \omega_0$ になってしまったらどうなるのだろう？」と心配する人もいるかもしれないので、この式で $\Delta\omega \to 0$ の極限を取ってみよう。



$$(\omega_0)^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 2\Delta\omega \times 2\Omega = 4\Delta\omega\Omega \tag{2.27}$$

となるので、

$$2\frac{F}{m\left((\omega_0)^2 - \omega^2\right)} \sin\Delta\omega t = \frac{F}{2m\Delta\omega\Omega}\sin\Delta\omega t = \frac{Ft}{2m\Omega}\frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t} \tag{2.28}$$

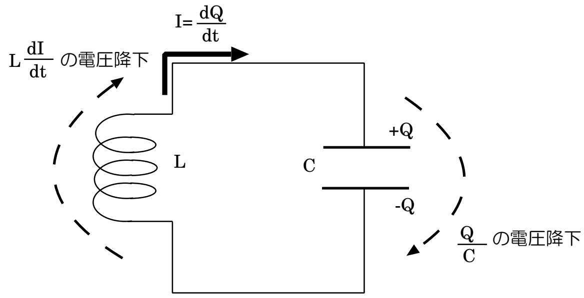
と書ける。

ここで、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を使えば、上の式の $\Delta\omega \to 0$ での極限は $\frac{Ft}{2m\Omega}$ とわかる。つまり、振幅は時間に比例して増えていく。このまま続くと $t \to \infty$ で振幅も ∞ となってしまうが、現実にはそうはいかない。振幅が ∞ になったら、ここまでの計算では無視していた抵抗力は無視できなくなる[4]し、そもそも $F = -kx$ で表される復元力がどんな範囲でも働くとは考えられない（ばねはのびすぎたら切れるし、振り子は振れすぎると $\sin\theta \simeq \theta$ の近似から外れる）。

共振・共鳴は、いろんなスケールの物理現象において見られる。子供がブランコをこぐことによって振れ幅を大きくしていくのも共振の一種であるし、原子レベルでも共振現象は現れる。たとえば物質に電磁波をあてると、特定の振動数をあてた時に限ってその電磁波のエネルギーが大きく吸収される、というようなことが起こる。これはその物質の固有振動数と電磁波の振動数が近いために共振が起こり、結果として電磁波のエネルギーが原子の振動に効率よく変化するからである。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

共振が電磁波に対して使われている例を紹介しよう。テレビ・ラジオなどのチューナーである。この場合振動しているのは図のような電気回路（LC 回路と呼ばれる）の中の電流である。



外部に電磁波などがない場合、図に書いたような電圧降下の式から、

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.29}$$

という式が成立する。いっぽう、コンデンサにたまっている電荷と流れている電流の間には

$$\frac{dQ}{dt} = I \tag{2.30}$$

が成立するので、$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$ という方程式が成立することがわかる。これは、単振動の方程式とよく似ている。

	単振動の場合	LC 回路の場合
変位	x	Q
変位の変化率	$\frac{dx}{dt}$	$I = \frac{dQ}{dt}$
その変化率	$\frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$
慣性を司るパラメータ	m	L
復元力を司るパラメータ	k	$\frac{1}{C}$
方程式	$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$	$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$
角振動数	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$

単振動と LC 回路の対応を見ると、左のような表ができる。単振動の変位 x にあたるのが電荷 Q であり、速度は電荷の移動である電流 I に、加速度は電流の時間微分 $\frac{dI}{dt}$ に対応する。

単振動の場合の質量 m に対応するのが自己インダクタンス L になっているが、これは電磁誘導の「変化を妨げる向きに誘導起電力が発生する」という性質から来ている。質量は「慣性」を表す。慣性とはまさに「変化を妨げる作用である」。一方、復元力を表すばね定数 k に対応するのはコンデンサの静電容量の逆数 $\frac{1}{C}$ である。コンデンサは放電して $Q = 0$ になろうとするから、復元力と同様、「平衡点に向かおうとする作用」を持つ。力 kx に対応するのが電圧 $\frac{Q}{C}$ なので、k と $\frac{1}{C}$ が対応するのである。したがって、この電気振動の角振動数は $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ となる。

外部から電磁波（電場と磁場の波）がやってくると、その振動する電場と磁場が電気回路の中に振動を起こそうとする。これが強制振動の $F\cos\omega t$ と同様の作用をもたらす。外部電場の角振動数 ω と電気回路自身の固有角振動数 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ が近いと、共振が起こり大

[4]抵抗力を無視しない場合の計算は後で述べる。

きな電流が回路に流れる、という仕組みである。テレビやラジオは、たくさんの放送局の電波の中から、望みの放送局の電波をこの共振作用によって取りだしている[5]。

【補足終わり】

共振によって起こった事故

1850 年、フランスで吊り橋の上を兵隊 500 人が行進した時、吊り橋の振動の固有振動と兵隊の行進の歩調がそろってしまったために吊り橋が大きく振動して橋が落ちた、という事故があった。以来、「吊り橋の上で足並みを揃えるな」という立て札が立てられたと言う。
建築においては共振現象は問題とされており、たとえば地震に強い建物を造るために、建物の固有振動数が地震の振動数と一致しないように工夫したりする。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

2.3 減衰がある場合の強制振動

2.1 節と 2.2 節の考え方を一つの系に適用してみよう。解くべき運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) - K\frac{d}{dt}x(t) + F\cos\omega t \tag{2.31}$$

であるが、ここでは

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) - K\frac{d}{dt}x(t) + Fe^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.32}$$

のように、いったん複素数化してから解こう。後で実際に解として採用するのは実数部分のみである。
この方程式をここまで行った手順と同様にして解いてみる。まず特解を探す。$x(t) = Ae^{\mathrm{i}\omega t}$ とおいて、

$$-\omega^2 mAe^{\mathrm{i}\omega t} = -kAe^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega KAe^{\mathrm{i}\omega t} + Fe^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.33}$$

という式をつくる。この式の両辺は $e^{\mathrm{i}\omega t}$ という共通因数を持つ[6]ので、それで割って、

$$-\omega^2 mA = -kA - \mathrm{i}\omega KA + F \tag{2.34}$$

となって、$A = \dfrac{F}{k + \mathrm{i}\omega K - m\omega^2}$ として、

$$X(t) = \frac{F}{k + \mathrm{i}\omega K - m\omega^2}e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.35}$$

が特解となる。$x(t) = y(t) + X(t)$ とおくと、$y(t)$ の満たすべき方程式は同次方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -ky(t) - K\frac{d}{dt}y(t) \tag{2.36}$$

であり、これは減衰振動（または過減衰、臨界減衰）の解を持つ。ここでは減衰振動が起こる条件だったとして、

$$y(t) = Ce^{-\frac{K}{2m}t}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right)} \tag{2.37}$$

を解としよう。結局非同次方程式の一般解は

$$x(t) = Ce^{-\frac{K}{2m}t}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right)} + \frac{F}{k + \mathrm{i}\omega K - m\omega^2}e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.38}$$

となる。第一項（同次方程式の解の項）は $t\to\infty$ で減衰して 0 となるので、時間が経つと非同次方程式の特解である、$\dfrac{F}{k + \mathrm{i}\omega K - m\omega^2}e^{\mathrm{i}\omega t}$ の部分のみが残る。

[5] 実際の回路には抵抗 R を入っているので、2.3 節での現象に近い。
[6] くどいようだが、こうやって共通因数 $e^{\mathrm{i}\omega t}$ で割れる形になったのは複素表示を使ったおかげ。

ここで、この式では $\omega=\omega_0$ であっても振幅が発散したりしないことに注意しよう。その場合は $k=m\omega^2$ であるので、解は

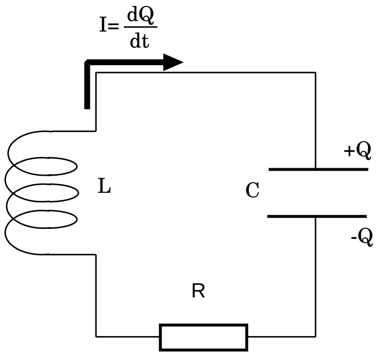
$$x(t)=Ce^{-\frac{K}{2m}t}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{4mk-K^2}}{2m}t+\alpha\right)}+\frac{F}{\mathrm{i}\omega K}e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.39}$$

となる。K があるおかげで発散は起きず、最大でも振幅は $\dfrac{F}{\omega K}$ にとどまる。

【補足終わり】

2.4　章末演習問題

[演習問題 2-1]



左の図で示される電気回路について、

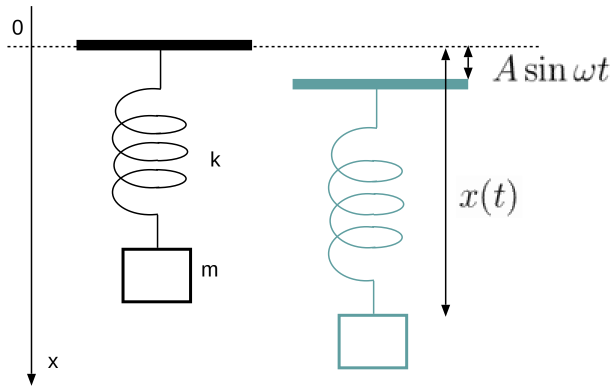
(1) 電位差に関する方程式を立て、それが抵抗力が存在する場合の強制振動と同じ方程式になることを確認せよ。

(2) 方程式を解け。また、減衰振動・臨界減衰・過減衰が起こる条件を求めよ。

(3) $t=0$ で $I=0, Q=Q_0$ という初期条件を与えた場合の解を求め、$t-Q$ のグラフの概形を書け。

[演習問題 2-2]

天井からばね（ばね定数 k、自然長 ℓ で質量は無視できる）をつるし、下端に質量 m のおもりをつりさげたところ、ある位置に静止していた。
時刻 $t=0$ に地震がきた。以後、天井が上下方向に単振動を始めた。天井の最初の位置からの変位は $A\sin\omega t$ である（下向き正）。この時、おもりはどのような運動をするか。地震がきてなかった時の天井の位置を $x=0$ として、下向きに x 軸を取って運動方程式を立てて、$x(t)$ がどんな関数になるのかを求めよ。



[演習問題 2-3] (2.35) は複素数で表現されている。実数部分を取り出せ。

[演習問題 2-4] (2.1) で表される減衰振動を考える。運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-K\frac{dx}{dt}$$

を使って、「運動エネルギー＋位置エネルギーの単位時間あたりの増加」（実際には減少するのでこの量は負になる）が「抵抗力の仕事率」に等しいことを示せ。

[演習問題 2-5] 前問と同様の考察を、2.3 節の問題について行え。特に「抵抗力の仕事率」の長時間平均と「外力の仕事率」の長時間平均が逆符号で同じ大きさであることを確認せよ。

第3章　連結した物体の振動

ここまでは１個の物体の振動を扱った。波動とは、振動が空間を伝わっていく現象である。そこでこの章では、まず２個、３個と数えられる程度の物体が連結されて振動する場合を考える。この数を増やしていくことで「波動」へとつなげていこう。

この章で学ぶ重要なことは「モード」の概念である。複雑な物体の振動を「モード」に分解することで、単振動の集まりとして考えることができるようになる。

この章で学ぶ大事なこと

- **連成振動の運動方程式の解き方**
- **「モード」の概念と、その使い方**

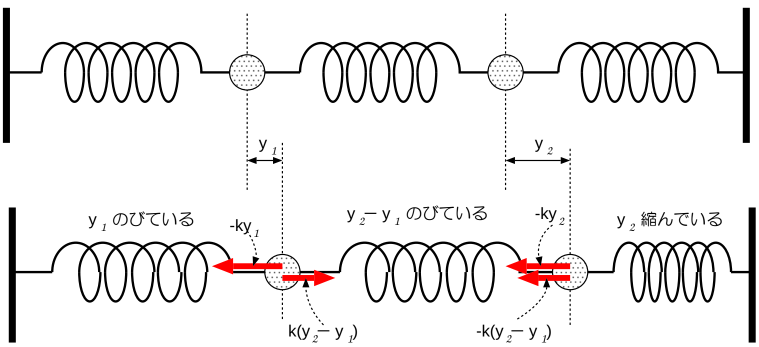
3.1　２物体の連成振動

図のように、３本のバネ（全て自然長 L でバネ定数 k）と２物体（どちらも質量 m）を水平に連結して、振動させるとする。左のおもりがつりあいの位置から y_1、右のおもりがつりあいの位置から y_2 ずれた位置にあるとする。この時、中央のバネは $y_1 - y_2$ だけ縮む（$y_2 - y_1$ だけ伸びる、と言っても同じ）。

運動方程式を書いてみると、

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -ky_1 + k(y_2 - y_1) \tag{3.1}$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -ky_2 - k(y_2 - y_1) \tag{3.2}$$



となる。少し整理すると、

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -2ky_1 + ky_2 \tag{3.3}$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = ky_1 - 2ky_2 \tag{3.4}$$

となる。

3.1.1　解の形を予想して解く

この方程式を解く方法はいろいろあるが、まずは解の形を予想する方向で考えてみよう。せっかく第１章で複素数を使って振動を考える方法を学んだので、$y_1 = A_1 e^{i\omega t}, y_2 = A_2 e^{i\omega t}$ とおいてみよう。

$$-m\omega^2 A_1 = -2kA_1 + kA_2 \tag{3.5}$$

$$-m\omega^2 A_2 = kA_1 - 2kA_2 \tag{3.6}$$

この方程式は A_1, A_2 に関して１次式なので、A_1, A_2 を両方求めることは絶対にできない。なぜなら、一つこの方程式の解となる A_1, A_2 を見つけたとすれば、$A_1 \to \alpha A_1, A_2 \to \alpha A_2$ のように双方を α 倍したとしてもこの方程式は成立するからである。よって A_1, A_2 各々は確定しないが、比 $\frac{A_2}{A_1}$ ならば求めることができる[1]。

[1]連立方程式２本なので、２つの値が決まる。A_1, A_2 の両方が求められない代わりに、ω の値が決まるのである。

これらから

$$\text{上の式より}\quad \frac{A_2}{A_1}=\frac{2k-m\omega^2}{k}\qquad \text{下の式より}\quad \frac{A_2}{A_1}=\frac{k}{2k-m\omega^2} \tag{3.7}$$

となる。この二つが両立することから、$\frac{A_2}{A_1}$ と、その逆数は等しいということになる。自分自身の逆数と等しい数は 1 か -1 しかない[2]ので、

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{2k-m\omega^2}{k}=\pm 1 \tag{3.8}$$

ということがわかる。これを解いて ω を求めると、

$$\begin{aligned} \pm k =& \quad 2k-m\omega^2 \\ m\omega^2 =& \quad 2k\mp k \\ \omega =& \quad \pm\sqrt{(2\mp 1)\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

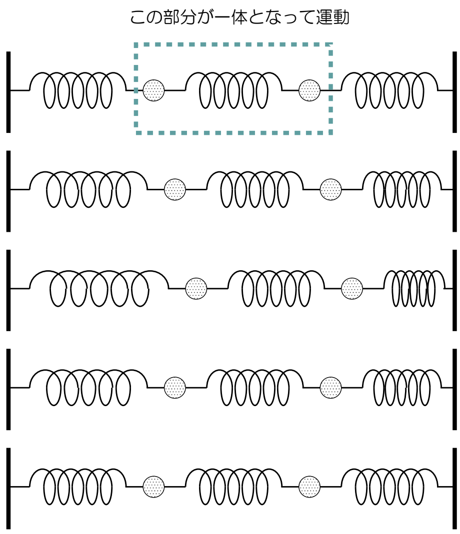
となる。(3.8) の複号に応じて二つの解が出てきたので、複号の上をとって $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$、下をとって $\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$ としよう。つまり、$\omega=\pm\omega_1,\pm\omega_2$ で都合 4 つの解を持つ（つまり、未定のパラメータ 4 つ。二つの変数 y_1,y_2 に対する二階微分方程式なので、これで勘定は合う）。

とりあえず、二つの解を明示しよう。複号の上をとる解では $A_1=A_2$ であるから、$y_1=y_2=C_1e^{\mathrm{i}\omega_1 t}$ となる。複号の下をとる解では、$A_1=-A_2$ であるから、$y_1=-y_2=C_2e^{\mathrm{i}\omega_2 t}$ となる。元々の方程式は線形なので、この二つを重ね合わせた

$$\begin{aligned} y_1 =& \quad C_1e^{\mathrm{i}\omega_1 t}+C_2e^{\mathrm{i}\omega_2 t} \\ y_2 =& \quad C_1e^{\mathrm{i}\omega_1 t}-C_2e^{\mathrm{i}\omega_2 t} \end{aligned} \tag{3.10}$$

が解となる。C_1,C_2 は一般に複素数である[3]。これで一般解が得られた（この書き方だとパラメータは複素数の C_1,C_2 二つで、実数で数えれば四つ）。

3.1.2 出てきた答を解釈しよう



まず、C_1 に比例する項の振動が起こっている時の様子を図示すると、右の図のようになる。この場合、$y_1=y_2$ なので、二つのおもりは同じ運動をする。図の破線で囲った部分は一体となって運動することとなる。

この場合の角振動数は $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ なのだが、そうなる理由は次のように理解できる。

まず、一体となっている部分は全体で一つの動きをするのだから、これを質量 $2m$ のでっかい物体だと考えることができる。そうすると、「質量 $2m$ の物体がばね定数 k のばね 2 本に挟まれている」という問題だと考え直すことができ、その場合の運動方程式は $2m\frac{d^2y}{dt^2}=-2ky$ であるから、$\omega=\sqrt{\frac{2k}{2m}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$。

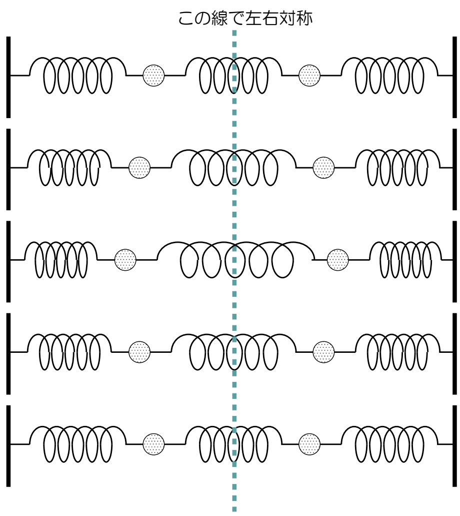
別の考え方としては、中央のばねは伸びても縮んでもいないのだから、ないのと同じと考えて撤去する。すると、「質量 m のおもりがばね定数 k のばねにつながれている」という状況が二つある（しかも、たまたまその二つの運動が同じタイミングで起こっている）ということになる。この場合は運動方程式は $m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$ が 2 本ということになる。

---

[2] $x=\frac{1}{x}$ の解は $x=\pm 1$。

[3] 複素数を使って表現しているが、実際の y_1,y_2 は実数なので、この式の実数部分を取ったものがほんとうの解であることは言うまでもない。と同時に、「どうせ後で実数部分だけを取るのだから」という意味で、$e^{-\mathrm{i}\omega t}$ の形の解は考える必要がない。

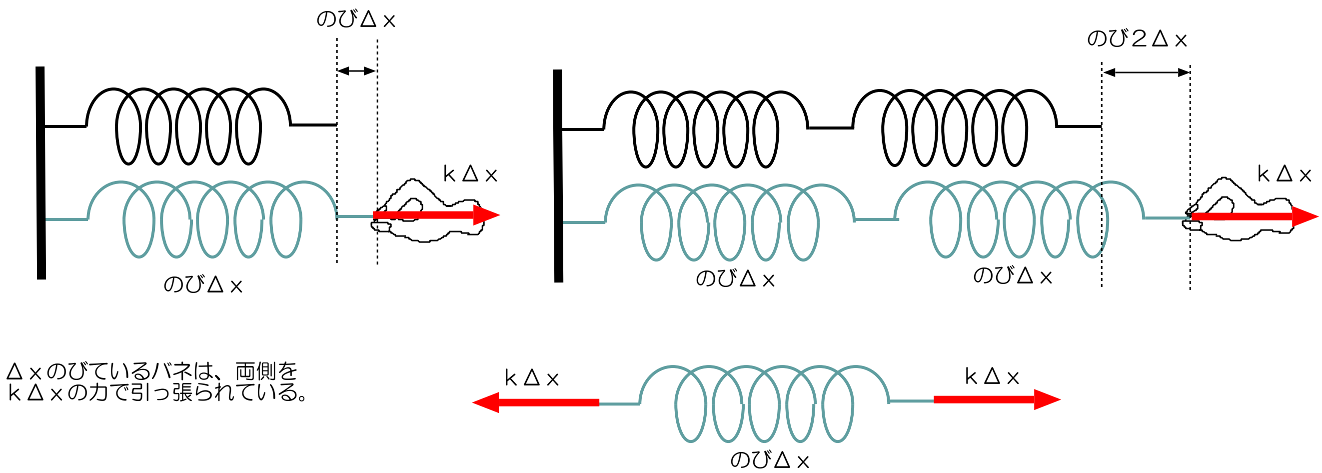
次に、C_2 に比例する振動の図を描くと、右のようになる。この場合は $y_1 = -y_2$ なので、左右対称な運動になる。図の破線は、対称軸を描いた。二つのおもりは、この線を対称に鏡に映したように反対の動きをする。角振動数は $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ である。



角振動数がこのようになる理由は、以下のように理解できる。

左右対称であるから、左半分だけを見て運動を考えよう。質量 m のおもりがあり、ばねが 2 本つながれている。左側はばね定数 k のばねである。右側はもともとばね定数 k のばねであったが、今左右対称だということで左半分だけを考えた時に、半分の長さに切ってしまったと考えることができる。中央（破線の通るところ）は動かない点になっていて、ここに釘が打たれているのと同じことであるから、実際このばねは長さ半分のばねだと思ってよい。

材質が同じで長さが半分になると、ばね定数は 2 倍になる。半分になると勘違いする人がたまにいるが、そうではない。ばね定数の定義は (のばすのに必要な力) ÷（のび）である。20 センチのばねを 1 センチ伸ばすのと、同じ材質で 10 センチのばねを 1 センチ伸ばすのなら、もともと 10 センチのばねを 1 センチ伸ばす方がたいへんである（2 倍の力がいる)。逆に考えると、20 センチのばねを 2 センチ伸ばすのと、10 センチのばねを 1 センチ伸ばすのは同じ力でいいのである。



そう考えると、おもりの右側（図の中央）のばねはばね定数 $2k$ のばねと同じ働きをする。よって運動方程式は $m\frac{d^2y}{dt^2} = -3ky$ となり、$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ ということになる。

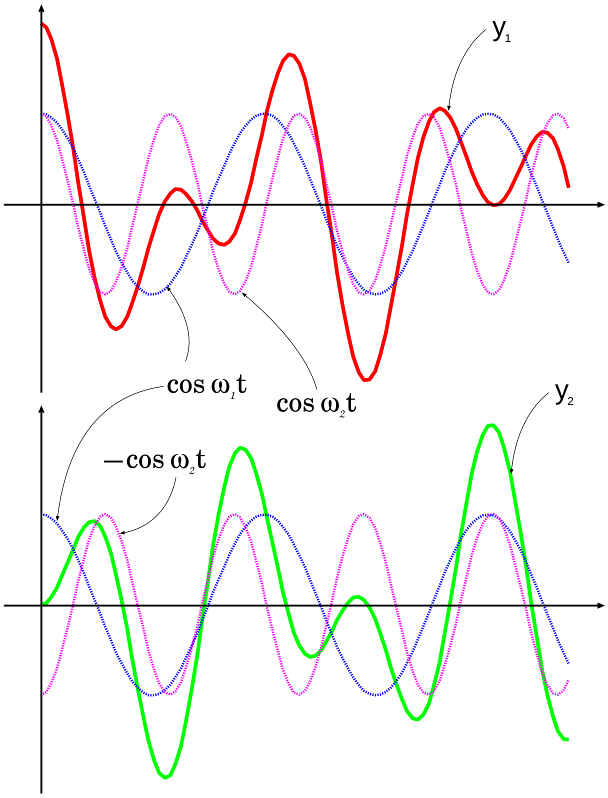
実際に起こる運動はもちろん、この二つの重ね合わせである。具体的にどのような運動が起こるのかを考えていこう。

一般解である (3.10) は、未定のパラメータ C_1, C_2 を持っていた。初期条件によって C_1, C_2 はいろんな値を取る。

$C_1 = C_2 = \dfrac{A}{2}$ とした場合の解（実数部を取った）

$$y_1 = \frac{A}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) \tag{3.11}$$
$$y_2 = \frac{A}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) \tag{3.12}$$

を右のグラフにしめした。この解は $t=0$ で $y_1 = A, y_2 = 0$ で、どちらも初速度 0 という場合に対応している。



複雑な振動になっているが、$\cos\omega_1 t, \cos\omega_2 t$ で表される二つの関数はそれぞれ単振動しているだけである。その二つの単振動の周期が違うために、合成された（実際に目に見える）運動である y_1, y_2 は複雑なグラフとなる。

このグラフでもう一つ気をつけておいて欲しいのは、y_1 の方が大きく振動している時、y_2 の方の振動は小さくなっているということである。これはエネルギー保存を考えると納得できる話である。当然、おもりの片方だけをみたらエネルギーは保存していない。両方のおもりの運動エネルギーと、3 本のばねの位置エネルギー全ての和は保存する。

3.2　振動の分解—モード

3.2.1　別の解き方—変数を取り直す

前節で考えた問題を、別の解き方で解けないか考えてみよう。今出した答を見てみると、解は二つで、一方（C_1 の項）は y_1 と y_2 が同時に振動する解、もう一方（C_2 の項）は逆に振動する解である。そこで「y_1+y_2 と y_1-y_2 を変数にすれば方程式が簡単になるのではないのか？」という発想が浮かぶ。

(3.3) + (3.4) という計算を行うと

$$m\frac{d^2(y_1+y_2)}{dt^2} = -ky_1 - ky_2 \tag{3.13}$$

という式を、(3.4) – (3.3) という計算を行うと

$$m\frac{d^2(y_2-y_1)}{dt^2} = -3ky_2 + 3ky_1 \tag{3.14}$$

という式を得る。$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1+y_2) = X, \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2-y_1) = Y$ と新しい変数をおけば、

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \tag{3.15}$$
$$m\frac{d^2Y}{dt^2} = -3kY \tag{3.16}$$

となり、解き直すまでもなく、X が角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動、Y が角振動数 $\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$ の単振動をするとわかる。

なお、ここで X, Y を定義する時に $\sqrt{2}$ で割ったのは、後々問題となる「規格化」のためである。実はこの段階では $\sqrt{2}$ で割る必要は特にない。とりあえずここでは「割っておくと後でうれしい事があるらしい」という程度で理解しておいてよい。

X, Y は物体の位置そのものを表しているのではない。その意味で座標ではないが、X, Y を変数とすると運動方程式が解きやすくなるので、まるで座標であるかのごとく取り扱うと便利である。このように座標であるかのように扱われ

る変数を「一般化座標」と呼ぶ（名前が示す通り、一般化座標は「座標」を含むが、「座標でない変数」である場合もある)。この手法は、解析力学を代表とする、いろんな物理の分野で有効に使われている[4]。

なお、この問題の場合、$y_G=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ という「重心座標」と、$y_R=y_2-y_1$ という「相対座標」の二つの座標で考えることもできる。X,Y と y_G,y_R の関係は $y_G=\frac{1}{\sqrt{2}}X, y_R=\sqrt{2}Y$ である。X,Y を定数倍しても運動方程式（X,Y に関して線型同次である）は変わらないので、上と同様に考えることができる。

3.2.2 「モード」という概念

実際に起こる運動は、この二つの振動の足し算になり、けっこう複雑怪奇な運動になる。しかし、これを X と Y という二つの変数の振動と考えることで、話は単純になった。複雑な振動を一個一個の単振動に分けることができる時、一個一個の単振動を「**モード**」または「**基準モード**」と言う（他にも基準振動、正規モードなどという呼び方もある)。複雑な運動はモードごとに分解して考えると理解しやすい。

なお、初期条件を工夫すれば、片方のモードだけが存在するような振動を作ることができる。たとえば初速度をどちらも 0 にして $y_1(0)=y_2(0)=A$ という初期条件で出発すれば、ω_1 の振動だけが起こる（$y_1(0)=A, y_2(0)=-A$ とすれば ω_2 の振動だけが起こる)。

ここでエネルギーを考えて、エネルギーもモードごとに分類できることを示そう。運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 \tag{3.17}$$

であるが、$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ を代入すると、

$$\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}\left(\frac{d(X+Y)}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}\left(\frac{d(X-Y)}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 \tag{3.18}$$

となり、これは質量 m の 2 個の物体があるのと同じ式である。なお、同じ計算を重心座標 y_G と相対座標 y_R でやると、

$$\frac{1}{2}\times 2m\left(\frac{dy_G}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{m}{2}\left(\frac{dy_R}{dt}\right)^2 \tag{3.19}$$

という形になる。この式の $\left(\frac{dy_G}{dt}\right)^2$ の前の係数の質量に対応する部分が $2m$ なのは y_G は「物体二つを一体として考えているので、質量 $2m$ の物体のようなものなのだ」と解釈できる。y_R の方は質量 $\frac{m}{2}$ ということになる。これは「換算質量」と呼ばれる概念[5]である。

また、位置エネルギーは

$$\frac{1}{2}k(y_1)^2+\frac{1}{2}k(y_2-y_1)^2+\frac{1}{2}k(y_2)^2 \tag{3.20}$$

であるが、これにも代入を行うことで、

$$\frac{1}{2}k\times\frac{1}{2}(X+Y)^2+\frac{1}{2}k\times 2Y^2+\frac{1}{2}k\times\frac{1}{2}(X-Y)^2=\frac{1}{2}kX^2+\frac{3}{2}kY^2 \tag{3.21}$$

となり、ばね定数 k のばね（のび X）とばね定数 $3k$ のばね（のび Y）がいるのと同じだけの位置エネルギーを持つことになる。

このようにエネルギーの面でも X,Y は完全に分離する[6]。y_1,y_2 で考えていたのでは二つの変数が影響しあって変化する、非常にわかりにくい運動なのだが、X,Y で考えれば単に二つの単振動が重なっているだけということになる。このようにして基準モードを考えることで複雑な運動を単純な（かつ、互いに無関係の）運動の組み合わせで考えることができる。特に波動を考える場合、考えている変数をどのようなモードにわけて考えるかということは重要になる。

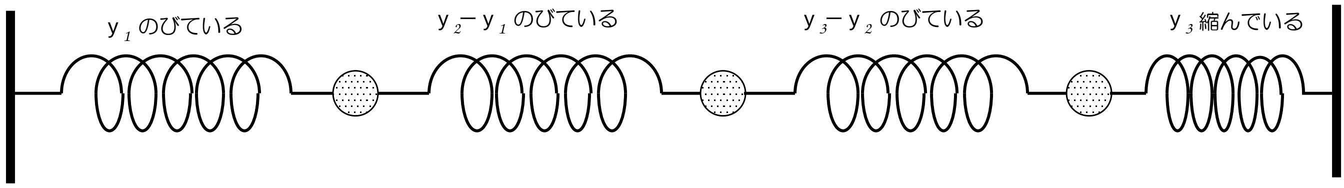
[4] ハミルトン形式の解析力学では一般化座標それぞれに対応して「一般化運動量」を定義して考えていく。

[5] 質量 M の物体と質量 m の物体が互いに力を及ぼし合いながら運動している時、一方を止めた座標系で考えると、もう一方の質量が $\mu=\frac{Mm}{M+m}$ になったのと同じ形の運動方程式ができる。これを換算質量と言う。

[6] 運動エネルギー、位置エネルギーが X の部分と Y の部分に分離するということは、解析力学で言うラグランジアン（あるいは作用）も X と Y で分離する、ということ。作用が分離すると問題は完全に独立になる。

3.3 　３個の連結物体の振動

では、具体的な例をもう一つ。今度は３個の物体（質量 m）を４本のばね（ばね定数は全て k）で図のようにつなごう。



3.3.1 　運動方程式の組み直し

３つの場合の運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}y_1 = \quad -ky_1 + k(y_2 - y_1) \quad = -2ky_1 + ky_2 \tag{3.22}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y_2 = \quad -k(y_2 - y_1) + k(y_3 - y_2) \quad = ky_1 - 2ky_2 + ky_3 \tag{3.23}$$

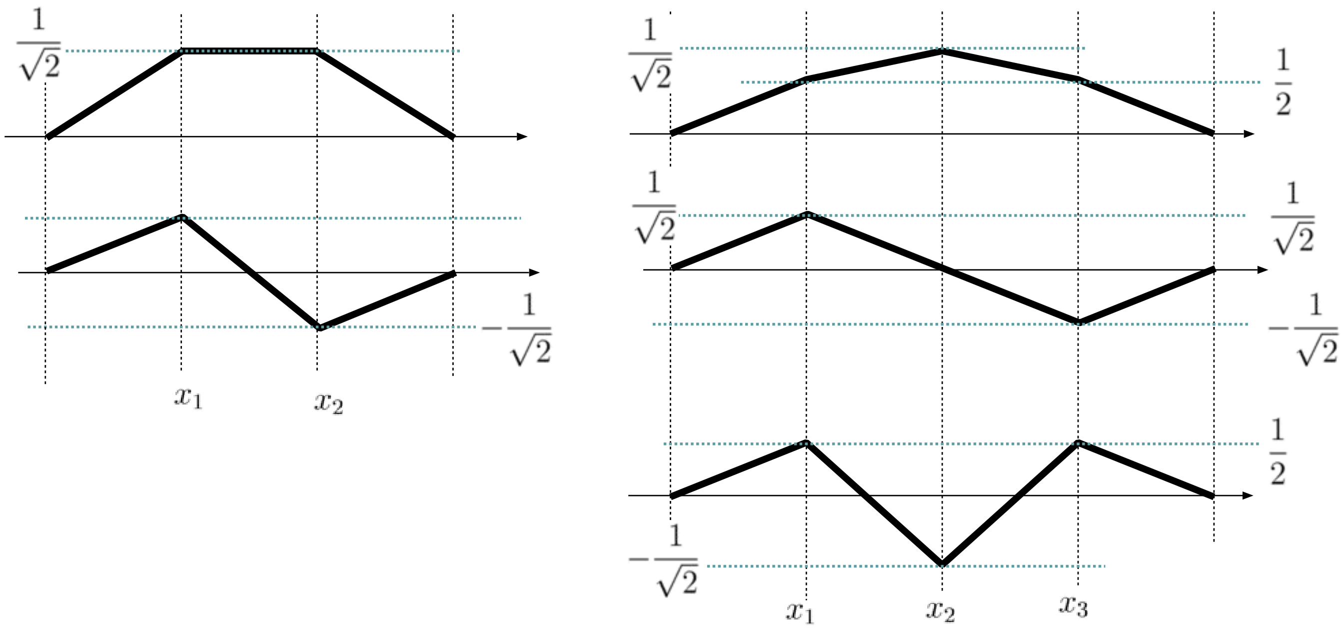
$$m\frac{d^2}{dt^2}y_3 = \quad -k(y_3 - y_2) - ky_3 \quad = ky_2 - 2ky_3 \tag{3.24}$$

である。これも方程式を適当に係数をかけて足して、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3\right) = -K\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3\right) \tag{3.25}$$

の形にして、$Y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$ と変数を取り直して $m\frac{d^2Y}{dt^2} = -KY$ と書き直すことで、単振動の方程式に変えることができる。

今度は元々の変数が y_1, y_2, y_3 と３つあるので、基準モードも Y_1, Y_2, Y_3 と３つある。３つがどのようなモードになるかを予想すると、下の図のようになる。



実際の y_i は左右方向の座標であるが、この図ではそれを上下方向に書き直している（「上」を「右」に、「下」を「左」に翻訳して見ること）。

２体の場合、二つのモードは「二つが同じ方向に動く」と「二つが反対に動く（左右対称に動く）」という特徴があった。これが３体になれば、「３つが同時に動く」と「左右対称に動く（ということは、真ん中が静止して左右の二つが反対に動く）」があるのだろう、と予想される(これが１番上と真ん中)。ということはもう一つは「３つが、それぞれの隣とは逆方向に動く」というものであろうと予想される（これが一番下)。

図には、どのような割合で足し算すると基準モードとなるかも示してあるが、これをどのようにして決めたのかは、以下で示そう。

真ん中のモードは、１と３が逆方向に振動して、２が振動していない場合である。よって、(3.22) から (3.24) を引いて、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y_1-y_3)=-2k(y_2-y_1) \tag{3.26}$$

となる。これから（規格化して）$Y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_2-y_1)$ と置くことで Y_2 が質量 m でばね定数 $2k$ のバネ振り子と同じ運動をすることがわかる。

１番目と３番目のモードは、y_1 と y_3 が同じ動きをすることは対称性からわかるので、$y_1+\alpha y_2+y_3$ という形のモードを探そう（α は後で決める)。運動方程式を $(3.22)+\alpha(3.23)+(3.24)$ のように足して、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}(y_1+\alpha y_2+y_3)=&\quad -2ky_1+ky_2+\alpha(ky_1-2ky_2+ky_3)+ky_2-2ky_3\\ =&\quad -(2-\alpha)ky_1+(2-2\alpha)ky_2-(2-\alpha)ky_3\\ =&\quad -(2-\alpha)k\left(y_1-\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}y_2+y_3\right)\end{aligned} \tag{3.27}$$

となる。単振動の式なので、右辺は $y_1+\alpha y_2+y_3$ の定数倍にならなくてはいけないが、この式を見ると $-(2-\alpha)k$ 倍になればよさそうである。そのためには y_2 の前の係数が一致しなくてはならない。このことから、

$$\begin{aligned} -\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}=&\quad \alpha\\ -2+2\alpha=&\quad 2\alpha-\alpha^2\\ 2=&\quad \alpha^2\end{aligned} \tag{3.28}$$

となって、$\alpha=\pm\sqrt{2}$ ということがわかった。$\pm$ のプラスは Y_1、マイナスは Y_3 を表す。

以上の計算をやった結果、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}\left(\quad y_1+\sqrt{2}y_2+y_3\quad\right)=&\quad -(2-\sqrt{2})k\left(\quad y_1+\sqrt{2}y_2+y_3\quad\right)\\ m\frac{d^2}{dt^2}\left(\quad y_1-y_3\quad\right)=&\quad -2k\left(\quad y_1-y_3\quad\right)\\ m\frac{d^2}{dt^2}\left(\quad y_1-\sqrt{2}y_2+y_3\quad\right)=&\quad -(2+\sqrt{2})k\left(\quad y_1-\sqrt{2}y_2+y_3\quad\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

という３つの方程式に書き直すことができた。

$$Y_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{2}y_3,\quad Y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\quad Y_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{2}y_3 \tag{3.30}$$

のように基準モードを定義すれば、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}Y_1=&\quad -(2-\sqrt{2})k\quad Y_1\\ m\frac{d^2}{dt^2}Y_2=&\quad -2k\quad Y_2\\ m\frac{d^2}{dt^2}Y_3=&\quad -(2+\sqrt{2})k\quad Y_3\end{aligned} \tag{3.31}$$

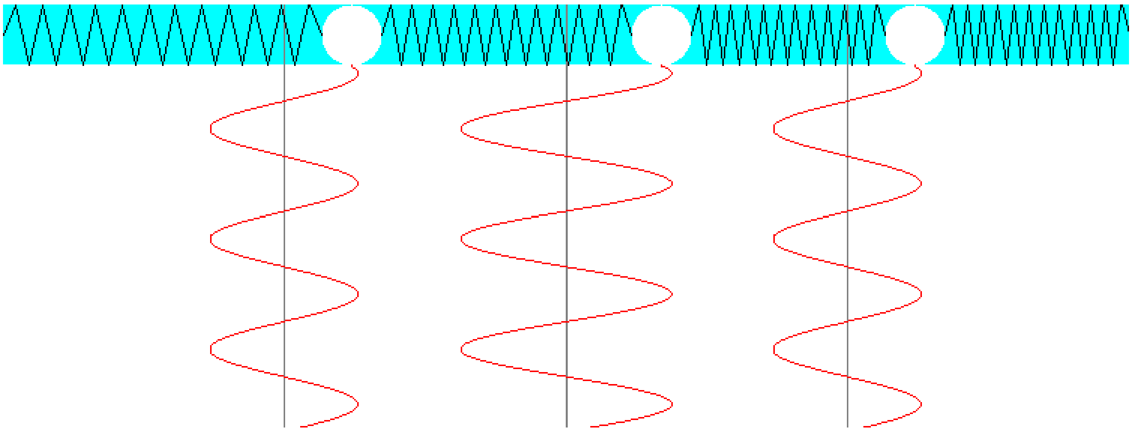
と、３つの単振動の方程式になった。

実はこの計算は線型代数の知識を使って行列を利用すれば簡単に、かつ機械的に行うことができるのだが、説明が長くなるのでその方法は次の節にまとめることにする。

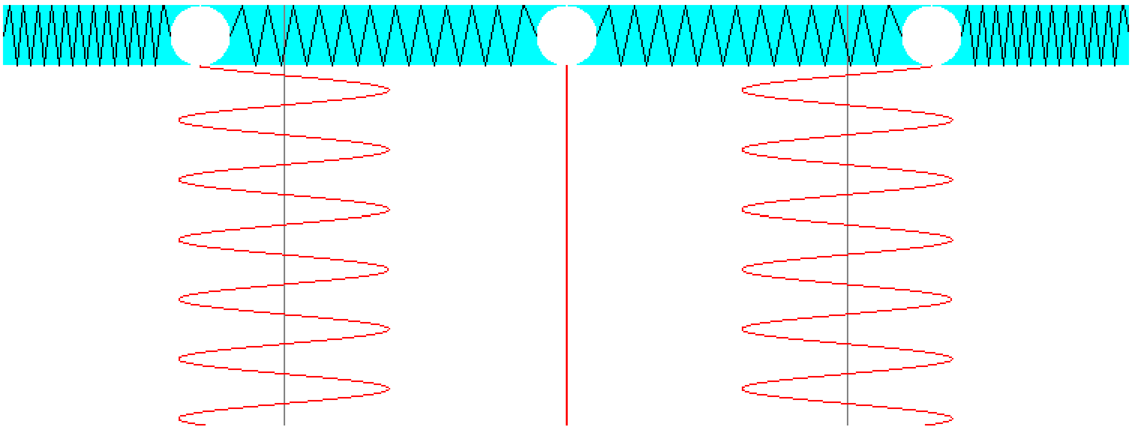
3.3.2　3つのモードを図解する

計算で求めた3つのモードがどんな運動なのかを考えてみよう。

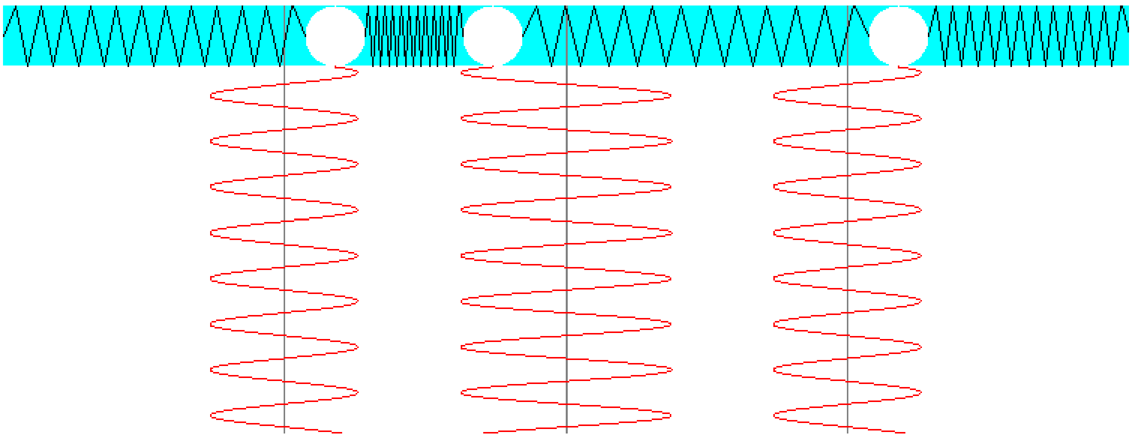
もっとも振動数の低いモードである Y_1 は3つのおもりが全て同じ方向に振動する振動であり、角振動数は $\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})k}{m}}$ である。



第 2 のモード Y_2 の角振動数は $\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ である。これは左右対称な振動モードで、中央のおもりは動かない。



最後の、もっとも振動数の高いモードである Y_3 は角振動数 $\sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$ の振動であり、真ん中のおもりは両側とは逆向きに動く。



３つのおもりの運動 y_1, y_2, y_3 は

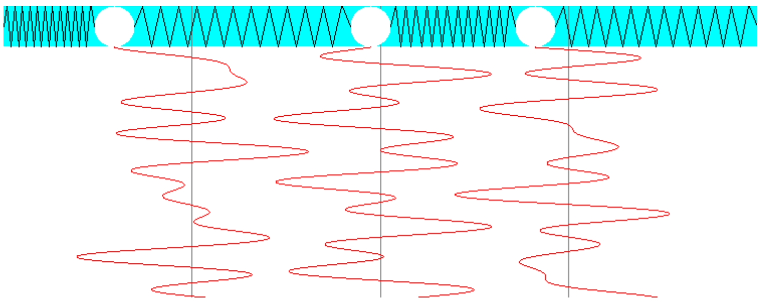
$$y_1 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_2 - \frac{1}{2}Y_3 \tag{3.32}$$
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_3 \tag{3.33}$$
$$y_3 = \frac{1}{2}Y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_2 - \frac{1}{2}Y_3 \tag{3.34}$$

のように３つのモードで表されている。各々のモードは

$$Y_1 = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}t + \alpha_1\right) \tag{3.35}$$
$$Y_2 = A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \alpha_2\right) \tag{3.36}$$
$$Y_3 = A_3 \sin\left(\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}t + \alpha_3\right) \tag{3.37}$$

と単振動するので、これを代入することで y_1, y_2, y_3 が計算できることになる。$A_1, A_2, A_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は運動方程式だけでは決まらないパラメータであり、初期状態から決定していくことになる。

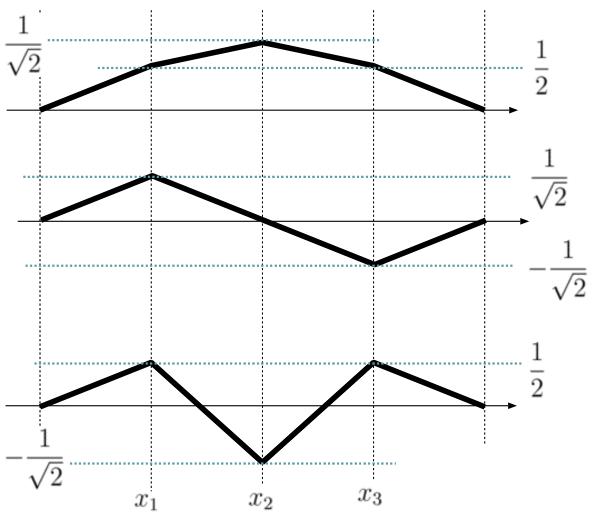
なお、実際に起こる振動は３つのモードが重なったものであり、たとえば図のような複雑なものになる。

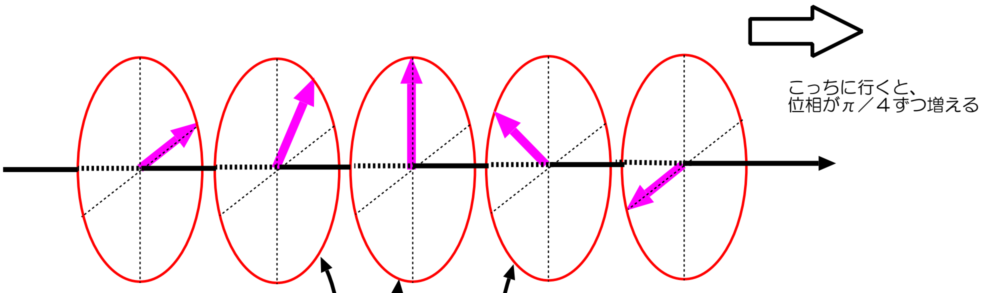


3.3.3　３つのモードの表現

３つのモードはそれぞれ違う組み合わせで y_1, y_2, y_3 が変化する。その様子を図で示したものが右の図である。これをみると、このグラフ自体が一種の波のように見える。すなわち、横軸が y で縦軸が振動の変位と見た時、あたかも sin で表された関数のように見える。実は「見える」だけではなく、まさにそう考えることで各々のモードを正しく表現できていることが、以下でわかる。

もっとも振動数の低いモードのベクトル $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ をよく見てみよう。この数列は実は、以下のように表現できる。

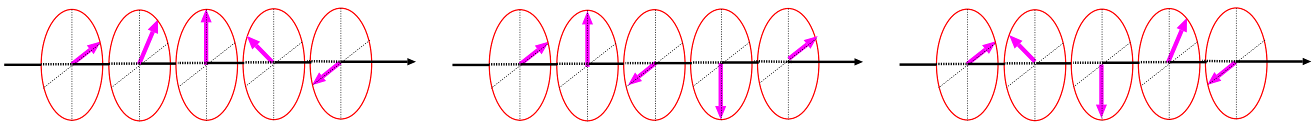




$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{2\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

つまり、y_1, y_2, y_3 といくに従って位相が $\frac{\pi}{4}$ ずつ回っていくような sin で表される数列である（最初につく $\frac{1}{\sqrt{2}}$ は規格化による)。

図に示したように、これは位相が $\frac{\pi}{4}$ ずつ増えていく正弦関数で表すことができる。同様に他のモードも考えると、



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\tfrac{\pi}{4},\quad \sin\tfrac{2\pi}{4},\quad \sin\tfrac{3\pi}{4}\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\tfrac{2\pi}{4},\quad \sin\tfrac{4\pi}{4},\quad \sin\tfrac{6\pi}{4}\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\tfrac{3\pi}{4},\quad \sin\tfrac{6\pi}{4},\quad \sin\tfrac{9\pi}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \left(\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{2}\right)$$

のように、位相が少しずつ増えていく形で表現できる。

まとめると、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{p\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{2p\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{3p\pi}{4}\right) \quad \text{ただし、} p = 1, 2, 3 \tag{3.38}$$

のように各モードを表すベクトルが表現できることになる。これは、

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{np\pi}{4} \tag{3.39}$$

と書いてもよい。

「$p \geq 4$ の場合はないの？」という素朴な疑問が湧くかもしれないが、実際に代入するとすぐわかるように、$p = 4$ だと $(0, 0, 0)$ になってしまう（$p = 4$ は π ずつ位相をずらしてしまうから当然だ）し、$p = 5$ を計算してみると $p = 3$ と逆符号なだけで同じものになる（$\frac{5\pi}{4}$ ずつ位相が回るということは $-\frac{3\pi}{4}$ ずつ回ることと同じだから)。以下同様に、これまで考えたものと比例したベクトルしか出てこない。つまり、これ以上モードはない。

もともと、３つの物体の運動を書き直しているだけなのだから、式が簡単になることはあっても変数の数（自由度）が減ることも増えることもない。よって自由度３になるのは当然である。

なお、２個の物体の場合の固有振動を表すベクトルは

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{\pi}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{2\pi}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

または、

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{np\pi}{3} \tag{3.41}$$

と書けた。

モード分解は実は、三角関数による分解であった、とも言える。この後で連結する物体の数をどんどん増やしていくが、やはり同様のことができる。さらには少し先走って述べておくと、数が無限個になった場合（つまり、「何個」と数えることができないほどに小さい物体で作られた連続体の場合）も、三角関数で任意の振動が分解できることになる。それがフーリエ級数（あるいはフーリエ変換）の考え方である。この考え方を理解しておくと、連成振動のおもりの数がどんどん増えていっても、同様に考えるだけで固有振動を見つけることができる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

3.4　より一般的な、変数の取り直し—行列の利用

3.1 節で考えた問題は比較的運動方程式が単純で、すぐに「どのように変数（モード）を取り直せば問題が解きやすいか」を見つけることができた。しかし一般の問題ではそれを見つけるのは簡単とは限らない。3.3 節で物体を 3 個に増やしただけで計算はかなり面倒になった。しかし、行列を使って運動方程式を表現しておくと、モードを求める計算を比較的容易に（というよりは、パターン化された手続きとして）行うことができる。

「行列」と聞くと「あ、僕それ苦手ですから」とか「これまで行列は避けて通ってきたんで…」と尻込みしてしまう人が多いのだが、そんなこと言っていては物理はできない[7]。これからも何度も使うことになる（そもそも、高校数学や線型代数で行列を習ったのは、こういうところで使うためだ）のだから、行列の使い方にも習熟しておかなくてはいけない。

3.4.1　２体の連成振動の方程式を行列を使って解く

行列の考え方に慣れるために、もう一度２体の場合の方程式

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -2ky_1+ky_2 \tag{3.42}$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = ky_1-2ky_2 \tag{3.43}$$

を解いてみよう。まずこれを行列で表すと、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

となる[8]。左辺は $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に m と微分演算子 $\frac{d^2}{dt^2}$ がかかった形に、右辺は $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}$ がかかった形にまとまった。つまり、どちらも、(なにか) $\times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の形になった。

このように「**変数の部分**」とそれにかかる「**演算の部分**」（左辺では微分、右辺では係数のかけ算）が分離して、「演算の部分」が一カ所にまとまった形で書けるのが行列の利点である。これによって、演算の部分が簡単になるように変形していくことができる。

さて、我々はすでに、$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1+y_2)$ および $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_2-y_1)$ という変数を使うと問題が簡単になることを知っている。X に関する方程式を作った時は、二つの式を足して $\sqrt{2}$ で割った。これは実は、上に書いた行列の式に、前から行ベクトル $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ をかけたのと同じ計算である。すなわち、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

である。ややこしげに見えるかもしれないが、「$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ から $\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$ を作る」という計算を $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と書いたに過ぎない。

ここで気がついて欲しいことは、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} = \left(-2\frac{1}{\sqrt{2}}k+\frac{1}{\sqrt{2}}k\ \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}k-2\frac{1}{\sqrt{2}}k\right) = -k\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.46}$$

---

[7] こんなことを言う物理の学生なんて、「注射が苦手でできない看護師さん」あるいは「カンナをかけることを避けて通ってきた大工さん」と同じぐらい、恥ずかしい。プロの道具を使えるようにならなくては、プロになれない。

[8] なお、物体の質量が違う場合は、運動方程式を質量で割った後で行列に書き直すべきである。

という関係である。つまり、この $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ という行ベクトル[9]に後ろから行列 $\begin{pmatrix}-2k & k \\ k & -2k\end{pmatrix}$ をかけると、元のベクトルの $-k$ 倍になるのである。

固有ベクトルと固有値

ベクトルにある行列 $\mathbf{M}$ をかけた時、結果が元のベクトルに比例するベクトルになる時、そのベクトルを $\mathbf{M}$ の「**固有ベクトル** (eigenvector)」と呼び、この時出てくる値 λ を「**固有値** (eigenvalue)」と呼ぶ。$N\times N$ 行列の場合、固有値は最大 N 個ある。対称でない行列の時は行列をどっちから掛けるによって、

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\end{pmatrix}\text{の時「右固有ベクトル」、}\\ &\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots\end{pmatrix}\text{の時「左固有ベクトル」}\end{aligned}\tag{3.47}$$

と区別するが、いま $\mathbf{M}$ は対称行列なのでこの区別はない。

このことを使うと、運動方程式の変形は以下のように行列で表現できる。

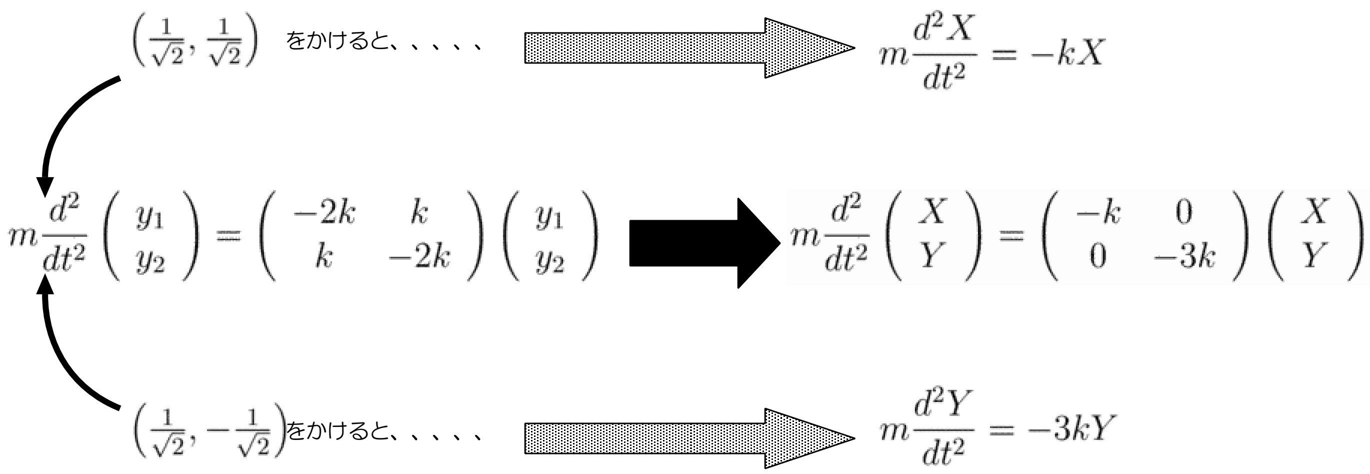
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\times m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2k & k\\k & -2k\end{pmatrix}}_{-k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\\ m\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]}_{X} &= -k\underbrace{\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]}_{X}\\ m\frac{d^2X}{dt^2} &= -kX\end{aligned}\tag{3.48}$$

ここで、行ベクトル $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ が行列 $\begin{pmatrix}-2k & k\\k & -2k\end{pmatrix}$ の（左）固有ベクトルであったおかげで両辺が同じ形でまとめることができ、X という変数で表現されるモードを見つけることができた。つまり、「**基準モードを見つけること** $\leftrightarrow$ **固有ベクトルを見つけること**」なのである。

同様に、Y に関する方程式を作る行列計算は、

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2k & k\\k & -2k\end{pmatrix}=-3k\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\tag{3.49}$$

を使えば全く同様に、$m\frac{d^2}{dt^2}Y=-3kY$ を得る。以上の結果をまとめると、



[9]ちなみに「縦が行ベクトルだったか、横が行ベクトルだったかすぐ忘れる」という人は、「行」という字には水平線が２本入っていることを見て思い出そう。同様に「列」という字には鉛直線が２本入っている。つまり「行が横」、「列が縦」である。

であり、これを一個の行列の式

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\times m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\\ m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.50}$$

とまとめて書くことができる。つまり、使う変数を $(y_1, y_2)\to(X,Y)$ と変更することで、運動方程式を簡単に書き直すことができた。特に、右辺の行列が、$\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix}$ へと変換され、簡単になったところに注目しよう（これによって運動をモードごとに分解することができた）。

ここで行われた変数変換は、

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} \tag{3.51}$$

のように行列で表現できる。右辺から逆算すると左辺になることはすぐ確認できるだろう。これの逆変換は

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} \tag{3.52}$$

である。$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ は互いの逆行列だからである（このように「逆演算」を「逆行列」で計算できるのも行列の強み）。

以上で行った計算をもう一度見直そう。元々の運動方程式 (3.44) に行列 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ をかけると、左辺は (X,Y) の式になる。右辺にも (3.52) を代入して、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} \tag{3.53}$$

となる。右辺の３つの行列の積は、

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix} \tag{3.54}$$

となる。

結局のところ、ここでやった計算は、$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-2k & k\\ k & -2k\end{pmatrix}$ という行列を、$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ という行列と、その逆行列である $\mathbf{T}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ではさんで、$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{MT}$ という行列を計算し、$\begin{pmatrix}-k & 0\\ 0 & -3k\end{pmatrix}$ という結果を得た、ということになる。この結果 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{MT}$ が対角行列（対角線の部分以外は 0 になっているような行列）になったので、結果は単振動の重ね合わせとなったわけである。このように行列 $\mathbf{M}$ に対し適切な行列 $\mathbf{T}$ を探してきて $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{MT}$ が対角行列になるようにすることを「$\mathbf{M}$ を**対角化** (diagonalize) する」と言う。

行列を使うと、計算が楽になる。何が楽になるかというと、行列の対角化という作業さえすれば、複雑な連成振動の方程式が、単振動の方程式の集まりになってしまうのである。単振動の方程式になってしまえば後は簡単であろう。

3.4.2 固有ベクトルと対角化

一般的にすべての行列が対角化できるわけではない。実対称行列[10]で縮退（意味は後述）がない場合は以下の方法で必ず対角化できる。実対称でない場合についてはこの講義では扱わないことにする（知りたい人は線型代数の本を読むこと）。

対角化の第一ステップは行列を $\mathbf{M}$ として、

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\end{pmatrix}\to（略記して）\mathbf{M}\vec{v}=\lambda\vec{v} \tag{3.55}$$

[10] m 行 n 列の成分と n 行 m 列の成分が等しい行列を対称行列と言う。特に実数成分の場合「実対称行列」と呼ぶ。

となるような列ベクトル $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$(固有ベクトル) とある値 λ(固有値) を求めることである。今やろうとしている計算は、

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \text{（略記して）}\frac{d^2}{dt^2}\vec{y} = \mathbf{M}\vec{y} \tag{3.56}$$

という方程式を解くことであったが、(3.55) を満たす列ベクトル $\vec{v}$ を $\vec{y}$ に代入すれば、

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{v} = \mathbf{M}\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{3.57}$$

となって、方程式は $\dfrac{d^2X}{dt^2} = \lambda X$ と本質的に同じであり、単振動の方程式として解ける。

　よって、今考えている $\vec{y}$ がちょうど $\vec{v}$ と一致していれば、これで問題が解けたことになる。一般の問題では考えている運動の $\vec{y}$ がうまく $\vec{v}$ と同じになるとは限らない。だが、線型微分方程式の解は重ね合わせができた。よって、任意の $\vec{y}$ をいろんな固有値を持つ $\vec{\lambda}$ の重ね合わせで表現できれば、問題は解けてしまう。

　例えば 2 個の連成振動の場合、$\vec{v}$ にあたる固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$（固有値 $-k$）と $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$（固有値 $-3k$）であった。この二つのベクトルは独立だから、任意の 2 次元ベクトルはこの二つの和で表現することができる。ゆえに、固有ベクトルで表された振動モードを二つがあれば、どんな運動も表現できるのである。

3.4.3　固有値の求め方

　$N \times N$ 行列の場合、固有値は最大で N 個である。ここではその最大の場合のみを考える。その N 個の λ を求める方法を述べよう。

$$\mathbf{M}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \rightarrow \text{右辺を移項して、}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = 0 \tag{3.58}$$

という式を作る（ただし、$\mathbf{I}$ は単位行列）。ここでもし $\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ に逆行列があれば、それをかけることで、

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = 0 \tag{3.59}$$

となって $\vec{v} = 0$ になってしまう。ゆえに、$\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ は逆行列を持ってはいけない。ということは

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{3.60}$$

となる。$N \times N$ 行列の場合、この式は λ に関する N 次方程式となり、最大で N 個の λ が求められるのである。この方程式に重解が出たりすると N 個より少なくなってしまうが、ここではそういうことはないとしよう[11]。

　$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}$ の場合でこのやり方を実践してみよう。

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -2k-\lambda & k \\ k & -2k-\lambda \end{pmatrix} = (-2k-\lambda)^2 - k^2 = 0 \tag{3.61}$$

という方程式が出る。この方程式は $(-2k-\lambda)^2 = k^2$ と考えればすぐに、$-2k - \lambda = \pm k$ となって $\lambda = -2k \mp k$（すでにもとめた $-k, -3k$ の二つ）が出る。

　この固有値が出れば、方程式が $m\dfrac{d^2X}{dt^2} = -kX$ と $m\dfrac{d^2Y}{dt^2} = -3kY$ になることはわかってしまう。あと求めるべきは固有ベクトルであるが、それも簡単で、λ の値を代入すると、

$$\lambda = -k \text{ の時、}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k \end{pmatrix} \qquad \lambda = -3k \text{ の時、}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

なので、この行列をかけて 0 になるということは、

$$\lambda = -k \text{ の時、固有ベクトル}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -3k \text{ の時、固有ベクトル}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

[11] 重解が出る場合は、同じ固有値を持つ固有ベクトルが複数本あるということになる。こういう場合「縮退 (degenation) がある」という言い方をする。以下で扱うのは縮退がない場合のみ。

とわかる。ここでベクトルの「**規格化** (normalization)」を行う。規格化とは「長さを 1 にすること」である。今のままだと $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ というベクトルは長さが $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ となる。そこでこれを $\sqrt{2}$ で割って長さを 1 にする。$\lambda=-3k$ に対しても同様に規格化して、

$$\lambda=-k\text{ の時、固有ベクトル}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \lambda=-3k\text{ の時、固有ベクトル}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

とする。$\mathbf{T}$ は、今作った二つの列ベクトルを横に並べて

$$\mathbf{T}=\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

のようにして作る。

なぜ規格化するかというと、一つの理由は規格化することによって $\mathbf{T}$ に対する $\mathbf{T}^{-1}$ の計算が(「計算」とは呼べないほどに)簡単になるのである。今、$N\times N$ 行列に対して固有ベクトル N 本 ($\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_N$) を見つけたとしよう。このベクトルを並べて

$$\mathbf{T}=\left(\begin{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \vec{v}_2 \\ \\ \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} \\ \vec{v}_N \\ \\ \end{pmatrix}\right) \tag{3.66}$$

を作る。さらにこの行列の行と列を入れ替える。つまり、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のような操作を行うと、

$$\mathbf{T}^t=\begin{pmatrix} (\quad \vec{v}_1^t \quad) \\ (\quad \vec{v}_2^t \quad) \\ \vdots \\ (\quad \vec{v}_N^t \quad) \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

となる。ただしここで、記号 ^{t} は「**転置** (**t**ranspose)」(行と列を入れ替える操作)を表す。$(\quad \vec{v}_i^t \quad)$ は列ベクトル $\begin{pmatrix} \\ \vec{v}_i \\ \\ \end{pmatrix}$ を横に並べ直したもの(これも転置)である。

ここで、固有ベクトルに関するある定理を証明する。

固有値の異なる固有ベクトルは直交する

行列 $\mathbf{M}$ に対する固有値 λ_1 の固有ベクトル $\vec{v}_1$ と固有値 λ_2 の固有ベクトル $\vec{v}_2$ を考えると、$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$ となる。なぜなら、$\vec{v}_1^t\mathbf{M}\vec{v}_2$ という量を考えると、

$$\lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\leftarrow\underbrace{\vec{v}_1^t\mathbf{M}}_{=\lambda_1\vec{v}_1^t}\vec{v}_2\leftarrow\vec{v}_1^t\mathbf{M}\vec{v}_2\rightarrow\vec{v}_1^t\underbrace{\mathbf{M}\vec{v}_2}_{=\lambda_2\vec{v}_2}\rightarrow\lambda_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \tag{3.68}$$

という計算により、$\lambda_1(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)=\lambda_2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)$ となってしまうが、$\lambda_1\neq\lambda_2$ なのだから、$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$ でなくてはならない。

よって固有ベクトルと固有ベクトルの内積を取ると、

$$\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=\begin{cases} 0 & i\neq j\text{ の時} \\ 1 & i=j\text{ の時} \end{cases} \tag{3.69}$$

となる(すでに $\vec{v}_i$ は規格化されていたとしている)。この式の意味するところは、$\mathbf{T}^t\mathbf{T}=\mathbf{I}$ である。つまり、$\mathbf{T}^{-1}$ は $\mathbf{T}^t$ に等しい[12]。

ここで、N 成分のベクトルに対して、互いに直交する N 個の固有ベクトルを求めることができた。この N 個のベクトルの適当な線形結合

$$\vec{V}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3+\cdot+a_N\vec{v}_N \tag{3.70}$$

を取れば、任意の N 成分ベクトルを作ることができるだろう。逆に、どんな初期条件を与えられても、その系の運動の状態を固有ベクトル(つまり振動のモード)の和で表すことができる(これを「モード分解」と呼ぶ)。

以上のようにして、固有値と固有ベクトルを作れば、$\mathbf{T}$ と $\mathbf{T}^{-1}$ も自動的にできあがり、問題は解けることになる。

[12]転置行列と逆行列が等しい行列を「**直交行列** (orthogonal matrix)」と呼ぶ。なぜ「直交」かということは、上の $\mathbf{T}$ の作り方を見れば納得できる。「互いに直交する列ベクトルを並べて作った」からである。

3.4.4　３体の連成振動の方程式行列を使って解く

では、練習問題として、3.3 節の問題を行列を使って解こう。
まず固有値を求めるために

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -2k-\lambda & k & 0 \\ k & -2k-\lambda & k \\ 0 & k & -2k-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(-2k-\lambda)^3 - 2k^2(-2k-\lambda) &= 0 \\
(-2k-\lambda)\left((-2k-\lambda)^2 - 2k^2\right) &= 0 \\
(-2k-\lambda)\left((-(2+\sqrt{2})k-\lambda)(-(2-\sqrt{2})k-\lambda)\right) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

という方程式を解けば、$\lambda=-2k, -(2+\sqrt{2})k, -(2-\sqrt{2})k$ という 3 つの固有値が出る。
$\lambda=-2k$ となる場合、固有ベクトルは、

$$
\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} bk=0 & \text{2 行目から} \\ ak+ck=0 & \text{1 行目と 3 行目から} \end{cases}
\tag{3.72}
$$

を満たす。こうなるためには $b=0, c=-a$ であればよいから、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に比例する。長さが 1 になるようにすると、$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。次に $\lambda=-(2\pm\sqrt{2})k$ の時は、

$$
\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2}k & k & 0 \\ k & \mp\sqrt{2}k & k \\ 0 & k & \mp\sqrt{2}k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0
\tag{3.73}
$$

を満たすベクトルを探せばよい。1 行目から $b=\mp\sqrt{2}a$ であることがわかり、3 行目から $b=\mp\sqrt{2}c$ であることがわかる。よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ に比例する。規格化すると $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。これで 3 つの固有値、3 つの固有ベクトルが求まった。行列で書くと、

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{2})k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -(2+\sqrt{2})k \end{pmatrix}
\tag{3.74}
$$

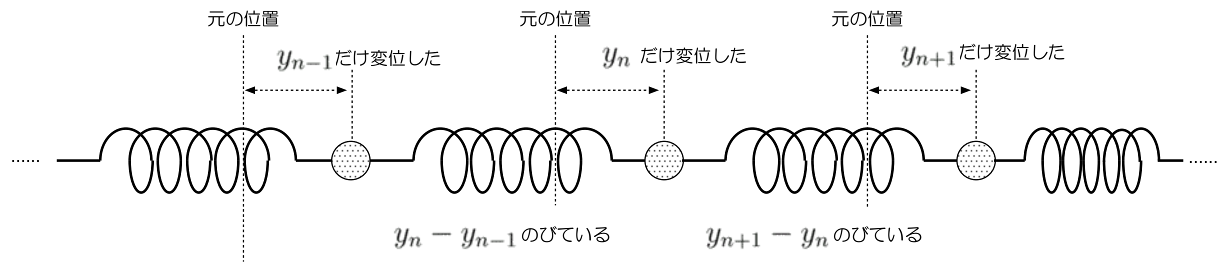
という計算を行ったことになる。
以上のようにして変数変換を行った結果、運動方程式は

$$
m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{2})kY_1 \\ -2kY_2 \\ -(2+\sqrt{2})kY_3 \end{pmatrix}
\tag{3.75}
$$

であり、3 つのモード (Y_1, Y_2, Y_3) は、おのおの $\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}, \sqrt{\frac{2k}{m}}, \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$ の角振動数で振動する。

【補足終わり】

3.5　N 個の物体が連結されている場合の振動



ここまでは２個、３個の物体を考えたが、ここでは数を一般的に N として問題を解いてみよう。まず運動方程式である。N 個の物体を連結しているのは $N+1$ 本のばねである。このばねののびを考えよう。n 番目と $n+1$ 番目の間にあるばねは、$y_{n+1}-y_n$ だけ伸びることになるから、n 番目のおもりと $n+1$ 番目のおもりを $k(y_{n+1}-y_n)$ の力で引っ張る。これをおもりの立場で考えると、右からは $k(y_{n+1}-y_n)$ の力で引っ張られ、左からは $k(y_n-y_{n-1})$ の力で引っ張られる。よって運動方程式は

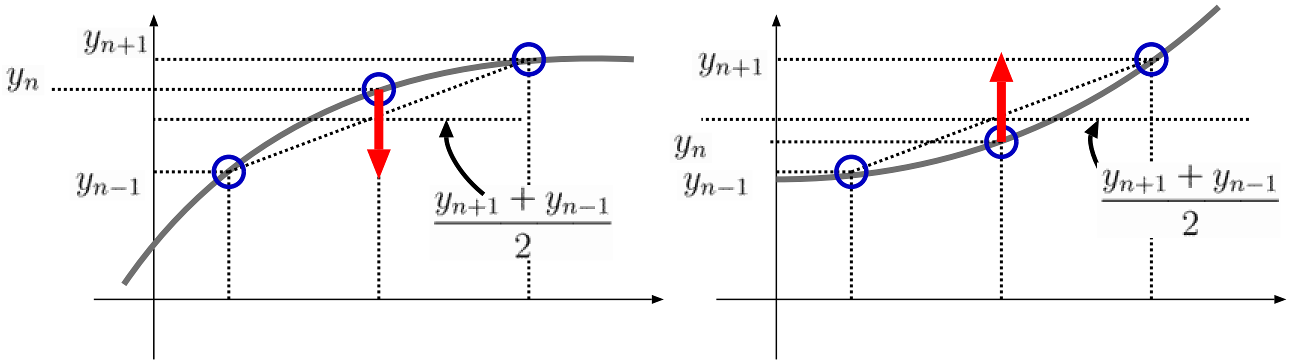
$$m\frac{d^2y_n}{dt^2}=k(y_{n+1}-y_n)-k(y_n-y_{n-1})=ky_{n-1}-2ky_n+ky_{n+1} \tag{3.76}$$

となる。この運動方程式を見ると、n 番目の物体に働く力は、

$$-2k\left(y_n-\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}\right) \tag{3.77}$$

と表すことができ、y_n と $\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}$ の差に比例していることがわかる。しかもその力の向きはこの二つを一致させようとする向きである（$y_n>\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}$ なら y_n を減少させる向きに、$y_n<\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}$ なら y_n を増加させる向きに働く）。つまりこの時働く力は「自分の場所を、両隣の平均値へと近づけようとする」という形の復元力なのである（両端にばねがつけられている状態を思い浮かべれば、なるほどそうであろうと納得できる）。

下のグラフは、本来横方向の変位である y_n を縦軸として書き直したグラフである。グラフの線が弾性を持っているかのごとく考えれば、力の方向を理解しやすい。



下向きの力が働く場合　　　　上向きの力が働く場合

実は物理で波動がある時には、たいていこのような「平均へと戻そうとする復元力」が関与している。後で出てくる波動方程式には２階の空間微分があるが、それはこの顕れなのである。

この式を行列で書けば、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{N-1}\\ y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2k & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ k & -2k & k & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & k & -2k & k & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2k & k\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_{N-1}\\ y_N\end{pmatrix} \tag{3.78}$$

となる。y_1 と y_N については、片方の端は固定されているわけなので、運動方程式の右辺には２つの項しかない。

問題は、この行列をどう対角化するか、ということになるわけである。

線型代数の一般論にしたがって計算していくというのも一つの手である。しかしここでは、既に $N=2, N=3$ で計算した結果の類推で「三角関数で固有ベクトルが求められるのではないか？」と予想してみよう。(3.41),(3.39) の類推から

$$y_n=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{np\pi}{N+1} \tag{3.79}$$

としてみよう。これが $e^{\mathrm{i}\omega t}$ で表現される振動をしていると考えて、$y_n(t)=\sin\dfrac{np\pi}{N+1}e^{\mathrm{i}\omega t}$ というモードがあると仮定してみる（前についていた規格化のための係数は、解であるかどうかを判定するには不要なので省いた）。これを運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\frac{np\pi}{N+1}e^{\mathrm{i}\omega t}\right) &= k\sin\frac{(n-1)p\pi}{N+1}e^{\mathrm{i}\omega t}+k\sin\frac{(n+1)p\pi}{N+1}e^{\mathrm{i}\omega t}-2k\sin\frac{np\pi}{N+1}e^{\mathrm{i}\omega t} \\ -m\omega^2\sin\frac{np\pi}{N+1} &= k\left(\sin\frac{(n-1)p\pi}{N+1}+\sin\frac{(n+1)p\pi}{N+1}-2\sin\frac{np\pi}{N+1}\right) \end{aligned} \tag{3.80}$$

ここで、例によって両辺を複素化して、

$$-m\omega^2 e^{\mathrm{i}\frac{np\pi}{N+1}}=k\left(e^{\mathrm{i}\frac{(n-1)p\pi}{N+1}}+e^{\mathrm{i}\frac{(n+1)p\pi}{N+1}}-2e^{\mathrm{i}\frac{np\pi}{N+1}}\right) \tag{3.81}$$

としよう。この式の虚数部分が元の方程式である（$e^{\mathrm{i}\theta}$ の虚数部分は $i\sin\theta$）。この式で、両辺を $e^{\mathrm{i}\frac{np\pi}{N+1}}$ で割ってしまう。すると、

$$-m\omega^2=k\left(e^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{N+1}}+e^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{N+1}}-2\right) \tag{3.82}$$

となる。右辺の ( ) 内は、$e^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}e^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}=1$ であることに気づくと、

$$\underbrace{e^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}}_{b^2}-2\underbrace{e^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}e^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}}_{ab}+\underbrace{e^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}}_{a^2}=\left(\underbrace{e^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}}_{a}-\underbrace{e^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{2(N+1)}}}_{b}\right)^2 \tag{3.83}$$

と因数分解され、括弧内は $2i\sin\dfrac{p\pi}{2(N+1)}$ である[13]から、

$$-4\sin^2\frac{p\pi}{2(N+1)} \tag{3.84}$$

と計算される。結果、運動方程式から

$$-m\omega^2=-4k\sin^2\frac{p\pi}{2(N+1)} \tag{3.85}$$

すなわち、

$$\omega=2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)} \tag{3.86}$$

となる。ω は n によらない定数となったから、これでめでたく、

$$y_n=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{np\pi}{N+1}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}+\alpha_p\right) \tag{3.87}$$

が解であることがわかった。一般解は、

$$y_n=\sum_{p=1}^{N}A_p\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{np\pi}{N+1}\sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}t+\alpha_p\right) \tag{3.88}$$

であり、A_p,α_p はそれぞれ、p 番目の mode の振幅と初期位相である。行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{T} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \\ A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \\ A_3\sin(\omega_3 t+\alpha_3) \\ \vdots \\ A_N\sin(\omega_N t+\alpha_N) \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

[13] 公式 $\sin\theta=\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}$ を使った。

となる。ただし、

$$\omega_p = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)} \tag{3.90}$$

と定義した。変換行列 $\mathbf{T}$ は、

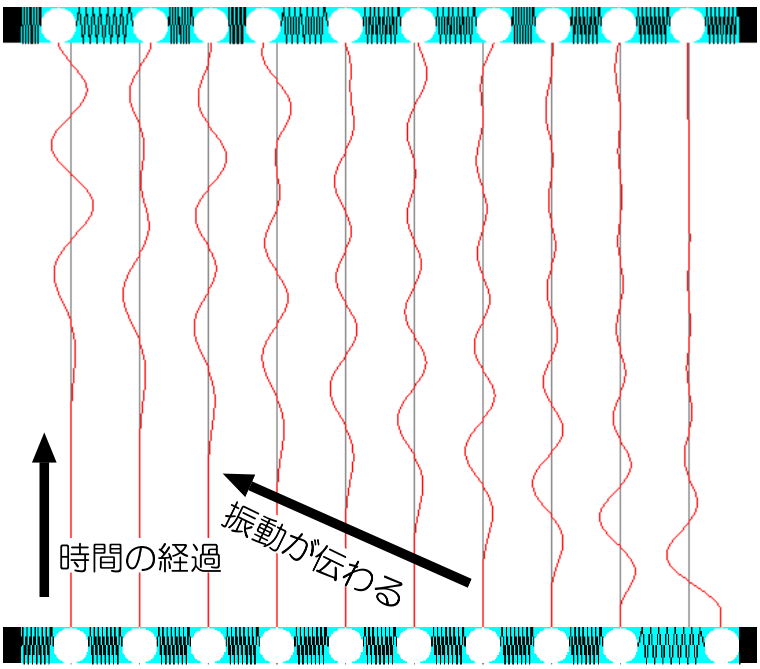
$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{N+1} & \sin\frac{2\pi}{N+1} & \sin\frac{3\pi}{N+1} & \cdots & \sin\frac{N\pi}{N+1} \\ \sin\frac{2\pi}{N+1} & \sin\frac{4\pi}{N+1} & \sin\frac{6\pi}{N+1} & \cdots & \sin\frac{2N\pi}{N+1} \\ \sin\frac{3\pi}{N+1} & \sin\frac{6\pi}{N+1} & \sin\frac{9\pi}{N+1} & \cdots & \sin\frac{3N\pi}{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\frac{N\pi}{N+1} & \sin\frac{2N\pi}{N+1} & \sin\frac{3N\pi}{N+1} & \cdots & \sin\frac{N^2\pi}{N+1} \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

である。成分をまとめると、

$$\mathbf{T}_{pq} = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{pq\pi}{N+1} \tag{3.92}$$

ということになる。$\mathbf{T}$ は直交行列だから $\mathbf{T}^t = \mathbf{T}^{-1}$ であり、今の場合は $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}$ である。

実際の問題を解く時は、y_i とその微分 $\frac{dy_i}{dt}$ の初期値が与えられていることが多い。その時は $\vec{Y} = \mathbf{T}^t\vec{y}(\frac{d}{dt}\vec{Y} = \mathbf{T}^t\frac{d}{dt}\vec{y})$ という行列計算によって、各モードを表すベクトル $\vec{Y}$ およびその微分の初期値がわかるので、これを使って A_p, α_p を計算する。これで任意の時刻の $\vec{Y}$ さらには（$\vec{y} = \mathbf{T}\vec{Y}$ を用いて）任意の時刻の $\vec{y}$ がわかることになる。



右のグラフは、一番下のが初期状態（初速度０）で、時間が経過するに従ってどのように物体が振動したかを示すグラフである。初期値は、一番右端の物体だけが右に変位している（一個だけを右に引っ張って手を放した状態）から始めた。ゆえに最初の状態では一番右のばねは縮められ、右から２番目のばねは伸びた状態にあった。一番右のおもりは左に、右から２番目のおもりは右にひっぱられるところから運動が始まる。やがてその振動がばねを介してどんどん左へと伝わっていくのである。

次の章から本格的に「波動」を勉強するが、このような連成振動の場合でも、波動の重要な性質「伝播する」が出現している。一般の波動もこのように復元力が振動を伝播してくことによって出現する現象である。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

なお、前についている係数 $\sqrt{\frac{2}{N+1}}$ の正当性についてここまでチェックを怠っていたので、ここでこれでよいことを確認しておく。$\mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{I}$ ではなくてはいけないが、これを成分を使って表現すると、

$$\sum_q \mathbf{T}_{pq}(\mathbf{T}^t)_{qr} = \sum_q \mathbf{T}_{pq}\mathbf{T}_{rq} = \delta_{pr} \tag{3.93}$$

である。$p \neq r$ の時 0 になることは「固有値の違うベクトルは直交する」という定理のおかげで証明は不要である。$p = r$ の時 1 にな

ることを確認しよう。この式を成分で書くと、

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{N}\mathbf{T}_{pq}\mathbf{T}_{pq} &= \sum_{q=1}^{N}\frac{2}{N+1}\sin^2\frac{pq\pi}{N+1}\\ &= \sum_{q=1}^{N}\frac{2}{N+1}\sin^2\frac{pq\pi}{N+1}+\sum_{q=-1}^{-N}\frac{2}{N+1}\sin^2\frac{pq\pi}{N+1}\underbrace{+\frac{2}{N+1}\sin^2\frac{p\times 0\pi}{N+1}+\frac{2}{N+1}\sin^2\frac{p\times(N+1)\pi}{N+1}}_{=0}\\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{q=-N}^{N+1}\sin^2\frac{pq\pi}{N+1}\end{aligned} \tag{3.94}$$

となる。ここで、わざわざどうせ 0 になる数を二つ足し算して、1 から N までだった q の和を、$-N$ から $N+1$ までに直した。こうすることによって、後の計算で足りない部分がちゃんと出てきてくれるのである。ここで sin を exp を使って書き直すことで、

$$-\frac{1}{4(N+1)}\sum_{q=-N}^{N+1}\left(e^{\mathrm{i}\frac{pq\pi}{N+1}}-e^{\mathrm{i}\frac{pq\pi}{N+1}}\right)^2=-\frac{1}{4(N+1)}\sum_{q=-N}^{N+1}\left(e^{\mathrm{i}\frac{2pq\pi}{N+1}}+e^{-\mathrm{i}\frac{2pq\pi}{N+1}}-2\right) \tag{3.95}$$

とかける。このうち、最後の -2 の部分がちょうど 1 となる。$q=-N$ から $q=N+1$ まで、ちょうど $2N+2$ 個の $-4(N+1)\times(-2)$ を足していくことになるからである。なお、最初の 2 項はどちらも単位円上をぐるりと回るベクトルを一周分足すことに対応していて、答は 0 である。以上で係数が正しいことも証明された。

【補足終わり】

3.6 連続的な物体への極限

ここまでこの章では、つながった複数個の物体の振動を考えた。ここでその数を一気に無限個にしよう。すなわち「連続的につながった物体」の振動を考える。この物体の部分部分の動きを考えると、無限個の物体の運動を考えることになる。これはたいへんなことのように思えるかもしれないが、微分方程式とモード分解という二つの強力な道具の御陰で、問題をずいぶん簡単にして考えることができる。

前の章では N 個の物体の振動を考えてきたが、この N をどんどん大きくしていく。するとこれは、棒の端っこを叩いた時にその動きが反対の端へと伝わっていく現象（固体を伝わる弾性波の縦波）のモデルとなる。この時、おもりは分子のモデルとなり、ばねは分子の間に働く分子間力[14]のモデルとなる。

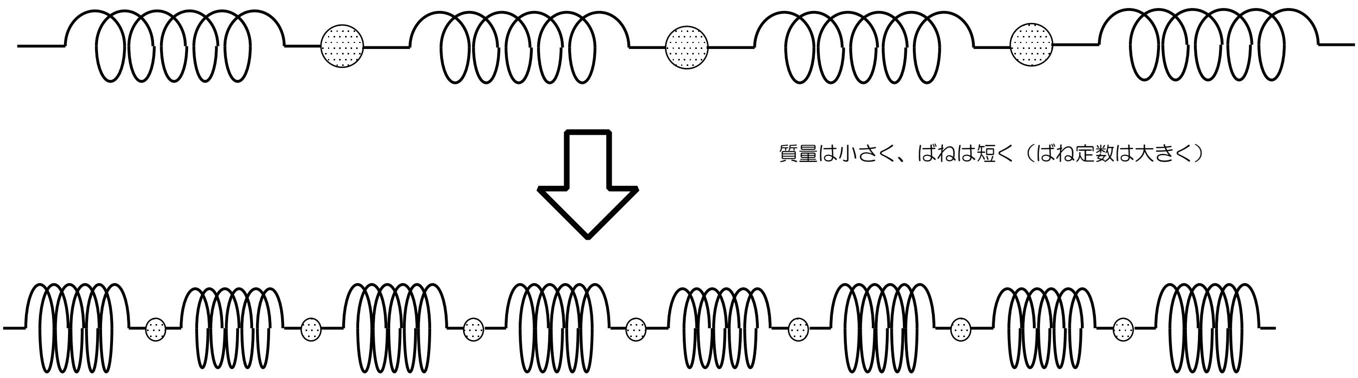
3.6.1 極限としての解

ではここで、N が有限の時の答

$$y_n(t)=\sum_{p=1}^{N}A_p\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{np\pi}{N+1}\sin\left(\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p\right) \tag{3.96}$$

を思い出そう。この解の $N\to\infty$ 極限をとってみる。一個一個のおもりのラベルである n は、今度は横方向の位置座標となる。そこでここからは位置座標として x を使い、おもり一個一個の変位の方に $y(x)$ を使おう。つまり、これまで y_n と書いていたものは $y(n\Delta x)$ と書くことにする。ここで、この質点のつながり全体の長さを L とすると、$\Delta x=\dfrac{L}{N+1}$ である。

[14] 分子間力は遠距離では引力だが、分子が近づくと逆に斥力になるという性質がある。つまりどこかに平衡点（ばねの自然長にあたる）があり、そこからずれると元に戻ろうとする復元力として働く。厳密にはフックの法則には従わないが、近似すれば $F=-kx$ と書いていい。



単純に m,k を固定して $N\to\infty$ とすると、おもりの質量総計は ∞ になってしまうし、ばねの長さはどんどん短くなるのにばね定数は変化しないという不合理が起こる。そこで、同時に、一個のおもりの質量 m を $\frac{M}{N}$ とどんどん小さくし (M は質点全部の質量の総計を示す)、ばね定数 k を $K(N+1)$ と、どんどん大きくする（同じ材質のばねながら、ばね定数は長さに反比例する。K は全ばねをつなげた場合のばね定数に対応する)。

まとめると、

(1) 位置を表す変数である n は $\frac{N+1}{L}x$ に置き換えられ、その場所での変位を表す x_n は $y(x,t)$ と置き換えられる。

(2) 質量 $m\to\frac{M}{N}$、ばね定数 $k\to K(N+1)$ と置き換えがおこる。

ということになる。これによって、まず一つめの sin の中身が

$$\frac{np\pi}{N+1}\to\frac{N+1}{L}x\times\frac{p\pi}{N+1}=\frac{p\pi}{L}x \tag{3.97}$$

となる。2 個目の sin の中身は少々複雑なので注意深く極限をとる必要がある。

$$\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p\to\left(2\sqrt{\frac{K(N+1)}{\frac{M}{N}}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p \tag{3.98}$$

だが、ここで $N+1$ と N は同じようなもの、と考えることにして、

$$\left(2\sqrt{\frac{K(N+1)}{\frac{M}{N}}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p\to\left(2\sqrt{\frac{K}{M}}(N+1)\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p \tag{3.99}$$

とおく。ここで $\frac{p\pi}{2(N+1)}=\theta$ とおくと、

$$\left(2\sqrt{\frac{K}{M}}\underbrace{(N+1)}_{\to\frac{p\pi}{2\theta}}\sin\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)t+\alpha_p=\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\frac{p\pi}{\theta}\sin\theta\right)t+\alpha_p \tag{3.100}$$

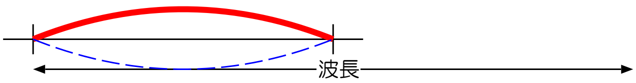
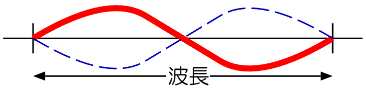
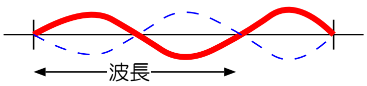
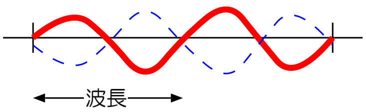
と置き直せる。$N\to\infty$ 極限は $\theta\to 0$ 極限であり、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を思い出せば、この極限は $p\pi\sqrt{\frac{K}{M}}t+\alpha_p$ ということになる。結局解は

$$y(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}C_p\sin\frac{p\pi}{L}x\sin\left(p\pi\sqrt{\frac{K}{M}}t+\alpha_p\right) \tag{3.101}$$

ということになる。ただし、$A_p\sqrt{\frac{2}{N+1}}$ をあらためて C_p と置いた[15]。

この解の一個一個のモードを見ると、各々の点が振幅 $C_p\sin\frac{p\pi}{L}x$、角振動数 $p\pi\sqrt{\frac{K}{M}}$ で振動していると考えられる。$p=1$ から $p=4$ までの各振動モードの波長、角振動数と振動の様子を以下の表に示す。

[15] $C_p=A_p\sqrt{\frac{2}{N+1}}$ という式を見て、「$N\to\infty$ で $C_p\to 0$ では？」と心配してはいけない。この時、分母の $N+1$ が発散するが、同時に分子の A_p も発散して有限値になると考える。

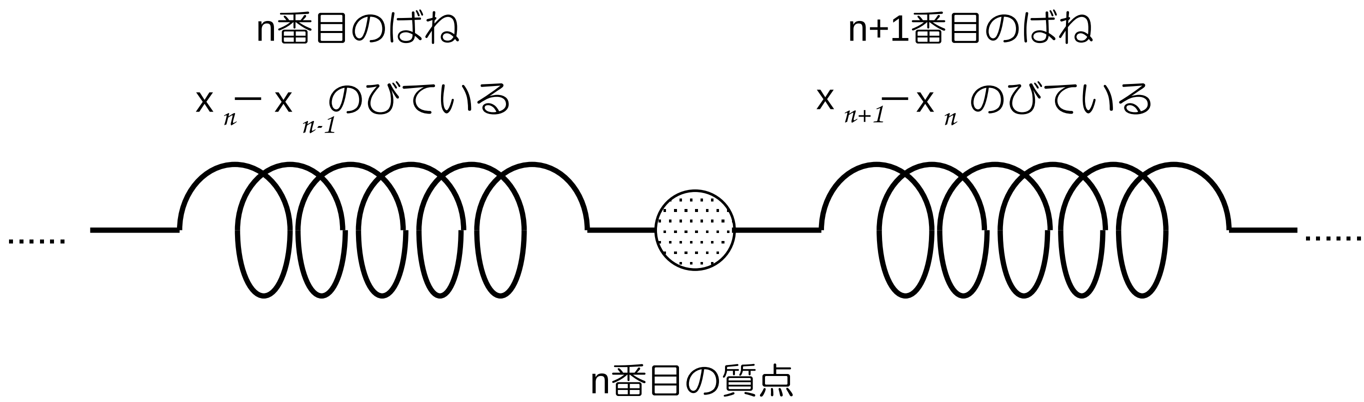
腹の数	波長	角振動数	振動の様子
$p=1$	$2L$	$\pi\sqrt{\frac{K}{M}}$	
$p=2$	L	$2\pi\sqrt{\frac{K}{M}}$	
$p=3$	$\frac{2L}{3}$	$3\pi\sqrt{\frac{K}{M}}$	
$p=4$	$\frac{L}{2}$	$4\pi\sqrt{\frac{K}{M}}$	

$\sin\frac{p\pi}{L}x$ という関数は x が $\frac{2L}{p}$ だけ増加すると位相が 2π 増加する（だから波長が $\frac{2L}{p}$）ということに気をつけよう。振動の各モードは両端を固定した弦の振動の形になる。実際の振動はもちろん、これらの各モードが重なり合ったものとなるだろう。

ここで作られた各振動モードは、波ではあるがいわゆる「**定常波** (standing wave)」であり、どちらにも進行しない。これは「両端を固定する」という境界条件を置いた結果であって、一般にはそうではない。これについては、連続極限の方程式を出した後、別の境界条件で解いていきながら考えることにしよう。

3.6.2　連続極限の方程式を作る

以上で、解を先に出したわけだが、今後も「N 個の場合を考えて、後から $N\to\infty$ の極限をとる」という計算をしたのではたいへん面倒なので、最初から最後まで $N\to\infty$ の極限をとった形（つまり、物質が連続的に分布している形）で計算したい。そのためには、方程式自体を連続極限で考えた方がよい。



一個のおもりの質量を $\frac{M}{N}$ と一本のばねのばね定数を $K(N+1)$ と設定すると、連成振動の n 番目の質点の運動方程式は

$$\frac{M}{N}\frac{d^2x_n}{dt^2}=K(N+1)\left(x_{n-1}-2x_n+x_{n+1}\right) \tag{3.102}$$

である ($n+1$ 番目のばねからは $K(N+1)(x_{n+1}-x_n)$ の力が左向きに、n 番目のばねからは $K(N+1)(x_n-x_{n-1})$ の力が右向きにかかると考える)。ただし、x_0 と x_{N+1} は 0 だとしよう[16]。

そう書くと、方程式は

$$\frac{M}{N}\frac{d^2y(n\Delta x)}{dt^2}=K(N+1)\left(y((n-1)\Delta x)-2y(n\Delta x)+y((n+1)\Delta x)\right) \tag{3.103}$$

に変わる。整理して、

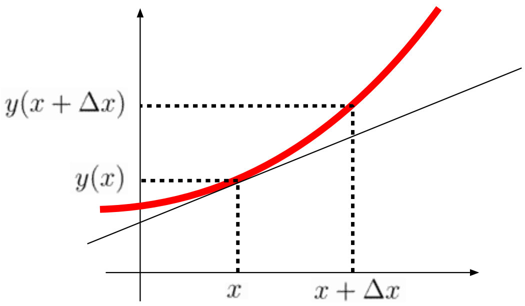
$$\frac{d^2y(n\Delta x)}{dt^2}=\frac{KN(N+1)}{M}\left(y((n+1)\Delta x)+y((n-1)\Delta x)-2y(n\Delta x)\right) \tag{3.104}$$

としよう。

以下で、この式の右辺の極限は $y(x,t)$ という関数の二階微分 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ に対応することがわかる。そのことを以下で説明しよう。

まず、

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} \tag{3.105}$$



という微分の定義式どおりの関係を思い出す。これはつまり、$x\to x+\Delta x$ の間の関数 $y(x)$ の増加率であり、グラフで表現すればグラフの傾きに対応する。右の図で Δx をどんどん小さくしていくと、$\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ という量は x の場所での関数の傾きになる。

さらにこれを微分する。微分の微分、すなわち二階微分は、さらに「ある場所の微分」と「その少し横の場所の微分」の差として定義される。つまり、右の図のように 3 つの場所（$x-\Delta x, x, x+\Delta x$）での y によって、二階微分は表現される。具体的には、$\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ と $\dfrac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}$ の差をとるという計算こそが二階微分である[17]。まとめると以下のようになる。

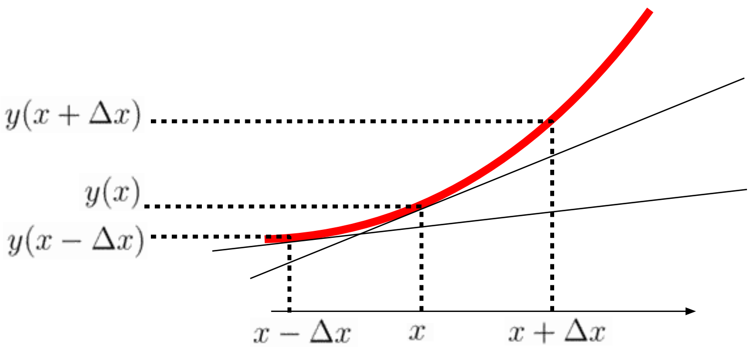
$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}(x)-\frac{dy}{dx}(x-\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)-2y(x)\right)\end{aligned} \tag{3.106}$$

ここで、$\Delta x=\dfrac{L}{N+1}$ であることを使うと、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(N+1)^2}{L^2}\left(y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)-2y(x)\right) \tag{3.107}$$

となる。

グラフ上ではこれは傾きの変化であり、線の曲がり具合に対応するわけである。



ここで、どうせ N は∞になるので、N と $N+1$ には差がないに等しい、と考えると、(3.107)$\times\dfrac{KL^2}{M}$ は (3.104) で $x=n\Delta x$ としたものと同じだと考えられる[18]。つまり、極限をとった結果として、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)=\frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) \tag{3.108}$$

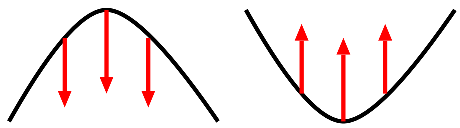
という式が出る。これが、$N\to\infty$ 極限での $y(x,t)$ の満たすべき方程式である。

---

[16] 0 番目と $N+1$ 番目のおもりは存在しない。ちょうど壁にくくりつけられて振動できない端に対応する。

[17] ここでは、微分は $x+\Delta x$ と x の差、二階微分は x と $x-\Delta x$ の差で定義していることになる。定義の仕方がちぐはぐに見えるかもしれない。しかし、最後には $\Delta x\to 0$ にするのだから、この定義の違いは結果的には何の影響も残さない。

[18] ここで N と $N+1$ を同じと置いたことについて「これでいいのか？」と悩む人がよくいる。だが、N は今アボガドロ数 (6×10^{23}) 程度の数になることを忘れてはいけない。



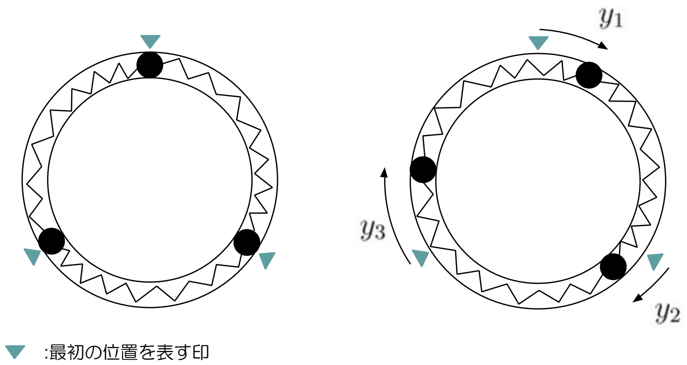
この導出の仕方からわかるように、この方程式に t の二階微分があるのはニュートン力学の運動方程式に t の二階微分があること、つまり「力＝（質量）×（加速度）」のように加速度（二階微分）があることを反映している。そして、x の二階微分があるのは、ここで働く力が「関数 y の勾配を一定にしようとする力」であることを示している。このような力が働いていると「山」になっているところを下げ、「谷」になっているところをあげるように力が働く。

物理のいろんな局面において、このような形の復元力が現れる。それゆえ、物理のいろんな場面で波動が出現するのである。

3.7　章末演習問題

[演習問題 3-1] 3.1 節の問題で、真ん中のばねだけがばね定数 K だったとする。問題を解き直せ。

[演習問題 3-2]　ドーナツ状に輪になったチューブの中に物体が 3 つ、ばねが 3 つ入って互いに図のように連結されている。最初、物体は左図のような形で平衡にあった。チューブの内面にまさつはなく、物体はスムースに動き回れるものとする。平衡の位置からの変位を図のように y_1, y_2, y_3 と置く。



(1) y_1, y_2, y_3 の満たすべき運動方程式を求めよ。

(2) この方程式を $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(y_1 + y_2 + y_3), Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_1), Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_2)$ に関する運動方程式に組み直せ。

(3) 各々のモードに対する方程式を解け。

(4) それぞれのモードはどんな運動を意味するのか、説明せよ。

(5) $Y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_3)$ というモードを考えてもよさそうだが、これは考えなくてもよい。なぜか？

第4章　１次元の波動方程式

この章で学ぶ大事なこと

- **１次元連続物体を伝わる波動の方程式**
- **１次元波動方程式の解き方**

4.1　１次元の波動方程式とその解き方の例

3.6 節では、連成振動の $N \to \infty$ 極限を取ることで連続な物体の振動（波動）を表現した。ここでは極限を取るのではなく、最初から連続な物体があるとした場合の方程式を出して、同じ形になることを確認しておこう。

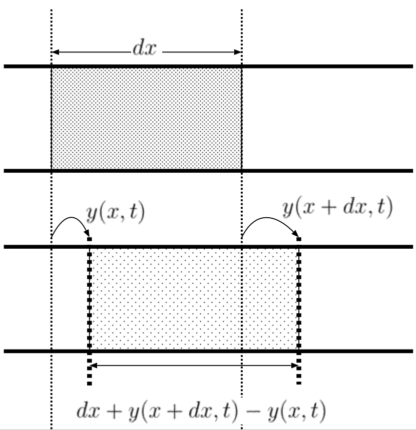
以下では、波動現象が起こるような物理的状況について、その状況を表現する方程式を導出してみよう。波動現象が起こるのは前に書いたように「復元力と慣性があり、しかも運動が伝播する」とういことであった。以下ではその例をいくつか挙げる。

4.1.1　弾性体を伝わる縦波の方程式

ここでは弾力を持った[1]固体の棒を考え、その棒の端に、図のように撃力を与えた時、この衝撃がどのように伝わっていくかを考えることにする。

変数 $y(x,t)$ を、本来 x の位置にいるべき物質が $x+y(x,t)$ の位置まで移動しているということを表現する変数として考える。

この時、本来 $x+dx$ の位置にいるべき物質は $x+dx+y(x+dx,t)$ の位置まで移動していることになる。



すると本来「x から $x+dx$ まで」という dx の幅を持っていた部分が、$dx+y(x+dx,t)-y(x,t)$ の幅に変化してしまっている、ということになる。$y(x,t)$ の関数の形によって、これは元の長さ dx より長くなることもあれば、短くなることもあるだろう。

この物質がばねと同様に、伸び縮みに比例した力（とりあえず比例定数を k としよう）が働くような弾性体だとしよう。すると、今考えていた長さ dx の部分は、$k\left(y(x+dx,t)-y(x,t)\right)$ の力で自分の両サイドを引っ張る（別の言い方をすれば、$-k\left(y(x+dx,t)-y(x,t)\right)$ の力で自分の両サイドを押す)。さて、問題はこの比例定数 k であるが、「短いばねほど伸ばしにくい」[2]という事実から、ばね定数に対応する k の値は dx に反比例する。ゆえに後で $dx \to 0$ の極限をとるとこの「ばね定数」は発散してしまう。そこでこのばね定数に dx をかけたものを考える。

[1] ここで「弾力を持った」と書いているのは「やわらかい」という意味ではなく、「変形に対する復元力を有する」という意味である。

[2] 同じ材質で、10 センチのバネを 1 センチ伸ばすのと、20 センチのバネを 1 センチ伸ばすのなら、20 センチのバネを 1 センチ伸ばす方が楽である。前者は「全体の 10 %の長さを伸ばす」必要があるのに比べ、後者では全体の 5 %の長さを伸ばせばよい。

この量は有限になる筈だから、$\bar{K}=kdx$ と書こう。ここでも、「dx は後で 0 にする極限を取る」という約束のもとで書いている式であることを忘れてはいけない。この書き方で書くと、この力 $k\left(y(x+dx,t)-y(x,t)\right)$ に dx をかけた量は、

$$\bar{K}\left(y(x+dx,t)-y(x,t)\right)dx=\bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}dx \tag{4.1}$$

と書くことができる。力はこれを dx で割った、$\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ である。

念のため補足

ここから先の計算で、頻繁に、

$$\frac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}dx=f(x+dx,\cdots)-f(x,\cdots) \tag{4.2}$$

という式を使う。この講義に限らず物理のあらゆるところで使う式なのだが、「よくわからない」という人がいるようなので、ここで少し解説しておく。これは偏微分の定義

$$\frac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)}{\Delta x} \tag{4.3}$$

から考えると、実は当たり前の式である。この式で、$\Delta x\to 0$ という極限を取ることを中止したとしよう。

$$\frac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)}{\Delta x}+\mathcal{O}(\Delta x) \tag{4.4}$$

となる。最後の $\mathcal{O}(\Delta x)$ は $\Delta x\to 0$ になったら消えてしまう量である。この式の両辺に Δx をかけると、

$$\frac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}\Delta x=f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)+\mathcal{O}((\Delta x)^2) \tag{4.5}$$

となる[a]。
この式の Δx を dx と書き直したものが (4.2) である[b]。

$$\frac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}dx=f(x+\Delta x,\cdots)-f(x,\cdots)+\underbrace{\mathcal{O}((dx)^2)}_{\text{書く必要なし}} \tag{4.6}$$

またこの式を少し書き直すと、

$$f(x+dx,\cdots)=f(x,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}dx \tag{4.7}$$

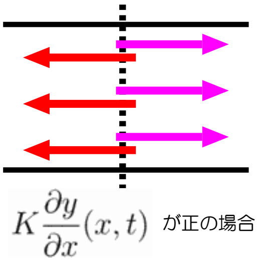
となる。つまり、x を dx だけ変化させたら、$f(x,\cdots)$ は $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx$ だけ変化するということ（ただしここでも $\mathcal{O}(dx^2)$ は無視されている）。
つまりは「x の変化と、それに伴う f の変化の比を取った物が微分である」という元々の微分の定義そのままの式なのである。いこの式を見て「微分の定義そのままだ」と思えない人は、もう一度微分について勉強し直した方がいい。

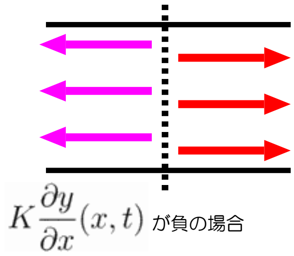
[a] 最後の $\mathcal{O}(\Delta x)$ が $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ に変わったのは、一つ Δx がかけられたことにより、$\mathcal{O}(\Delta x)$ よりもさらに小さい量になったことを表現している。具体的に表現すると、$\mathcal{O}(\Delta x)$ は $\Delta x\to 0$ で 0 になるが、$\frac{\mathcal{O}(\Delta x)}{\Delta x}$ は $\Delta x\to 0$ でも 0 にならない。同様に、$\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ や $\frac{\mathcal{O}((\Delta x)^2)}{\Delta x}$ は $\Delta x\to 0$ で 0 になるが、$\frac{\mathcal{O}((\Delta x)^2)}{(\Delta x)^2}$ は 0 にならない。

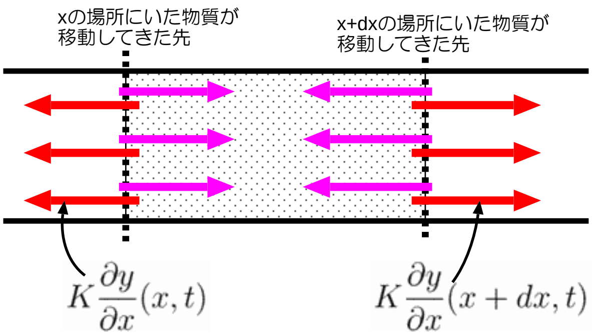
[b] 物理の式の中で dx という量が出てきたら、それは「後で $dx\to 0$ という極限を取りますよ」ということを暗黙の了解として考えているので、最後に $\mathcal{O}((dx)^2)$ と書く必要はない。

力の向きは、$\dfrac{\partial y}{\partial x} > 0$ の時（つまり弾性体がのびている時）にはひっぱる向きである。力は作用・反作用がペアになって働くものであるから、$\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ の正負に従って引っ張り合う力（張力）になったり押し合う力（圧力）になったりする。

なお、右から $\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ の力が働いたとしても、もし左からも同じ力が働くのであれば、この二つの力は互いに打ち消し合ってしまい、ないのと同じになる。







つまり、左からの力 $\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$（右向き）と右からの力 $\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t)$（左向き）の差がこの微小部分に働く正味の力ということになる。つまり働く力は

$$n\bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - \bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \bar{K}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)dx \tag{4.8}$$

となる。この力は、線密度を ρ として、質量が ρdx で表される微小部分に働く。

この微小部分に対する運動方程式を書き下すと

$$\begin{aligned}\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \bar{K}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\downarrow (\rho dx \text{ で割って}) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\bar{K}}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{4.9}$$

となって、極限を使って出した方程式と同じ物が出てくる。極限を使って出した時には、線密度 ρ を $\dfrac{M}{L}$ と考えたし、今のばね定数 $\bar{K}$ は単位長さあたりのばね定数で、極限を使った時のばね定数 K は長さ L あたりのばね定数であったから、この二つには $\bar{K} = KL$ の関係がある。よって、$\dfrac{\bar{K}}{\rho} = \dfrac{KL^2}{M}$ なのであり、同じ式になっているのである。

このテキストでは先に極限を出したが、もちろんどちらを出発点にするのが正しいというものではない。どちらでも考えることができる。

以下でいろんな方法で方程式を解いてみよう。

4.1.2　変数分離で方程式を解く

この方程式は、$y(x,t)$ という、x,t 両方の変数に依存する関数の x 微分と t 微分の関係を表す、偏微分方程式となっている。偏微分方程式の解き方はいろいろあるが、一つの方法は

$$y(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.10}$$

と '**変数分離**' できると仮定し、偏微分方程式を常微分方程式二つに直してしまう、というものである。どんな微分方程式もこの方法で解けるとは限らないが、物理の重要な問題に出てくる微分方程式の多くが変数分離で解ける。まずはこの方法でやってみよう。解く前に、方程式を

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \underbrace{v^2}_{=\frac{\bar{K}}{\rho}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) \tag{4.11}$$

と書き直しておく。$\sqrt{\dfrac{\bar{K}}{\rho}} = v$ と置いたことになるが、これを v と表した意味はすぐに明らかになる。

この式に (4.10) を代入する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(x)T(t) &= v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)T(t) \\
&\quad\text{（微分と関係ない量を前に出す。）} \\
X(x)\frac{d^2}{dt^2}T(t) &= v^2T(t)\frac{d^2}{dx^2}X(x) \\
&\quad\text{（左辺に } t \text{ を、右辺に } x \text{ を集める。）} \\
\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t) &= \frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

こうして左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数とした。x と t は独立な変数であって、一方だけを勝手に変化させることができる[3]。両辺が常に等しくあるためには、両辺ともに定数となるしかない。その変数を C とおくと、

$$
\frac{d^2}{dt^2}T(t) = Cv^2T(t) \quad \text{かつ} \quad \frac{d^2}{dx^2}X(x) = C\frac{d^2}{dx^2}X(x) \tag{4.13}
$$

という二つの式を解くことになるが、それはこれまで同様に簡単に解けて、

$$
T(t) = De^{\sqrt{C}vt} + Ee^{-\sqrt{C}vt}, \quad X(x) = Fe^{\sqrt{C}x} + Ge^{-\sqrt{C}x} \tag{4.14}
$$

である。実際の解はこの積なので単純に考えると（C の値を一つ決めた時に）４種類あることになる。

$$
y(x,t) = A_1e^{\sqrt{C}(x+vt)} + A_2e^{\sqrt{C}(x-vt)} + A_3e^{\sqrt{C}(-x-vt)} + A_4e^{\sqrt{C}(-x+vt)} \tag{4.15}
$$

これで解は４つなのだが、実は C の値は全く決まっていないので、今の段階では C はどんな複素数をとってもよく、そういう意味では無限個の解が出ていることになる。

さて、ここで境界条件 $y(x=0,t)=0$ と $y(x=L,t)=0$ があったことを思い出す。まず $x=0$ での境界条件から、

$$
y(0,t) = A_1e^{\sqrt{C}vt} + A_2e^{-\sqrt{C}vt} + A_3e^{-\sqrt{C}vt} + A_4e^{\sqrt{C}vt} = 0 \tag{4.16}
$$

であるが、これは任意の時刻 t で成立せねばならないから、$A_4=-A_1, A_3=-A_2$ であることがわかる。これを代入して、

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= A_1\left(e^{\sqrt{C}(x+vt)} - e^{\sqrt{C}(-x+vt)}\right) + A_2\left(e^{\sqrt{C}(x-vt)} - e^{\sqrt{C}(-x-vt)}\right) \\
&= A_1e^{\sqrt{C}vt}\left(e^{\sqrt{C}x} - e^{-\sqrt{C}x}\right) + A_2e^{-\sqrt{C}vt}\left(e^{\sqrt{C}x} - e^{-\sqrt{C}x}\right) \\
&= \left(A_1e^{\sqrt{C}vt} + A_2e^{-\sqrt{C}vt}\right)\left(e^{\sqrt{C}x} - e^{-\sqrt{C}x}\right)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

とした後、今度は $x=L$ での境界条件を代入すると、

$$
y(L,t) = \left(A_1e^{\sqrt{C}vt} + A_2e^{-\sqrt{C}vt}\right)\left(e^{\sqrt{C}L} - e^{-\sqrt{C}L}\right) = 0 \tag{4.18}
$$

となる。これが任意の時刻で成立するためには、$e^{\sqrt{C}L} - e^{-\sqrt{C}L} = 0$ でなくてはいけない。こうなるのはすなわち、$e^{2\sqrt{C}L}=1$ ということで、$2\sqrt{C}L = 2n\pi\mathrm{i}$ であることが要求される[4]。つまり、

$$
\sqrt{C} = \frac{n\pi}{L}\mathrm{i} \tag{4.19}
$$

でないと境界条件を満たせない。境界条件を考えない場合、C は任意の複素数であったが、境界条件によってここまで絞られたことになる。

$\dfrac{n\pi}{L} = k$ と置くことにすると、結局

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \left(A_1e^{\mathrm{i}kvt} + A_2e^{-\mathrm{i}kvt}\right)\left(\underbrace{e^{\mathrm{i}kx} - e^{-\mathrm{i}kx}}_{=2\mathrm{i}\sin kx}\right) \\
&= \left(2\mathrm{i}A_1e^{\mathrm{i}kvt} + 2\mathrm{i}A_2e^{-\mathrm{i}kvt}\right)\sin kx
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

[3] 場所を固定して時間が経過すれば t のみが変化するし、同時刻において着目点だけを変えれば x のみが変化する。

[4] $e^A=1$ という式を見て「$A=0$ だ」と考えてしまうあわてものが結構いるが、$e^A=1$ になるのは $A=0$ だけではなく、$A=2\pi\mathrm{i}, 4\pi\mathrm{i}, \cdots$ と無数にある。まとめると $A=2n\pi\mathrm{i}$ の時、$e^A=1$。

となるが、ここで計算も最後に近づいたので、$y(x,t)$ が実数であるということを思い出そう[5]。括弧の中を見ると、二つの関数の和となっており、それぞれに未定の定数 A_1, A_2 がついている。第一項の複素共役が第２項になる、という形になっていれば和が実数になる。そこで、上の式の $(2\mathrm{i}A_1)^* = 2\mathrm{i}A_2$ にする。つまり、$A_2 = -A_1^*$ と書いて、

$$y(x,t) = \left(2\mathrm{i}A_1 e^{\mathrm{i}kvt} - 2\mathrm{i}A_1^* e^{-\mathrm{i}kvt}\right)\sin kx \tag{4.21}$$

とする。これで実数にするという目標は果たされた。実数であることがもう少しわかりやすくなるように、$A_1 = |A_1|e^{i\alpha}$ と極表示すると、

$$\begin{aligned} &= 2\mathrm{i}|A_1|\left(e^{\mathrm{i}kvt+\mathrm{i}\alpha} - e^{-\mathrm{i}kvt-\mathrm{i}\alpha}\right)\sin kx \\ &= -4|A_1|\sin kx \sin(kvt+\alpha) \end{aligned} \tag{4.22}$$

という解がもとめられる。

$k = \dfrac{n\pi}{L}$ と書くと、

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\left(\frac{n\pi vt}{L} + \alpha_n\right) \tag{4.23}$$

のように、いろんな n の値の解の重ね合わせで表現できる。ただし、$-4|A_1|$ を改めて C_n と置いた。（当然ながら）$N \to \infty$ 極限と同じ答えが出ている。

4.1.3　定数係数で線型同次な微分方程式の解法を使う

定数係数で線型同次な常微分方程式の解が $e^{\lambda x}$ と置けたように、この方程式（定数係数で $y(x,t)$ に関して線型同次）の解も $e^{\lambda x+\Omega t}$ と置いて解くという方法がある。こうおけば、解くべき方程式は

$$\Omega^2 e^{\lambda x+\Omega t} = v^2\lambda^2 e^{\lambda x+\Omega t} \tag{4.24}$$

となる。これは結局 $\Omega = \pm v\lambda$ ということになり、

$$y(x,t) = Ae^{\lambda(x+vt)} + Be^{\lambda(-x+vt)} \tag{4.25}$$

という解が出ることになる。後は同様に境界条件を課していく。まず $x=0$ で $y=0$ から

$$Ae^{\lambda vt} + Be^{\lambda vt} = 0 \tag{4.26}$$

が出て、これから $B = -A$ としておく。

一方 $x = L$ で $y = 0$ から

$$Ae^{\lambda(L+vt)} + Be^{\lambda(-L+vt)} = 0 \tag{4.27}$$

なので、

$$\begin{aligned} Ae^{\lambda(L+vt)} - Ae^{\lambda(-L+vt)} &= 0 \\ e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} &= 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

となって、$\lambda L = 2n\pi\mathrm{i}$ となる。後の計算はさっきと同様である。

単純な計算としては、こちらの方が速い（ただし、定数係数でないと使えないのは常微分方程式の時と同様）。

どちらの場合も、最終結果としては実数部分だけをとらねばならないのは同じである。

---

[5] 計算の途中で複素数を使う方が楽なので使っているわけであるが、最終的な答は実数で出さなくてはいけない。複素数→実数に変える作業は、できる限り最後に近いところで行う方が楽である。

4.1.4 演算子を「因数分解」することで解く

もう一つの方法を紹介しておこう。たとえば二階の常微分方程式 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)-2\frac{d}{dx}f(x)-3f(x)=0$ はこの微分の部分 $\frac{d^2}{dx^2}-2\frac{d}{dx}-3$ を $\left(\frac{d}{dx}-3\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right)$ と「因数分解」することで、$\frac{d}{dx}f(x)=3f(x)$ または $\frac{d}{dx}f(x)=-f(x)$ の二つの式にわけて、$f(x)=Ae^{3x}+Be^{-x}$ と解くことができた。

今の方程式も、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y(x,t)=0 \tag{4.29}$$

とまとめた後、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)y(x,t)=0 \tag{4.30}$$

と因数分解できる。これはつまり方程式が、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}\right)y(x,t)=0 \quad \text{または} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right)y(x,t)=0 \tag{4.31}$$

と分けられることを意味する。ぞれぞれの解は簡単に求められる。微分演算子

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{4.32}$$

を考えよう。$x+vt$ という組み合わせにこの演算子がかかると、答えは 0 である。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}\right)(x+vt)=\frac{\partial}{\partial t}(vt)-v\frac{\partial}{\partial x}(x)=v-v=0 \tag{4.33}$$

実は $x+vt$ のいかなる関数であっても、この演算子をかけると 0 になる。例えば $(x+vt)^2$ であろうが、e^{x+vt} であろうが、$\tan(x+vt)$ であろうが、全て $\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}$ をかけると 0 になる。ゆえに任意の関数 $F(x+vt)$ が方程式の解となる。同様に、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{4.34}$$

をかけて 0 になるのは、$x-vt$ の任意の関数 $G(x-vt)$ である。結局解は、

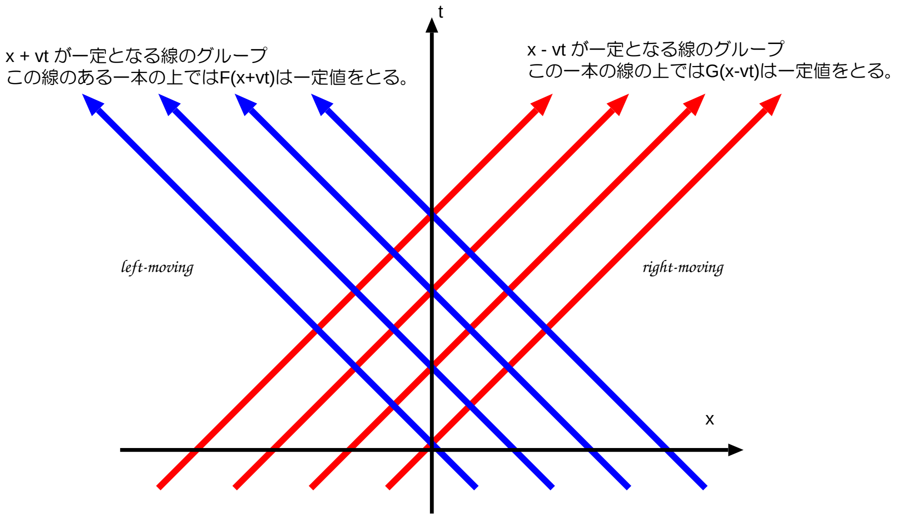
$$y(x,t)=F(x+vt)+G(x-vt) \tag{4.35}$$

である。これに境界条件をつけていくと同じ解になる。そのことは後で確認するが、この式の意味するところを考えると、v の物理的意味が明確になる。

一般に関数 $f(x)$ がある時、これを x 方向に a だけ平行移動した関数は $f(x-a)$ と書くことができる（$f(x+a)$ ではないので注意！）。そのことを考えると、

- $t=0$ で $G(x)$ で表されていた関数が、t 後に vt だけ右（プラス方向）に平行移動して、$G(x-vt)$ になった。
- $t=0$ で $F(x)$ で表されていた関数が、t 後に vt だけ左（マイナス方向）に平行移動して、$F(x+vt)$ になった。

というふうに二つの関数を解釈することができる。つまり、$G(x-vt)$ は「速さ v で右（プラス方向）へ進む波」であり、$F(x+vt)$ は「速さ v で左（マイナス方向）へ進む波」ということになる。



このように微分方程式を解いたとき、ある線（今の場合、C, D を任意の実数として、$x + vt = C$ および $x - vt = D$）の上で一定となるような関数が解となることがわかることがある。このような線を「**特性曲線** (characteristic curve)」と呼ぶ[6]。

１次元波動方程式の場合、特性曲線はすなわち「時空内を波が進む線」[7]ということになる。つまり、この形の解の場合、$G(x - vt)$ とは、x の正方向に速度 v で進んでいく波である。これは関数 $G(x)$ を、時間が経過するに従って vt ずつ平行移動させていると考えれば納得がいく。逆に $F(x + vt)$ は x の負方向に速さ v（速度で表現すれば $-v$）進んでいる波なのだと考えることができる（$F(x+vt)$ を left-moving、$G(x-vt)$ を right-moving などと言う）。

一見、今求めた解は前に求めた三角関数で書かれた解とは違うように見えるかもしれない。しかし、境界条件を加えてちゃんと計算すれば、同じ答に到着する。そのことを以下で確認しよう。

実際に起こる波はこの二つの足し算なのであるが、今考えている問題では $x = 0$ と $x = L$ で $y(x) = 0$ という境界条件が置かれているため、そこで波の反射が起こり、二つの波を表す関数に関係ができ、二つの波は独立な関数ではなくなる。$y(x = 0, t) = 0$ という条件は、

$$F(vt) + G(-vt) = 0 \tag{4.36}$$

を意味する。これは F と G が本質的には同じ関数であること（$G(X) = -F(-X)$）を意味する。$G(X) = -F(-X)$ の X に $x - vt$ を代入すると $G(x - vt) = -F(-x + vt)$ となるから、解は

$$y(x, t) = F(x + vt) - F(-x + vt) \tag{4.37}$$

と表現できることになる。さらに $y(x = L, t) = 0$ を要求すると、

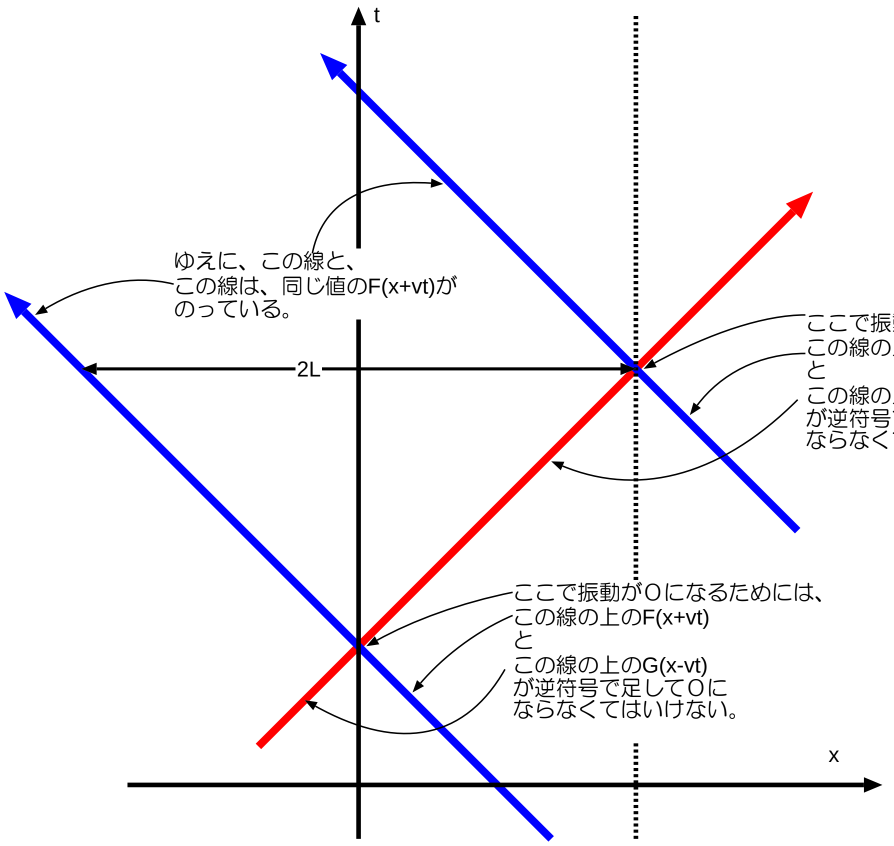
$$F(L + vt) = F(-L + vt) \tag{4.38}$$

となる。これは任意の時刻で成立すべき式であるから、関数 $F(X)$ が周期 $2L$ の周期関数（すなわち、$F(X + 2L) = F(X)$）であることを要求する式となる。

[6] たまたま、今の場合は曲線でなく直線であるが、一般には曲線になる。

[7] 「時空」は名前の通り「時間」と「空間」。上にも書いたような $x - t$ のグラフを思い浮かべよう。空間の中を点状の物体が動いていく様子は、時空の中では一本の線で表される。

反射が $x=0$ と $x=L$ で起こるおかげで関数 $F(X)$ が周期 $2L$ の周期関数となるわけだが、その様子は右のように図解することができる。



ところで、周期 $2L$ の関数は、周期 $2L$ を持つ関数である $e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}$（ただし、$n$ は任意の整数）の和で表現することが必ずできる。これから、ここで求めた解も $e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}$ を使った表現で書くことができるのである。

$e^{\mathrm{i}\theta}$ が周期 2π を持つ（$e^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)}=e^{\mathrm{i}\theta}$）ので、$e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}$ が周期 $2L$ を持つ（x を $2L$ 増やすと位相が $2n\pi$ 増える）ことはすぐわかるだろう。

任意の n に対応する各々の $e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}X}$ が波動方程式の境界条件を満たす解（モード）である。このたくさんの解を

$$F(X)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}X} \tag{4.39}$$

のように適当な係数をかけた上で重ね合わせたものも、もちろん解である。a_n はそれぞれのモードをどのように混ぜていくかを表すための定数である。このうち a_0 は定数部分を表現する式であるが、今回は実は結果には寄与しない。

このようにして一般の関数を三角関数の和で表現することを「フーリエ級数（またはフーリエ展開）」と呼ぶ。フーリエ級数もまた、波動を表現する時の大事なツールである。

これを代入すれば、

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}(x+vt)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}(-x+vt)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{a_n}_{=|a_n|e^{\mathrm{i}\alpha_n}} e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}vt}\underbrace{\left(e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}-e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}\right)}_{=2\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{L}x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}2\mathrm{i}|a_n|e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}vt+\mathrm{i}\alpha_n}\sin\frac{n\pi}{L}x \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる。例によって解はこのうち実数部分をとるので、

$$y(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-2|a_n|)\sin\frac{n\pi}{L}x\times\sin\left(\frac{n\pi}{L}vt+\alpha_n\right) \tag{4.41}$$

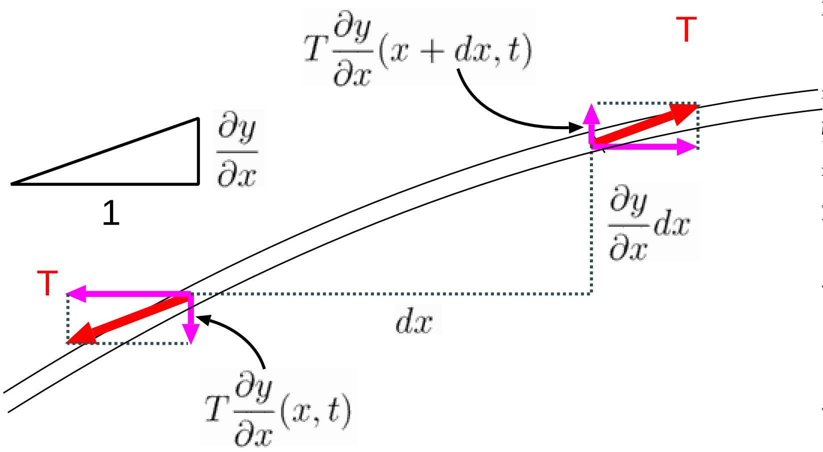
となる。結果は同じ形になる。

4.2 その他の波動方程式の例

4.2.1 横波—弦の振動

では次に、ぴんと張った弦をはじいた時にその弦に対して垂直な方向への変位が伝わっていく現象を考えよう。これも振動現象が伝わるという意味で波なのであるが、変位する方向と波が進行する方向は互いに垂直なので「**横波** (transverse wave)」と呼ぶ（これに対し、前節のように変位方向と進行方向が平行な場合は「**縦波** (longitudinal wave)」である）。

この場合の変位の方程式もやはり波動方程式になる。以下で方程式をたてていこう。ただし、ここでは変位は非常に小さいとして様々な近似を行う（近似を行わないと方程式は非線型となり、解くことは難しくなるだろう）。



線密度 ρ の糸に張力 T を与えてピンと張っている状況を考える。端から x の位置にある弦が水平の位置から $y(x,t)$ だけ上に変位するとしよう。この時、その場所の弦の傾きは $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ で表される。今、弦の張力は T として、その T は弦が動いても変化しないとする（これは厳密に考えると正しくはないが、今考えている近似の範囲内なら妥当である）。

この時、弦のうち微小部分（x から $x+dx$ までの間に存在している部分）の受ける力はどちらでも大きさ T である（仮定により）。しかし、その力の向きは少しだけだが傾いている。そこで上下方向だけを考えると、$T\frac{\partial y}{\partial x}$ の力を受けることになる。

なお、少しだけ厳密に考えると、

$$\begin{aligned} T\text{ の水平成分} &= T \times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \\ T\text{ の鉛直成分} &= T \times \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \end{aligned} \tag{4.42}$$

となりそうだが、今 y やその微分 $\frac{\partial y}{\partial x}$ は非常に小さいと考えているので、$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \simeq 1$ と考えてよいのである。

さて、弦のうち微小部分（x から $x+dx$ までの間に存在している部分）の受けている力の鉛直成分を考えると、右の端では $T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ で下向き、左の端では $T\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t)$ で上向きとなる。ゆえにこの二つの和を取ると、

$$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)dx \tag{4.43}$$

ということになる（例によって、dx は最後に 0 になるという極限を取るという約束のもとでの式なので、$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t)$ を展開した時の dx の二次以上の式を考える必要はない）。

運動方程式の左辺にあたる（質量）×（加速度）は例によって $\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$ であるから、これで成立する方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{4.44}$$

となり、縦波の式と見比べると、$\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ が波の伝わる速度 v であることがわかる。波の伝わる速さは弦の張力 T の平方根に比例し、線密度 ρ に反比例する。単純に言えば「強く張った弦ほど波は速く進む。軽い弦ほど波は速く進む」ということになる。物理的内容を考えると、妥当な結果である[8]。

[8]ギターなどの弦楽器では、細い弦ほど高い音（振動数が大きい音）を担当する。また、弦を張る時の張力で音の高さを調整する。

4.2.2　気柱の振動と音速

音は空気の振動である。実際の音は三次元的広がりを持っているので、より複雑な式となるが、長い管の中を伝播する音は、一次元的な縦波として考えることができ、波動方程式を立てる時の計算方法は弾性体を伝わる縦波の場合とほぼ同様である。弾性体の場合、振動が起こっていない時に x から $x+dx$ の間にあった物体、つまり振動が起こってない時に dx という微小範囲内にあった物質が、$dx+\frac{\partial y}{\partial x}dx$ の微小範囲内に移動した。この「伸び」$\frac{\partial y}{\partial x}dx$ に比例する形でフックの法則にしたがう力が働いたわけである。

気柱の場合の弾性体との大きな違いは、$dx<0$ の場合であっても引力はないということである[9]。しかし、波動を作り出す原因となる復元力は力そのものではなく、力の差であり、力の差を計算すると同じ方程式になる。その圧力 P は状態方程式 $PV=nRT$ によって決まる。

この部分は間違い

気体の温度が一定だとすると、圧力と体積の積 PV は一定だということになる。一方今の場合微小部分の体積は $dx+\frac{\partial y}{\partial x}dx$ に比例するから、振動が起こっていない時の大気圧を P_0 とするなら、$P_0dx=P(x,t)\left(dx+\frac{\partial y}{\partial x}dx\right)$ が成立し、

$$P(x,t)=\frac{P_0}{1+\frac{\partial y}{\partial x}}\simeq P_0\left(1-\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{4.45}$$

となる。$\simeq$ の次の式では、$\frac{\partial y}{\partial x}$ が 1 より十分小さいとして近似を行った（公式 $\frac{1}{1+x}\simeq 1-x$。厳密な式は、$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$）。

働く力は圧力×面積で $P(x,t)S$（これは図の右向きに働く）と $P(x+dx,t)S$（これは図の左向きに働く）の両方が ρSdx の質量を持つ気体にかかる。運動方程式は

$$\begin{aligned}\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)=&\ -\frac{\partial P}{\partial x}(x,t)dx\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)=&\ \frac{P_0}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\end{aligned} \tag{4.46}$$

となって、波動方程式となった。これによると音の伝わる速度は $\sqrt{\frac{P_0}{\rho}}$ である。

地上の空気の場合で計算してみると、$P_0=10^5\mathrm{N/m^2}$ で、密度 $\rho=1.2\mathrm{kg/m^3}$ であるから、

$$\sqrt{\frac{P_0}{\rho}}=\sqrt{\frac{10^5}{1.2}}=2.9\times10^2\mathrm{m/s} \tag{4.47}$$

となる。実際の音速はだいたい 340m/s なので、少し小さく、実際の値にあっていない。

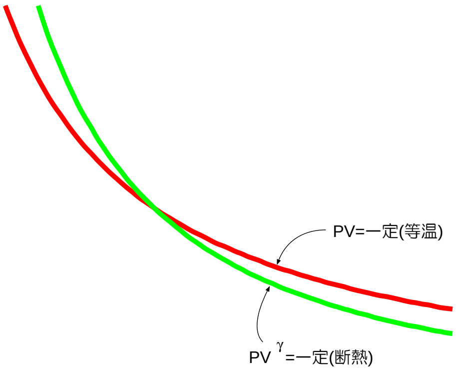
ニュートンも音速の説明を上のように行っている。この結果が実測値と合わない理由は後にラプラスによって解明された。上の説明の間違いは「空気を等温と仮定したこと」である。音がやってくると、空気は圧縮したり膨張したりを繰り返す。圧縮・膨張された空気の温度は一定ではない。これはつまり、「音すなわち空気の振動の伝わる速さは、温度変化の伝わる速度すなわち熱の伝わる速さより圧倒的に速い」ということである（考えてみればあたりまえなのだが、ニュートンですらこういう間違いをする）。

ラプラスは音波が伝播していく時の空気の状態変化は等温過程ではなく断熱過程であるとして計算をやりなおし、実測値に近い音速を導くことができた。

等温過程と断熱過程の違いは、等温であれば $PV=$（一定）となるところが、断熱では $PV^\gamma=$（一定）となることである。ただし γ は比熱比と呼ばれる量で、（定圧比熱）÷（定積比熱）で計算される（空気の場合、γ はほぼ 1.4 である）。これは、断熱圧縮されると温度があがり、その分だけ等温の場合より高い圧力になると考えるとわかりやすい。

[9]圧力の正体は気体の分子の衝突による力積であるから、「引っ張る」ことはあり得ない。低圧の状態（低気圧など）が回りの物体を引っ張り込むように見えるのは、実際には低気圧でない「まわりの大気」が外から押しているのである。

断熱過程とする方が実際に起こっている現象に近い、ということは、音の伝わる速さは熱の伝わる速さに比べてずっと速い、ということを考えると納得できるだろう。



断熱変化だとすると、圧力と体積の関係は $P_0(dx)^\gamma = P(x,t)\left(dx + \frac{\partial y}{\partial x}dx\right)^\gamma$ と修正され、

$$P(x,t) = \frac{P_0}{\left(1+\frac{\partial y}{\partial x}\right)^\gamma} \simeq P_0\left(1-\gamma\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{4.48}$$

となる。つまり圧力差の式が γ 倍されるわけである。結果として波動方程式も

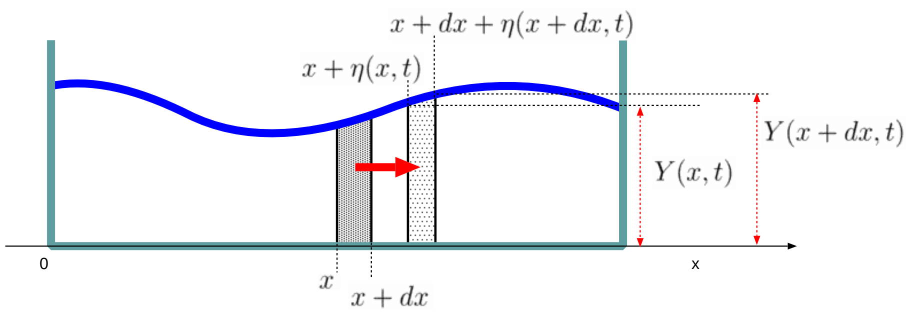
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \gamma\frac{P_0}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) \tag{4.49}$$

となり、音速は $\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$ である。地上の大気の場合の数字を代入してみると、今度は $3.4\times 10^2\mathrm{m/s}$ となって、実測値にたいへんよく合う[10]。

この式を見ると、分母に ρ が入っている。つまり、密度の小さい（軽い）気体ほど、音速が速くなる。ヘリウムを吸ってから声を出すとあひるのような高い声になるが、これは音速が速くなった分、音の振動数が高くなるからである[11]。

4.2.3 水槽の水面波

水槽の水にできる波を考えよう。図のように x 軸を取る。水の運動は鉛直方向と水平方向両方に動く運動となるが、ここでは鉛直方向の運動は無視して考えることにする。実際の水槽の場合、波の波長（山から山への距離）が水面の高さに比べ十分に長く、しかも水面の上下運動の振幅が非常に小さい場合は、水平方向の運動の方が圧倒的に大きくなる。



例によって、振動が起こってないとした場合に位置座標が x から $x+dx$ までの間にあった水の運動を考える。その水の量は密度を ρ として、$\rho h dx$ である。ただし簡単のため、水槽の奥行きは単位長さだとした。h は、波が起こってない時の水面の高さである。水の水平方向変位を $Y(x,t)$ とすると、この水は振動している時は $Y(x,t)$ から $dx+Y(x+dx,t)$ までの間に入っている。

その水の水面の高さ（水槽底面から測る）を $H(x,t)$ とする。すると、水の質量は

$$\rho H(x,t)\left(dx+Y(x+dx,t)-Y(x,t)\right) = \rho H(x,t)\left(1+\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)\right)dx \tag{4.50}$$

であり、これは $\rho h dx$ に等しい (ここでは、水の密度は不変であるとしている)。

鉛直方向の運動を無視して考えるので、$H(x,t)$ の変化は非常に小さく、$H(x,t)=h+\eta(x,t)$ とした時の $\eta(x,t)$ は微小量であるとする。

[10]気柱の場合の境界条件も 2 通りあり得る。端っこが閉じられている場合、気体はその場所で動けないのでそこで $y=0$ となる。すなたち固定端である。一方、端っこが開いていた場合、気体はいくらでも動けることになるが、外の大気圧 P_0 は一定と考えられるから、その場所で $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ となる。これは自由端条件である。現実的には、気柱から出た瞬間に気圧が P_0 で一定になるものではなく、少しずつ気圧の変化が減衰していくことになる。したがって厳密には管の端＝自由端ではなくなる。

[11](音速)=(波長) × (振動数) で、波長は発声器官の形で決まってしまうから、音速が速くなれば振動数が大きくなる。

等式を整理すると、

$$\begin{aligned}\rho H(x,t)\left(1+\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)\right)dx &= \rho h dx\\ (h+\eta(x,t))\left(1+\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)\right) &= h\\ h+h\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)+\eta(x,y)+\eta(x,t)\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t) &= h\\ h\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)+\eta(x,y) &= 0\end{aligned} \tag{4.51}$$

となる。

途中、$\eta(x,t)\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x,t)$ は微小量 η と微小量 Y の微分の積なので 0 とした[12]。

この時の水圧を考えると、水面では大気圧 P_0 に等しい[13]。水槽の底から高さ y の位置は、水面から考えると $H(x)-y$ 低い位置なので、水圧はそれに水の密度 ρ と重力加速度 g をかけた分だけ増加し、$P_0+\rho g(H(x)-y)$ となる。それゆえ、ある位置における水の圧力の横成分は

$$\int_0^{H(x)}(\rho g(H(x)-y))\,dy=\rho g\left((H(x))^2-\frac{1}{2}(H(x))^2\right)=\frac{1}{2}\rho g\,(H(x))^2 \tag{4.52}$$

となる。ここで、圧力のうち P_0 に関係する部分は全く寄与しないので最初から除いている。なぜなら、この力はどのような形をしている物体にも左と右から均等に働くので、後で左右で引き算する時に消えてしまうのである[14]。

この力の差が復元力として働く。位置 x での圧力の総計と位置 $x+dx$ での圧力の総計の差を取って

$$-\frac{1}{2}\rho g\,(H(x+dx,t))^2+\frac{1}{2}\rho g\,(H(x,t))^2=-\rho g H(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}dx \tag{4.53}$$

である。ここでさっき同様に $H(x,t)=h+\eta(x,t)$ とおいて、$\eta(x,t)$ の二次以上の項を無視すると、

$$-\rho g h\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,t)dx \tag{4.54}$$

という力が働くことになる。この力によって、質量 $\rho h dx$ の部分が加速する。運動方程式は

$$\rho h dx\frac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=-\rho g h\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,t)dx \tag{4.55}$$

となるが、ここで (4.51) から $\eta=-h\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x,t)$ となることを使うと、$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=gh\dfrac{\partial \eta}{\partial x}(x,t)$ という方程式になるから、この波は速度 $\sqrt{gh}$ で伝播する。

ここまでの話では速度は密度 ρ が大きくなると遅くなった。これは「重い物ほど動かしにくい」という物理が現れた結果だが、この節で考えた波の場合、ρ は式に入ってこない。これは、今の場合の復元力の源が重力であって、重力の方も ρ に比例するからである。

なお、ここでは水面にできる波の原因を重力と考えたが、実は水面にはもう一つ力が働く。水の表面積をなるべく小さくしようとする力、表面張力である。これも復元力として働く（つまり、水面に凹凸があればそれを解消しようとする）ので、波を作る。

水面に起こる波のサイズが大きい時（たとえば海の波など）は重力の方が主原因であり、波のサイズが小さい時（風呂の水面にできる波など）は表面張力の方が主原因である。これら二つは「重力波[15]」と「表面張力波」と区別する。表面張力波の起こり方は、4.2.1 節で考えた弦の振動とほぼ同じ感じになる。

---

[12] $1.002\times1.003=(1+0.002)\times(1+0.003)=1.005006$ となるが、このうち $0.002\times0.003=0.0000006$ を無視したことに対応する。

[13] 厳密に言えば、大気圧も高さによって違う。水面の深さの違いによる圧力差に比べれば小さい物なので、ここでは無視。

[14] 単純に考えると、左から $P_0H(x+dx,t)$、右から $P_0H(x,t)$ だから差が出ると思うかもしれない。しかし、天井の部分にかかる大気圧は、ちょうどこの差を打ち消すのである。そうなるのは、大気圧のみが働く場合に、どんな物体も全体としては力を受けないと考えれば当然のことである。

[15] 字は同じになってしまうが、一般相対論で出てくる、「重力そのものが振動している波」である「重力波」とは別物。英語だと、「重力が原因で起こる波」は「gravity wave」、「重力そのものが振動している波」は「gravitational wave」である。

4.3　境界条件が違う場合の解

ここまでは、両側（$x = 0$ と $x = L$）での変位が 0 である場合で考えた。これは棒の両サイドががっちりと固定されている（それゆえ、両側が動けない）状況に対応する。これは「**固定端** (fixed end)」境界条件と呼ばれる。

状況を変えて、棒の中心を手で持って支え、両サイドには何の力も加えなかったとしたらどうなるかを考えよう。その場合の境界条件は、まず、手で支えられている中心（$x = \frac{L}{2}$）での変位が 0 になる（$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$）ということである。そしてもう一つ、両端のさらに外側には何もないので、外からは力が働かないという条件がいる。働く力は $K\frac{\partial y}{\partial x}$ であるから、

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0 \tag{4.56}$$

という条件が加わる。これは「**自由端** (free end)」境界条件と言う。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

なお、固定端、自由端以外にも境界条件はいろいろ設定される。重要なものは「無反射境界条件」と呼ばれるもので、端の部分では減衰振動に対応する振動が起こって、反射する波がなくなってしまう（言わば波が運んできたエネルギーがすべて完全に端にある物質に吸収される）という境界条件である。減衰振動が起こるということはそこになんらかの抵抗力が働くようになっているということである。

電子回路などに信号を流すとき、回路の端にあたる部分で反射波が発生すると、それは回路における雑音となってしまうので、「無反射境界」が実現するようにうまく抵抗器などを設置してやる必要がある。そういう意味で無反射境界条件は工学的応用の中で重要である。

【補足終わり】

自由端の場合の解を求めておこう。方程式自体は同じなのだから、解が三角関数または指数関数の形で書かれるのは同じである。固定端の場合では両端 $x = 0, L$ で 0 になれ、という条件から $\sin\frac{n\pi}{L}x$ が選ばれたわけだが、自由端では $x = 0, L$ で微分が 0 になれ、と要求することになる。そのような関数は $\cos\frac{n\pi}{L}x$ である。

なお、もう一つ、$x = \frac{L}{2}$ で 0 という条件を追加すると、$\cos\frac{n\pi}{2} = 0$ という条件がつき、n が奇数であることが要求される（n が偶数なら、$\cos\frac{n\pi}{2} = \pm 1$）。

よって、この場合の解は

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{L}x \times \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}vt + \alpha_n\right) \tag{4.57}$$

ということになる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

4.4　次元解析という便利なツール

ここでもう一つ、波動方程式に限らず、物理に出てくる方程式全てを計算するうえでとても便利な考え方を教えておこう。それは、「定数の次元を勘定することで答えを見積もる」という方法で、「**次元解析** (dimensional analysis)」と呼ばれる。

次元解析の考え方の根底にあるのは「物理で出てくる式は、両辺の次元がそろわなくてはいけない」ということである。次元という言葉が耳慣れない人は「物理で出てくる式は、両辺の単位がそろわなくてはいけない」と考えてもよい。次元は「単位」をさらに抽象化して考えた概念である。たとえば、等加速度運動の式

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{4.58}$$

という式は、x, x_0 に長さの次元 [L]（あるいは長さの単位 [m]）、t に時間の次元 [T]（あるいは時間の単位 [s]）、v_0 に速度の次元 [LT^{-1}]（あるいは速度の単位 [m/s]）、a に加速度の次元 [LT^{-2}]（あるいは加速度の単位 [m/s^2]）を割り当てると、両辺ともに次元 [L]（単位 [m]）になる。たとえば $v_0 t$ は [LT^{-1}][T]=[L] であるし、$\frac{1}{2}at^2$ は [LT^{-2}][T^2]=[L] となる。これを逆に考えると、「次元（単位）がそろうべし」ということから答えの形を有る程度予想することができる。

たとえば単純な単振動の場合を考える。運動方程式 $m\dfrac{d^2}{dt^2}x = -kx$ を思い出すと、運動を表すパラメータは k, m の二つである。よって、たとえば単振動の振動数を求めるとすると、答えは m と k を使って表現されるはずである。振動数は（単位時間あたりの振動回数なので）次元 $[\mathrm{T}^{-1}]$ を持つ。一方、m, k を使って次元 $[\mathrm{T}^{-1}]$ を持つ量を作る作り方は限られてくる。

ばね定数 k の次元は $[\mathrm{MT}^{-2}]$ である。なぜなら、力 $[\mathrm{MLT}^{-2}]$ をばねの長さ $[\mathrm{L}]$ で割ったものであるから（力の次元が $[\mathrm{MLT}^{-2}]$ であるのは、質量 $[\mathrm{M}]$ に加速度 $[\mathrm{LT}^{-2}]$ をかけたものと考えればよい）。質量 M と長さ L がそれぞれ $[\mathrm{M}]$,$[\mathrm{L}]$ の次元を持つのは当然である。この 3 つを使って、振動数の次元 $[\mathrm{T}^{-1}]$ を作るにはどうすればいいか？

答えである $[\mathrm{T}^{-1}]$ のなかに $[\mathrm{M}]$ はないから、質量の次元を消去せねばならない。$\dfrac{K}{M}$ とするとこれは果たされ、次元が $[\mathrm{T}^{-2}]$ となる。速さに必要な $[\mathrm{T}]$ の次数は -1 だから、$\sqrt{}$をとって、$\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ で次元 $[\mathrm{T}^{-1}]$ となってめでたくあう。角振動数は方程式を解いた時の答えはまさにこの値であった。実はこの結果は、計算するまでもなく予想できていたことになる（もっとも、ぴったり一致したのは運がよかっただけのことで、これに $\dfrac{1}{2}$ だの 2π だの、数値係数が前につく可能性もある）。

次元解析は物理を考えるうえで強力なツールであり、いろいろな場面で役に立つ。なぜこのような考え方がうまくいくのか、その理由は以下のように考えることができる。

たとえば SI 単位系では長さの単位にメートル、時間の単位に秒、質量の単位にキログラムを採用しているが、使う単位を変えたとすると何が起こるかを考えてみよう。物理というのはどんな単位を採用しているかにかかわらず成立すべきものである。だから、単位系を変更した時、物理量の間の関係式の左辺と右辺が同じ変更を受けなくてはいけないのである。たとえば、時間の基礎単位を秒から分に変えれば、時間を表す数値はすべて 1/60 になるだろう。この時、速度は（m/s から m/分に変わるから）60 倍になる。加速度は（$\mathrm{m/s^2}$ から m/分 ^{2} に変わるから）$60^2 = 360$ 倍になる。等加速度運動の式 $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$ は、ちゃんと両辺の次元があっており、t が 1/60 倍になると同時に v が 60 倍、a が 3600 倍になれば、両辺が変化しない。物理に出てくるどんな式もこのような関係を満たしている。このようにスケールの変換をした時に左辺と右辺が同じ変換をするためには「次元」がそろっていなくてはいけない。たとえば、

$$x = vt^2 \tag{4.59}$$

のような式があったとすると（もちろんこんな式はないのだが！）、時間の単位を秒から分に変えた時、左辺は変わらず右辺が 1/60 になってしまうことになる。物理の式として、こんな不合理な話はない。

物理において基本となる次元は $[\mathrm{M}][\mathrm{L}][\mathrm{T}]$（場合によってはこれに電荷 $[\mathrm{Q}]$ または電流 $[\mathrm{I}]$ が加わることもある）なので、3 つの互いに独立な次元を持つパラメータがあると、その理論に現れる特徴的なスケールは全部決まることになる。

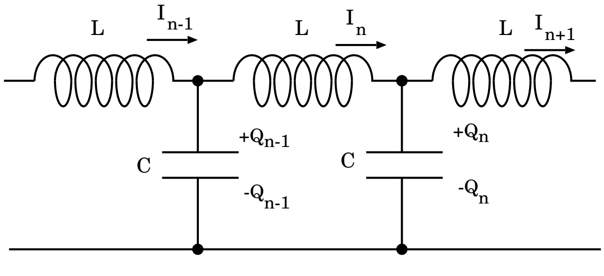
ここまでで計算した波の速度は、次元解析によってある程度の見積もりを出すことができる。たとえば固体を伝わる縦波の場合、実際に計算によって出した波の速度は $\sqrt{\dfrac{\bar{K}}{\rho}}$ であった。実は、$\bar{K}$（ばね定数×長さであるから力と同じ、$[\mathrm{MLT}^{-2}]$ という次元を持つ）という定数と、ρ（単位長さあたりの質量だから、次元は $[\mathrm{ML}^{-1}]$ になる）という定数を使って作ることができる速さの次元 $[\mathrm{LT}^{-1}]$ を持つ量は $\sqrt{\dfrac{\bar{K}}{\rho}}$（およびこの無次元定数倍）のみである。

音速も圧力 P（力を面積で割るので、次元は $[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}]$）と密度（質量を体積であるので、次元は $[\mathrm{ML}^{-3}]$）から作ることができる速さの次元を持つ量は $\sqrt{\dfrac{P}{\rho}}$ である（実際の計算ではこれに $\sqrt{\gamma}$ がかかった）。次元解析は（正確な値は出せないにせよ）、物理現象の見積もりには有効である。

【補足終わり】

4.5　章末演習問題

[演習問題 4-1]



図のようにコイルとコンデンサを組み合わせてたくさんつなげた回路を考える。電流 I_n と電流 I_{n+1} の差 $I_n - I_{n+1}$ は、コンデンサーに流れ込む電流であるから、Q_n の増加率となる。つまり

$$I_n - I_{n+1} = \frac{dQ_n}{dt} \tag{4.60}$$

である。

この式と、図の四角形部分に対してキルヒホッフの法則を立てることでできる式を組み合わせて、Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1} に関する方程式を作ると、

$$Q_{n-1} - 2Q_n + Q_{n+1} = LC\frac{d^2}{dt^2}Q_n$$

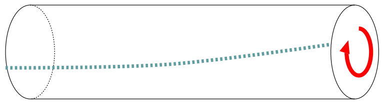
となる。この過程を示せ。

[演習問題 4-2] 前問の方程式が、隣り合うコンデンサーどうしの距離 d をどんどん小さくする極限において波動方程式になることを示し、その波の速度を求めよ。

ただし、コイルの自己インダクタンス L、コンデンサーの静電容量 C はいずれも、d に比例して小さくなっていくものとする[16]。

[演習問題 4-3]

長い円柱の一部にねじるような力を与えた時、このねじりが円柱をどのように伝わっていくかを考えたい。



この円柱のうち、高さ Δx の微小部分を考える。

この微小部分が円筒の中心軸を中心として角度 $\Delta\theta$ だけねじられていたとする。微小部分はねじられていない状態に戻ろうとする復元力を持つ。

この復元力はとなりの微小部分との接合面を通して、となりの微小部分に戻ろうとする力のモーメントを与えるが、そのモーメントは $N=\dfrac{\pi G a^4}{2}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta x}$ であることが知られている（G はずれ弾性率と呼ばれる量である）。またこの微小部分の慣性モーメントは $\dfrac{1}{2}\rho\pi a^2\Delta x$ である。以上から波動方程式をたて、ねじりの波の進む速度を求めよ。

[演習問題 4-4] 弾性体の棒を伝わる縦波を考える。方程式は $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)=v^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$ としよう。一端は固定してもう一端を自由端とした時、どのような振動が起こるのかを求めよ。

[演習問題 4-5] 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}Y(x,t)=v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,t)-M^2Y(x,t)$$

の解を求めよ。

(Hint:$e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ の形の解を仮定する。)

[演習問題 4-6] 電磁波（電場と磁場によってできる波）の速度を次元解析で見積もろう。真空中の電磁気学を考える上で出てくる定数は、真空の誘電率 ϵ_0 と真空の透磁率 μ_0 であろう。それぞれは、距離 r はなれた電荷 Q_1 と電荷 Q_2 の間に働く力 $F=\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ と、距離 r はなれた無限に長い平行な電流 I_1 と電流 I_2 の間に働く力 $F=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{4\pi r}$ (ただし ℓ は、今考えている導線の部分の長さ) で決められている。この二つの式から ϵ_0,μ_0 の次元を決め、速度の次元になる組み合わせを作れ。結果の数字に見覚えはないか ?

[16]電流を伝えるためによく使われる 2 本の導線をたばねたものは、導線の各部各部が言わば小さな静電容量と小さな自己インダクタンスを持つ微小なコンデンサーとコイルの集合体である。電流は導線内を「波」として伝わる。

第5章　１次元波動の進行

この章で学ぶ大事なこと

- **一次元波動の進行**
- **波の接続条件と反射**
- **波の運ぶエネルギー**
- **分散関係、位相速度と群速度の違い**

5.1　一次元波動の進行

前節で考えた波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{5.1}$$

は

$$u(x,t) = F(x+vt) + G(x-vt) \tag{5.2}$$

という解を持った。ここではまず、このような波の進行について考えていこう。

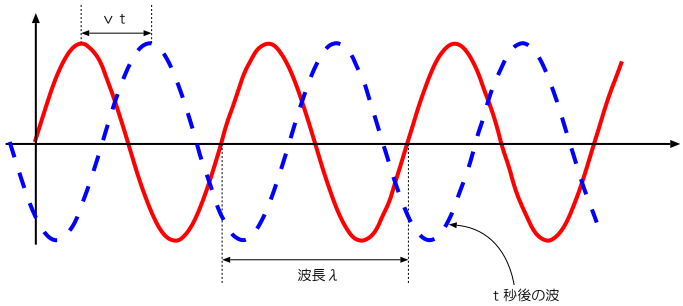
まずは一番単純な波動の形として、

$$u(x,t) = A\sin\left(k(x-vt)+\alpha\right) \tag{5.3}$$

の形を考えよう。この波は、$t=0$ において

$$u(x,0) = A\sin(kx+\alpha) \tag{5.4}$$

という正弦関数の形をしていて、それが速度 v で x 軸正の向きへと進んでいく波である。このような波は「正弦波」と呼ばれる[1]。

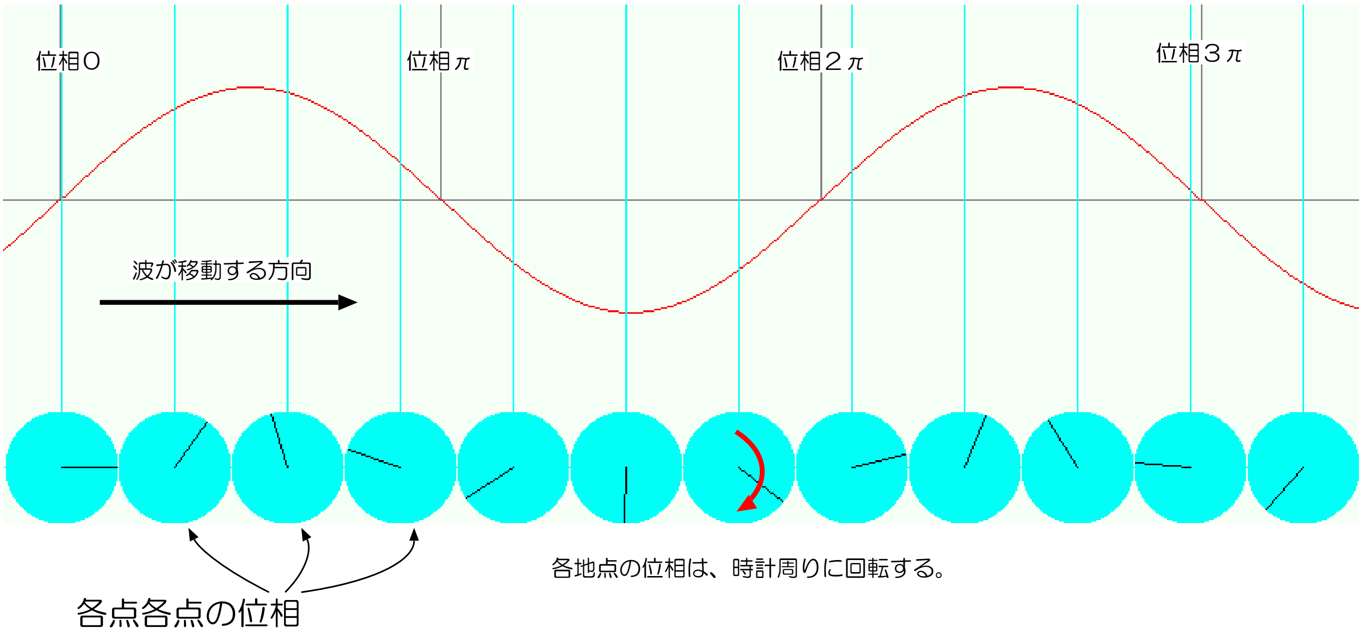


これまでも使ってきた言葉をいくつか整理しておこう。このような形で波を表した時の三角関数の引数[2]を「**位相** (phase)」と呼ぶ。上の式の場合、位相は $k(x-vt)+\alpha$ である。特に $x=0, t=0$ における位相 α は「**初期位相** (initial phase)[3]」と呼ばれる。

位相が 2π 増加すると、三角関数は一回振動する。$t=0$ での位相（kx）を見ると、x が $\frac{2\pi}{k}$ だけ増加すると波が一回の振動分の変化をする。つまり、$\lambda=\frac{2\pi}{k}$ が「波一個の長さ」であり、これを「**波長**」と呼ぶ。

k のことは「**波数**」と呼ぶ。文字では「波の数」と書くが、正確には「単位長さあたり位相の変化」を表現する量である。あるいは、距離 2π の中に入っている波の数だと考えてもよい（$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ であり、λ が一個の波の長さである）。

[1] cos を使って表すこともあるが、その時でも「余弦波」とは言わず「正弦波」と呼ぶ。
[2] 複素数を使って表現した場合ならば、$e^{i\theta}$ のように exp の肩に乗っている量から i を取ったもの。
[3] 「位相定数」という呼び方もある。



上では $t = 0$ というある時刻に着目して考えたが、今度はある一点 $x = 0$ に着目すると、

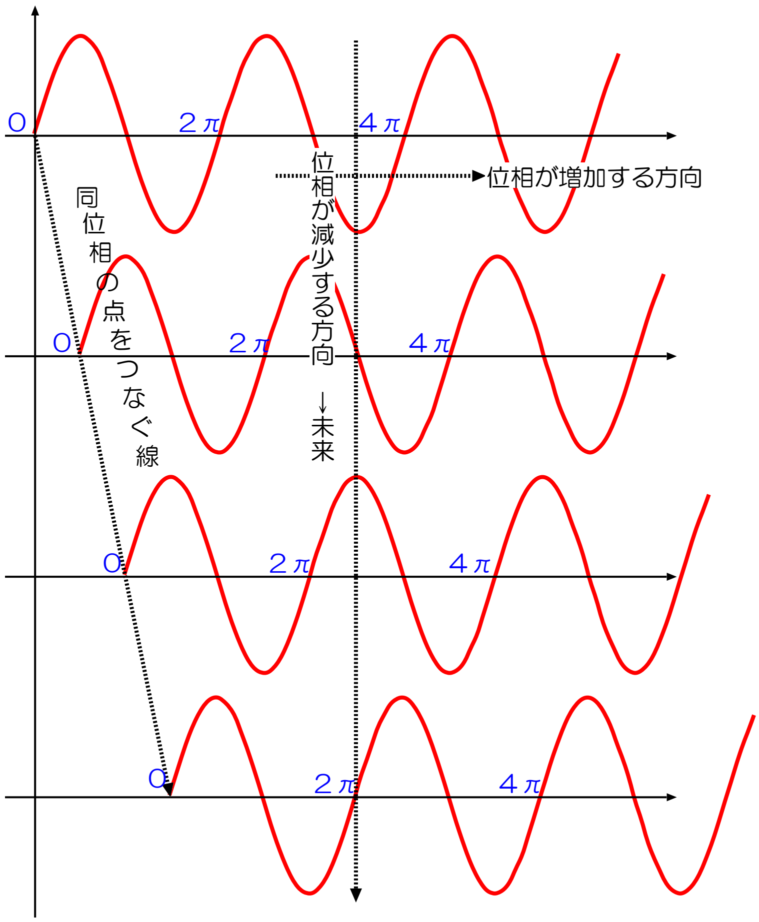
$$u(0,t) = A\sin(-kvt + \alpha) \tag{5.5}$$

である。kv は単位時間あたりに位相がどれだけ変化するかを表す数であり、「**角振動数**」と呼ぶ（文字 ω で表すことが多い）。位相が 2π 変化すると波が一回振動するのだから、$\frac{\omega}{2\pi}$ は単位時間の振動回数、すなわち「**振動数**」であり、この逆数 $\frac{2\pi}{\omega}$ は一回の振動に要する時間、すなわち「**周期**」である。

波の式は

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\ A\sin(kx - \omega t + \alpha) \\ = &\ A\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \alpha\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

などと書くことができる。式 (5.6) の意味するところは、右行きの波の場合、ある時刻に着目すると「場所を移動すると、単位距離進むごとに位相が k 増える（λ だけ進むと位相が 2π 増える）」ということになり、ある一点に着目すると「時間が経過すると位相が単位時間あたり ω ずつ減る（T だけ経過すると位相が 2π 減る）」ということになる。こういうのは公式を（御経のように唱えて）覚えようとするよりも、



位相 2π の変化　＝　距離 λ の移動　＝　時間 T の経過

という関係を頭に入れておいてその都度意味を考えて導き出すようにした方がよい。

以上からわかるように、波の速度と波長と周期の間には、$v=\dfrac{\lambda}{T}$ あるいは、$v=\dfrac{\omega}{k}$ という関係が成立する。ただし、ここで考えた波の速度は一般に「**位相速度** (phase velocity)」と呼ばれるものである。波には他にも速度の定義がある。そのうち重要なもう一つは「**群速度** (groupe velocity)」である。これについては後で解説する。

5.2 正弦波の反射

波がずっと同じ状態で続くのではなく、どこかに「端」があってそこで反射が起こる場合を考えよう。すでに述べたように、この「端」がどのような性質を持っているかによって反射の起こり方は違う。代表的な例は「自由端反射」と「固定端反射」である。

固定端は「端」において合成波の変位が 0 であるという条件であり、自由端は合成波の x 微分が 0 であるという条件である[4]。

固定端、自由端などの端がないならば、波はずっと右（あるいは左）に進行していられる。この場合、方程式の解が $F(x+vt)$ のみだったり $G(x-vt)$ であったりすることが許されるのである。ところが、端（簡単のためここでは $x=0$ としよう）があると、その場所の波の変位もしくはその微分に制限がつく。もし、$u(x,t)=F(x+vt)$ という解を採用したとすると、たとえば固定端条件として $x=0$ で u が 0（つまり、$u(0,t)=0$ という条件をつけてしまうと、それは $F(vt)=0$ ということであって、F は常に 0 ということになってしまう（自由端の場合は $F'(-vt)=0$ となって、F はずっと定数になってしまう)。端での条件を満たしつつちゃんとした解が出るためには、

$$\text{固定端の場合：}F(vt)+G(-vt)=0 \qquad \text{自由端の場合：}F'(vt)+G'(-vt)=0 \tag{5.7}$$

というふうに、F と G 二つの関数の相互関係を使って条件が満たされるようにしなくてはいけないのである。$G(x-vt)=A\sin(k(x-vt)+\alpha)$ という正弦波解の場合、端での条件式は

固定端の場合：

$$F(vt)+A\sin(k(-vt)+\alpha)=0 \tag{5.8}$$

よって、

$$F(x+vt)=-A\sin(k(-x-vt)+\alpha)=A\sin(k(-x-vt)+\alpha+\pi) \tag{5.9}$$

なお、2 こめの等号では、$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ を用いた。

自由端の場合：

$$F'(vt)=-kA\cos(k(-vt)+\alpha) \tag{5.10}$$

より、

$$F'(x+vt)=-kA\cos(k(-x-vt)+\alpha) \tag{5.11}$$

となって、この式の両辺を x で積分して

$$F(x+vt)=A\sin(k(-x-vt)+\alpha) \tag{5.12}$$

となる（積分定数は 0 であるとした。原点を中心とした振動が起こるならば、これは正しい)。

のようにして、$F(x+vt)$ の形を完全に決めてしまうことになる。

ここで、$x=0$ における左行きの波 $G(-vt)=A\sin(-kvt+\alpha)$ と右行きの波 (固定端なら $F(vt)=A\sin(-kvt+\alpha+\pi)$、自由端ならば $F(vt)=A\sin(-kvt+\alpha)$）を見比べると、

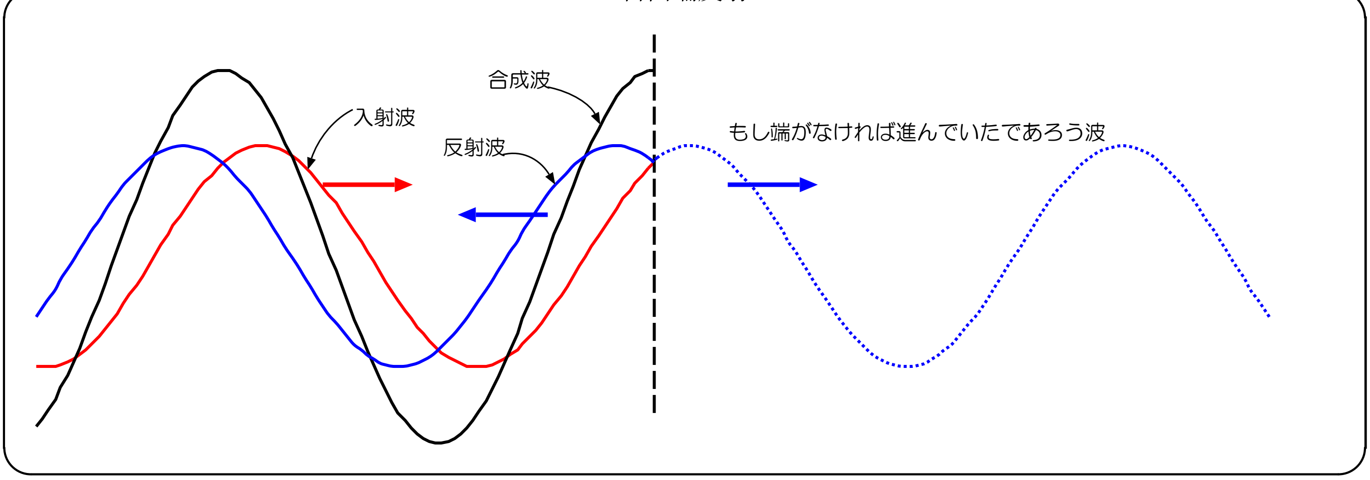
反射による位相差

固定端では、反射の時に波の位相は π だけ増える。自由端では、反射しても波の位相は変化しない。

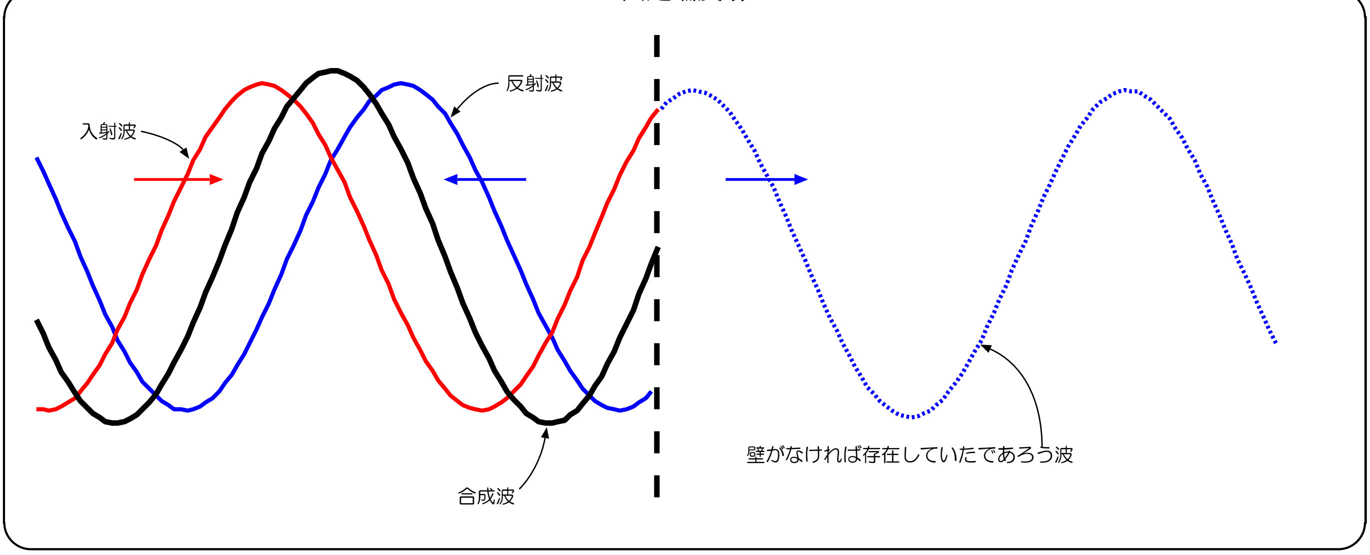
[4]「自由」端は名前に反して「条件がついていない」という意味ではないのである。

ということが言える。「位相が π 増える」という言い方は少しややこしく聞こえるが、$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ であることを考えれば「符号がひっくり返る」ということと同義である。

自由端反射



固定端反射



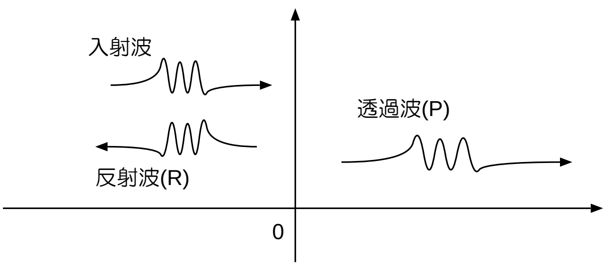
5.3　媒質の違う領域への進入と反射

たとえば光が空気中から水中に進入するとき、あるいは音が暖かい空気から冷たい空気中へと進入するときなど、波はその境界でさまざまな現象を起こす。特に面白いのは屈折現象なのだが、それは 2 次元以上で起こることなので後に回して、1 次元の波の場合でどのようなことが起こるかを考えよう。

非常に簡単な例として、x 座標が負の領域では波数 k の波が、正の領域では波数 k' の波が存在できる（両方とも角振動数は ω とする）場合を考えよう。このような状況で $x=-\infty$ から波が正の方向に進行してきたとする。波の一部は $x=0$ にある境界で跳ね返り、一部は x が正の領域に進入していく。

これを式で表すと、

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t} + Re^{-\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t} & x<0 \\ Pe^{\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega t} & x>0 \end{cases} \tag{5.13}$$



である。計算を単純にするため、入ってくる右行きの波（入射波）を振幅 1 として、$e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ と表現した。反射波は逆向きに進み、

振幅は変化している筈なので、$Re^{-\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ と表現する。x が正の領域に進入していく波は $Pe^{\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega t}$ と書いた。

この時、$u(x=0,t)$ は二つの表現（$x<0$ の領域で考えれば $e^{-\mathrm{i}\omega t}+Re^{-\mathrm{i}\omega t}$、$x>0$ の領域で考えれば $Pe^{\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega t}$）を持つが、この二つは $x=0$ において一致しなくてはいけない（でないと、$x=0$ で u の値が不連続にジャンプしてしまう）。この接続条件から、

$$1+R=P \tag{5.14}$$

という式が出る。また微分 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$ の接続から、

$$\mathrm{i}k(1-R)=\mathrm{i}k'P \tag{5.15}$$

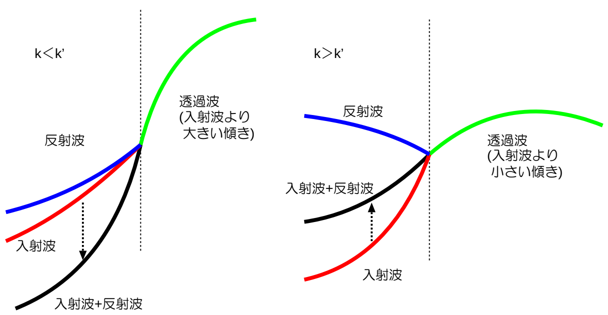
が成立する。この二つを解く。$\mathrm{i}k'\times(5.14)-(5.15)$ により、

$$\mathrm{i}k'(1+R)-\mathrm{i}k(1-R)=0 \qquad \to \qquad R=\frac{k-k'}{k+k'} \tag{5.16}$$

が出るし、$\mathrm{i}k\times(5.14)+(5.15)$ によって、

$$2\mathrm{i}k=\mathrm{i}(k+k')P \qquad \to \qquad P=\frac{2k}{k+k'} \tag{5.17}$$

が出る。



ここで、P は常に正であるが、R は $k>k'$ なら正、$k<k'$ なら負である。

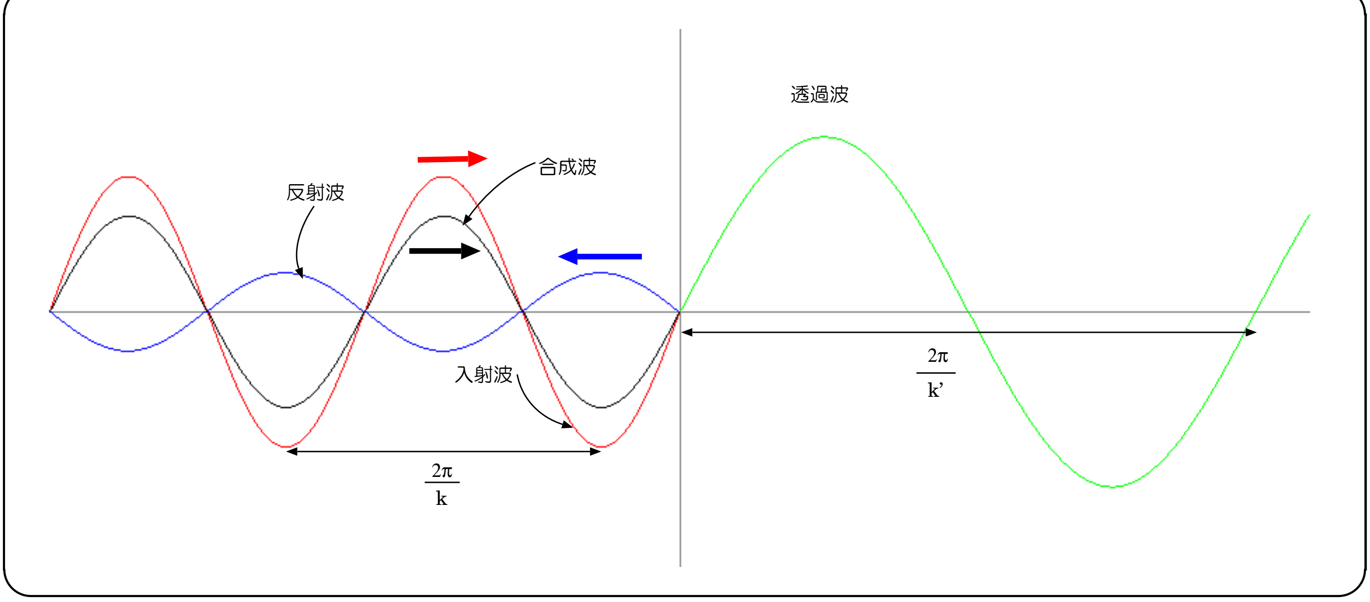
たとえば、光が空気中から水中に入るような場合、水中の方が速度は遅くなる。ω は等しいのに速度 $\frac{\omega}{k}$ が遅くなるということは、水中の方が波数が大きい（つまり、$k'>k$）。この場合、反射波は入射波と逆符号となる（位相が π ずれる）。

$k'>k$ で符号反転し、$k>k'$ ではしない理由をおおざっぱに言うと以下のような説明ができる。

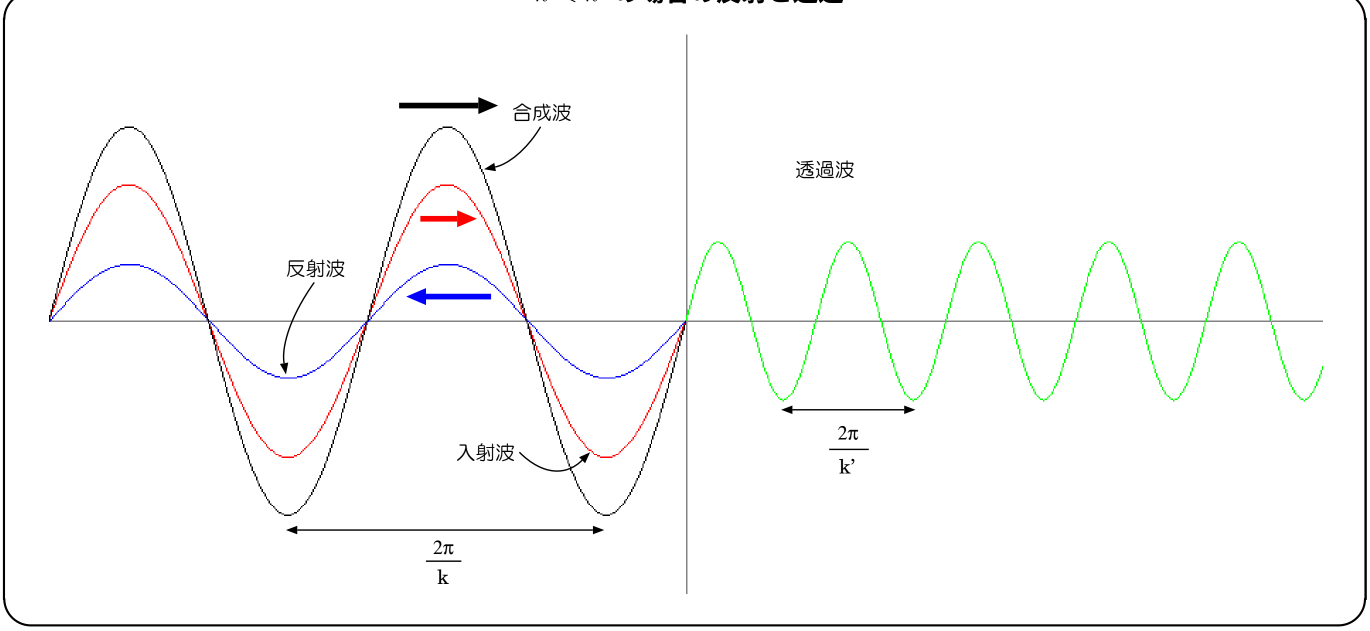
透過波の微係数の絶対値 $k'P=\frac{2kk'}{k+k'}$ は、入射波の傾きの絶対値 k に比べ、$k<k'$ では大きくなり、$k>k'$ では小さくなる。これは、$k<k'$ では波長が短かくなり、波が圧縮された形になる (当然、傾きは増える) ということの反映である。入射波より透過波の方が傾きが急になっているが、合成波 (入射波+反射波) の傾きは透過波と同じでなくてはならない。そのため、反射波は入射波の傾きを強める波でなくてはならない。$k>k'$ では逆に傾きを弱めなくてはならない。

$k>k'$ の場合は自由端反射に似た形の反射が起こるので、境界部分では入射波と反射波が強め合う。境界では透過波は入射波と反射波の合成と同じ動きをするので、結果として透過波は大きな振幅を持つ。

$k > k'$ の場合の反射と透過



$k < k'$ の場合の反射と透過



$k < k'$ の場合を固定端反射に似た形で反射が起こるが、この場合は $k < k'$ でも、境界部分の波は固定されているわけではない。とはいえ、$k > k'$ の場合と逆に入射波と反射波は弱め合うので、透過波の振幅は小さくなる。

まとめると、ここで起こった現象は以下の表のようになる。

波数の関係	波数	波長	速度	反射波の位相	境界で波は
$k > k'$	小さくなる	長くなる	速くなる	ずれない	強め合う
$k < k'$	大きくなる	短くなる	遅くなる	π ずれる	弱め合う

5.4 波の運ぶエネルギー

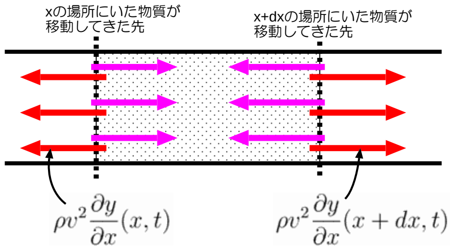
波動方程式 (5.1) ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) で表される波が起こっている時、そこにはどのようなエネルギーが関与しているのかについて考えておこう。以下では縦波を例にとって説明する。$u(x,t)$ が物質の変位であったとしよう。そして、x 方向

単位長さあたりに質量 ρ の物質があるとしよう（つまり、線密度が ρ)。この時、波動方程式の両辺に $\rho\Delta x$ をかけた式

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\rho\Delta x v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{5.18}$$

となる。

この式の意味するところは、この微小部分に働く力が $\rho\Delta x v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ であるということであった。実はこれは、右側（$x+\Delta x$ の位置）では $-\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)$ の圧力（$\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)$ の張力と言っても同じこと）、左側では $-\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ の圧力（$\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ の張力）が働いた結果、その差として



$$\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\rho\Delta x v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\cdots \tag{5.19}$$

として求まったものであった[5]。

つまり今考えている微小部分の中の物体は、右側を $-\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)$ という力で押していることになる。そうしつつ、この物体は $\frac{\partial u}{\partial t}$ という速度で運動するのだから、微小時間 Δt の間に

$$(\text{力})\times(\text{距離})=-\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\times\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Delta t \tag{5.20}$$

だけ、自分の右側にいる物体に対して仕事をすることになる (すでに $\Delta x\to 0$ の極限はとった)。つまり、それだけのエネルギーが右に移動することになる。

今起こっている波動が右行きの時は $u(x,t)=G(x-vt)$ となるので、$\frac{\partial u}{\partial x}=G'(x-vt)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=-vG'(x-vt)$ となり、移動するエネルギーは

$$-\rho v^2G'(x-vt)\times(-vG'(x-vt))\Delta t=\rho v^3\left(G'(x-vt)\right)^2\Delta t \tag{5.21}$$

となり、常に正である。つまり、右行きの波が発生している時はエネルギーも右へ流れている。こうなるということは、媒質が右へ動く時には右向きに、左に動く時は左向きに力を出している（ゆえに、仕事は常にプラスとなる）ことを意味する。

左行きの時（つまり $u(x,t)=F(x+vt)$）の時はエネルギーが左へ流れるということも同様にしてわかる。

再び x から $x{+}\Delta x$ までの間の微小部分を考えると、この部分は微小時間 Δt の間に、右にエネルギーを $\rho v^3\left(G'(x+\Delta x-vt)\right)^2\Delta t$ だけ渡し、左側から $\rho v^3\left(G'(x-vt)\right)^2\Delta t$ だけエネルギーをもらっていることになる。つまり、この部分のエネルギーは、

$$\rho v^3\left(G'(x-vt)\right)^2\Delta t-\rho v^3\left(G'(x+\Delta x-vt)\right)^2\Delta t=-2\rho v^3G'(x-vt)G''(x-vt)\Delta x\Delta t \tag{5.22}$$

だけ増える。この部分の持つエネルギーが $U(x,t)\Delta x$ と書ける（エネルギーの線密度を $U(x,t)$ と定義する）とすれば、

$$\frac{\partial U}{\partial t}\Delta x=-2\rho v^3G'(x-vt)G''(x-vt)\Delta x\Delta t \tag{5.23}$$

である。時間微分したら $-2\rho v^3G'(x-vt)G''(x-vt)\Delta x\Delta t$ ということから、エネルギーの線密度は

$$U=\rho v^2\left(G'(x-vt)\right)^2+\text{（時間によらない定数）} \tag{5.24}$$

と書けることになる。時間によらない定数を0とすれば、この U のうち半分は、ここにある物体の運動エネルギーの線密度 $\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ である。残り半分は $\frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ からくる。これは波を起こす復元力に対する位置エネルギーと解釈できる（ばねの場合の $\frac{1}{2}kx^2$ と同様である。)。前に考えた例では $v=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ という形になっていたことを思い出そう。

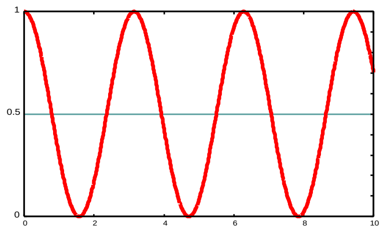
[5]実際の計算では、左から $F+\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)$、右から $F+\rho v^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ のように、同じ力 F が余分にかかっている場合もある。その場合でも最終的な方程式は同じである。

正弦波 $G(x-vt)=A\sin(k(x-vt))$ の場合でエネルギー密度を計算してみると、

$$U=\rho v^2A^2k^2\cos^2(k(x-vt)) \tag{5.25}$$

となる。$kv=\omega$ であることを考えるとこの式は $U=\rho\omega^2A^2\cos^2(k(x-vt))$ と書くことができ、波の持つエネルギーは振動数の自乗と振幅の自乗に比例することがわかる。これは単振動と共通の性質である。また、このエネルギー密度の濃淡は速さ v で移動することもわかる。

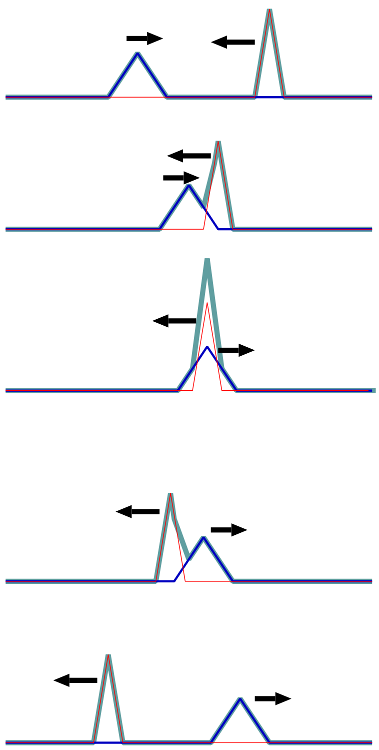
$\cos^2(k(x-vt))$ は、右図のように 0 から 1 までの間を均等に振動するので、長い時間で平均をとると $\dfrac{1}{2}$ となり、波の持つエネルギーの平均値は



$$\bar{U}=\frac{1}{2}\rho^2\omega^2A^2 \tag{5.26}$$

となる。

5.5　波の重ね合わせとエネルギー



すでにのべたように、線型微分方程式には重ね合わせの原理（方程式の解の線形結合もまた、解となる）を満足するという計算上たいへんありがたい性質を持っている。

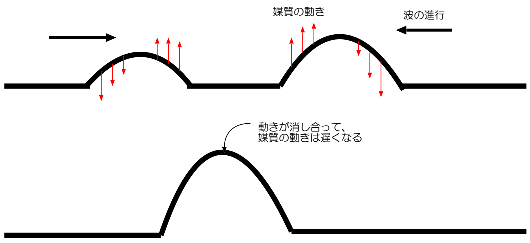
そのため、波に関しても二つ以上の解を適当に組み合わせたものはやはり解となる。たとえば、二つのパルス波が左と右からやってくるような場合を考えると、この二つの波はその後、何の影響も受けないままに通り過ぎる。これは物体の衝突とは全く異なる現象である。なお、水面の波など、その波動方程式が完全に線型ではないが近似の上で線型と取り扱うことができるような場合、厳密にはこの通りにはならない。音や光などはかなり厳密に線型性が成立している。そのため、二人の人間が声をかけあうと、互いの耳には相手の声がちゃんと届く（音と音が衝突して、真ん中で跳ね返ってしまったりしたらたいへんだ）。

左のように二つの波が重なっている時、エネルギーはどのようになっているのであろうか？—先に述べたように、変位 $u(x,t)$ をもって運動している時には、運動エネルギー $\dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ と、位置エネルギー $\dfrac{1}{2}\rho v^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ がある。二つの波 $F(x+vt)$ と $G(x-vt)$ が重なって $u(x,t)=F(x+vt)+G(x-vt)$ となっている時のエネルギーを計算してみると、

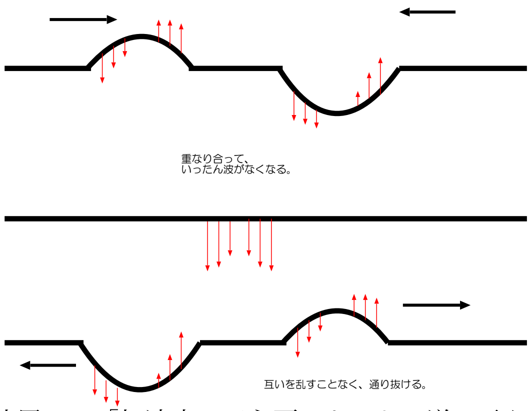
$$\begin{array}{lll}
\text{運動エネルギー} & \frac{1}{2}\rho\left(vF'(x+vt)-vG'(x+vt)\right)^2= & \frac{1}{2}\rho v^2\left((F')^2-2F'G'+(G')^2\right)\\
\text{位置エネルギー} & \frac{1}{2}\rho v^2\left(F'(x+vt)+G'(x+vt)\right)^2= & \frac{1}{2}\rho v^2\left((F')^2+2F'G'+(G')^2\right)\\
\text{総エネルギー} & & \rho v^2\left((F')^2+(G')^2\right)
\end{array} \tag{5.27}$$

となって、左行きの波と右行きの波のエネルギーは完全に分離することになる。

上の足し算の中身を見てみると、二つの波が足し算されて合成波の位置エネルギーが二つの波の位置エネルギーの和より大きくなる時には運動エネルギーがむしろ小さくなっていることになる。これは波の媒質の上下運動が消し合っているという状況に対応する。



右の図を見れみよう、左行きの山と右行きの山が重なって大きな山となった時（この時はもちろん位置エネルギーが非常に大きくなっている）には、合成波の媒質の運動がむしろ遅くなる（速度の和が 0 に近づく）。今の場合、合成する前の波の媒質が持っていた速度が逆向きに重なり合ったことを図から確認できるだろう。この場合、位置エネルギーが大きくなった分運動エネルギーが小さくなって、トータルエネルギーは保存されているのである。



逆向きで同じ大きさの波の通過を描いたのが右の図である。この場合、逆向きの波が通り抜ける間足し算されるので、一瞬波が消えてしまう状況ができる。波の振幅が 0 になったということは位置エネルギーは 0 になってしまった。しかし、この時は運動エネルギーが大きくなっているためにやはりトータルエネルギーは保存している。

「真ん中で波が消えてしまうのに、どうしてまた左右に進む波が現れるのですか？」という疑問を持つ人が多いので、ここで説明しておこう。ポイントは『時間に関して二階微分を含む方程式では、「今現在の値」と「今現在の一階微分の値」を決めて始めて、今後の運動が決まる』ということである。ここで考えているタイプの波動方程式[6]はもちろん時間に関して二階微分方程式である。ニュートンの運動方程式 $\vec{F}=m\dfrac{d^2}{dt^2}\vec{x}$ も時間に関して二階の微分方程式であるが、運動を決定するには「初期位置」と「初速度」が必要であった。逆に言うと「今現在の値」だけでは、今後の運動を決めることはできないのである。

つまり、一見して「波が消えているように見える状況（右図の真ん中）」では、媒質が高速で運動しているのであるから、それで運動が終わってしまったりはしないのである。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

古典力学の基本方程式であるニュートンの運動方程式が時間に関して二階微分方程式なので、古典物理のあらゆるところに二階微分方程式が現れる。

なお、電磁気学の基礎方程式であるマックスウェル方程式は時間に関して一階微分方程式であるが、たとえば電場のみ、磁場のみの方程式を作ると時間に関して二階となる。また、ベクトルポテンシャルというものを使って書き直した場合も二階微分方程式となる。

三年次で学習する量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式は時間に関して一階の微分方程式である（空間に関しては二階微分なので、復元力はある）。ゆえに、量子力学では初期値がわかれば全てがわかる、ということになっている。実は量子力学は古典力学を含んでいる。いったいどうやって一階微分方程式で表される量子力学の中に二階微分方程式で表される古典力学が入ることができるのか、ということは量子力学と古典力学の違いについて考える時に重要な視点になる（が、それについて解説するのは量子力学の講義に任せる）。

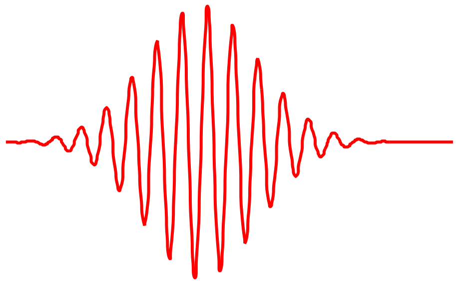
三階以上の微分方程式を基礎方程式とするような物理理論は、今のところなさそうである。

【補足終わり】

5.6　波の位相速度と群速度

$u(x,t)=A\sin\left(kx-\omega t+\alpha\right)$ という式を書いたが、このような波は現実には存在しないということを注意しておこう。この式を文字通り解釈すると、宇宙の端（$x=-\infty$）から宇宙の端（$x=\infty$）まで、同じ振幅 A で波が存在していることになる。しかし、そのためには宇宙の始まりからずっとこの波が存在していなくてはいけない。現実に起こる波はたいてい「始め」や「終わり」のある、部分的な波であることを忘れてはいけない。数式の上で計算する時には、この無限に続く波で考えた方が楽であるために使われている。

[6]物理現象の多くで現れる波動方程式は、このタイプである。



では、現実的な波として、右の図のように一部分で振動が起こっているような状態を考えよう。このように複雑な（単なる三角関数で表すことができない）波も、いろんな波長の三角関数の和の足し算（線形結合）で表現することができる。そして大事なことは、このような波の塊（「**波束** (wave packet)」と呼ばれる）の速度を考えると、先に考えた速度（位相速度）と一致しない場合があるのである。

もし、波動方程式が (5.1) であったならば、この方程式を満たす波動はどんな波長の波であっても全て速さ v で伝播していくので、波の形が変わることないままに進んでいく。これは、解の形 $F(x+vt)+G(x-vt)$ を見てもわかる。しかし、波によっては波長や振動数に応じて波の速度が変化する場合があり、その時は波の形は伝播するに従って変化していく。

まず、単色波（１種類の波長の波しか入っていない場合）について考えよう。位相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{k}$ は $\sin(kx-\omega t)$ で表される波の、同位相の点がどのように動いていくかを示す速度である。

位相速度は「波の塊の動く速度」とは一致しないことがある。そもそもこの節の最初に述べたように、$A\sin(kx-\omega t)$ という波は、宇宙の端から端まで常に同じ振幅 A で振動している波であって、波の「塊」になっていない。つまり波束を作るには単色波ではだめで、いろんな波長の波 (いろんな k の波) を足し合わせて「塊」を作らなくてはいけない。

たくさんの波長を重ね合わせるのは計算もたいへんなので、後に回して、まずはもっとも簡単な例として、２種類の波長の波の和を考えよう。波数 $k-\Delta k$ で角振動数 $\omega-\Delta\omega$ の波と波数 $k+\Delta k$ で角振動数 $\omega+\Delta\omega$ の二つの波を重ねてみる。この二つの波を同じ振幅として足す。$\Delta k,\Delta\omega$ は、それぞれ k,ω に比べて小さいとして考える。ほんの少しだけ波数と振動数に差がある二つの波を合成するわけである。

このような計算の時には複素表示を用いるのが楽なので、いったん複素化して計算しよう。ふたつの波は $e^{\mathrm{i}((k-\Delta k)x-(\omega-\Delta\omega)t)}$ と $e^{\mathrm{i}((k+\Delta k)x-(\omega+\Delta\omega)t)}$ と書ける（簡単のため、振幅は両方とも１とした）。この和を計算する。

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}((k-\Delta k)x-(\omega-\Delta\omega)t)}+e^{\mathrm{i}((k+\Delta k)x-(\omega+\Delta\omega)t)} &= e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}e^{-\mathrm{i}(\Delta kx-\Delta\omega t)}+e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}e^{\mathrm{i}(\Delta kx-\Delta\omega t)} \\
&= e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\left(e^{-\mathrm{i}(\Delta kx-\Delta\omega t)}+e^{\mathrm{i}(\Delta kx-\Delta\omega t)}\right) \\
&= 2e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\cos\left(\Delta kx-\Delta\omega t\right)
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

となる。複素数を使ったことの御利益の一つは、１行目で $e^{A+B}=e^Ae^B$ を使って k,ω に関係する部分と $\Delta k,\Delta\omega$ に関係する部分を分離できたこと、さらに２行目で二つの波を $e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ の同類項としてまとめてしまえたことである（複素数を使わずに三角関数でやると、このあたりがけっこう面倒である）。

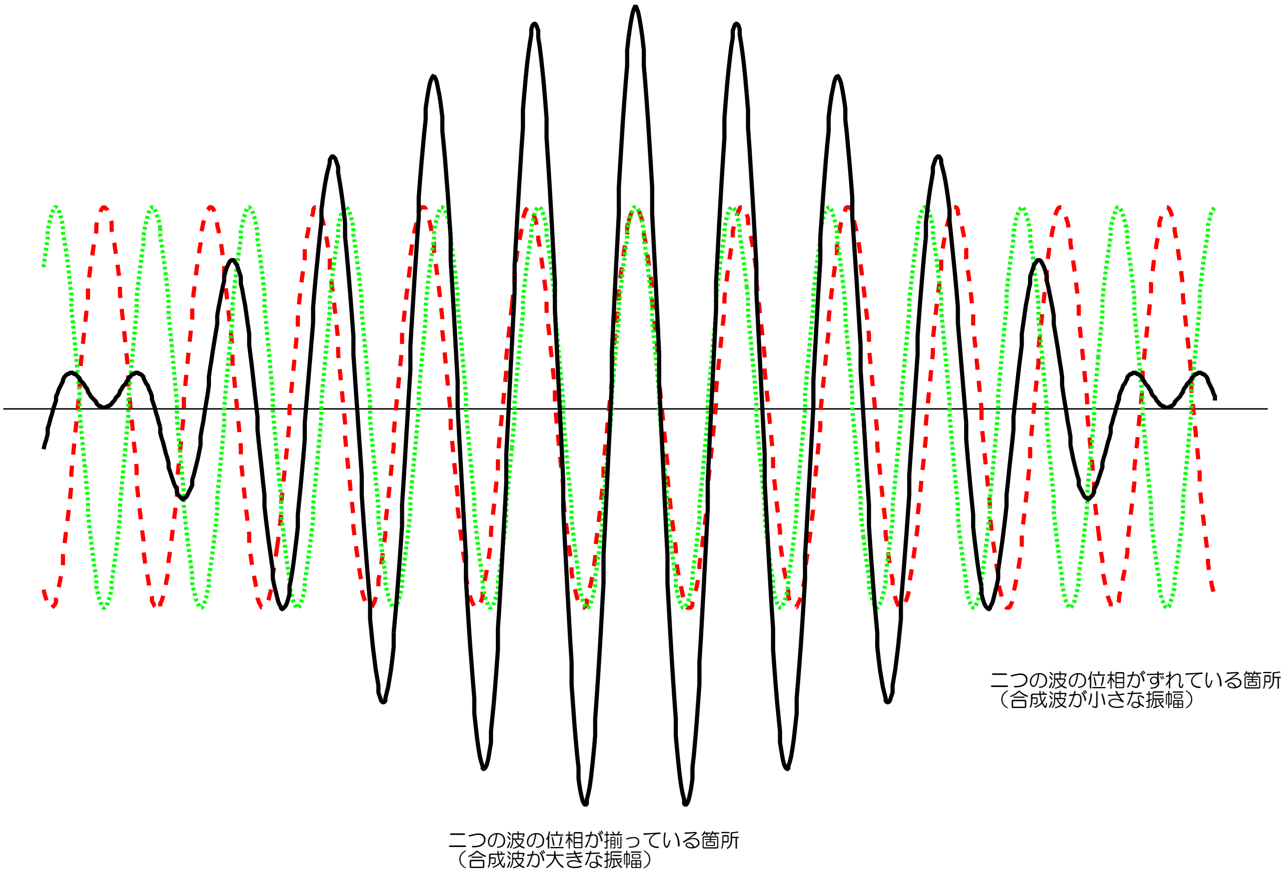
この結果は二つの波 $e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ と $2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$ のかけ算である。

$e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ の方は波数 k であるから波長 $\dfrac{2\pi}{k}$ であり、$2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$ の方は波数 Δk であるから波長 $\dfrac{2\pi}{\Delta k}$ の波である。つまり、$2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$ の方が長い波長の波である（Δk は k よりかなり小さいとしたから）。

この波の実数部分をグラフ化して示したのが次の図である。図の中央部分では二つの波（点線と破線）の山と山、谷と谷が揃うことによって大きな振幅の合成波（実線）ができている。しかし、二つの波の波長は少しだけ違うため、図の端ではむしろ山と谷、谷と山が重なり、合成波の振幅は小さくなる。

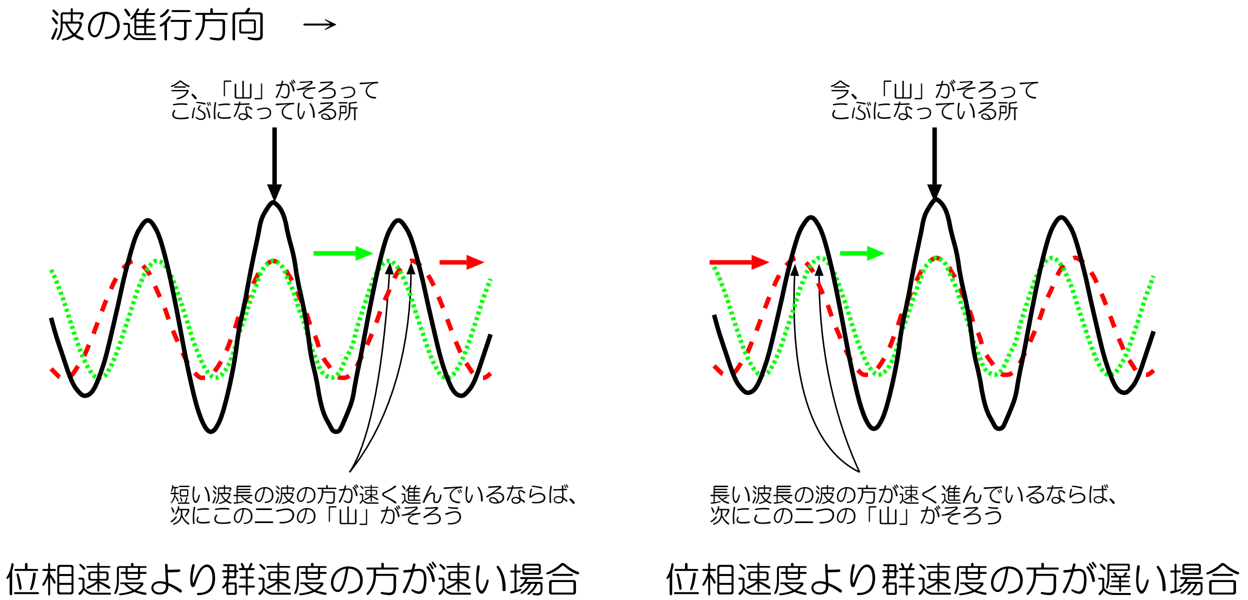
これによって、この波は中央に「塊」を持つ波になっている（なお、式の上ではこの波はやはり無限にこのパターンを繰り返している）。

この波はいわば、平面波 $e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ の振幅が $2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$ に応じて変化していると考えることもできる。そしてこの振幅の変化は $\dfrac{\pi}{\Delta k}$ の幅の「波のこぶ」を作る。そのこぶは $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ という速度で進行していくことになる。そのことは式の上で $2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)=2\cos\left(\Delta k\left(x-\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right)$ と表現されていることからわかる。



この「波のこぶ」の進む速度を v_g と書こう。v_g の事は、「波の塊（グループ）の速度」という意味で、群速度 (group velocity) と呼ぶ。

今、二つの単色波を足したわけであるが、それぞれの位相速度は $\frac{\omega-\Delta\omega}{k-\Delta k}$ と $\frac{\omega+\Delta\omega}{k+\Delta k}$ である。この二つの位相速度が違う場合、群速度はどちらとも一致しない。



群速度と位相速度が違ってくる理由は、上の図を見るとわかる。まず、今「こぶ」になっているところ、つまり山と山が重なって高い山が出現している場所を考えよう。二つの単色波の位相速度は違っているから、次には違う場所で山

と山が重なることになる。言わば「こぶ」の部分は元々の二つの波の頭から頭へと飛び移っていくことになり、それがゆえに二つの波の頭が進む速さより速くなる（後ろ向きに飛び移っている場合＝図の右側の場合は、遅くなる）。

波長の短い波の方が位相速度が速い場合（これはつまり、k が大きいほど位相速度が速い場合）、次に重なる山は今重なっている山よりも前（図の右）にある。ということは、単色波が動くよりも速く、波のこぶ部分が動くことになる。つまり群速度の方が位相速度より速い。

逆に波長の長い波の方が位相速度が速い場合は、次に重なる山は今重なっている山よりも後ろであり、群速度は位相速度より遅くなる。

もう少し一般的に、二つ以上のたくさんの波が重なって波束を作っている場合を考えよう。ある波の塊が

$$\int dk f(k) e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega(k)t} \tag{5.29}$$

のように、いろんな k を持つ波の和で書かれているとしよう。$f(k)$ は、いろんな k の波をどの程度の重みをもって足し算していくかを表す関数である。ここで、ω を $\omega(k)$ と書いて k の関数であるとした。ω と k にはなんらかの関係があるのが普通である。

この波が $k=k_0$ を中心としたせまい範囲でだけ $f(k)\neq 0$ であるような波だとする。そのような時は

$$\omega(k)=\omega(k_0)+\frac{d\omega}{dk}(k-k_0)+\cdots \tag{5.30}$$

と展開して、$\cdots$ で示した $(k-k_0)^2$ のオーダーの項は無視できる。それを (5.29) に代入すると、

$$e^{\mathrm{i}k_0x-\mathrm{i}\omega(k_0)t}\underbrace{\int dk f(k) e^{\mathrm{i}(k-k_0)x-\mathrm{i}\frac{d\omega}{dk}(k-k_0)t}}_{x-\frac{d\omega}{dk}t\text{ の関数}} \tag{5.31}$$

となる。この後ろの部分は $x-\dfrac{d\omega}{dk}t$ の関数になっているので、これを $F(x-\dfrac{d\omega}{dk}t)$ と書くと波は

$$e^{\mathrm{i}k_0x-\mathrm{i}\omega(k_0)t}F(x-\frac{d\omega}{dk}t) \tag{5.32}$$

と書ける。さっきやった二つの波の足し算の式で言うと、$2\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$ に対応する部分が $F(x-\dfrac{d\omega}{dk}t)$ である。

つまり、今考えた重ね合わされた波は、場所によって違う振幅（$F(x-\dfrac{d\omega}{dk}t)$）を持っている、$e^{\mathrm{i}k_0x-i\omega(k_0)t}$ で表される波であると近似して考えることができる。

この振幅の部分は $F(x)$ という関数を x 方向に $\dfrac{d\omega(k)}{dk}t$ だけ平行移動させたもの、と考えることができる。ゆえに、この振幅は

$$v_g=\frac{d\omega(k)}{dk} \tag{5.33}$$

という速度をもって移動していることになる。

なお、$\omega=vk$ として v が定数である時は、位相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{k}$ も、群速度 $v_g=\dfrac{\omega}{k}$ も、どちらも定数 v となり一致する。この場合は位相速度が k によらず一定である。この時には先に図で説明した「次の山へと飛び移る」ということが起こらないのである。

結局 ω と k がどんな関係を持っているかで波の群速度は決まる。そして、$\omega=vk$ の時には群速度と位相速度が一致し、波は形を変えることなく進む。よって、ω と k の関係 $\omega=f(k)$ のことを「**分散関係** (dispersion relation)」と呼ぶ。分散関係が $\omega=vk$ のような1次式の関係（線型）でない時、波は「分散」するわけである。

真空中の光であるとか、弦の振動などの場合、分散関係は線型であって、群速度と位相速度に差はない。物質中では光の速度は波長により変化するので、分散が起こる (プリズムにより白色光がスペクトル分解されるのも分散現象の例である)。

何度か述べたように、現実の我々が観測する波はすべて有限の範囲にのみ存在する「波束」なのであるから、群速度を知ることは非常に大事である。たとえば波をつかって情報を送る（ラジオやテレビもその一種）時、情報が伝えられる

速度は位相速度ではなく群速度である[7]。たとえば金属の管の中を通る電磁波の場合、位相速度が真空中の光速を越えることがあるが、その場合でも群速度は決して光速を超えない（光速以上の速度で情報を伝達することは不可能である）。

N 個のおもりをつなげた連成振動の場合、

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^{N} A_p \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{np\pi}{N+1} \sin \left(\left(2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{p\pi}{2(N+1)} \right) t + \alpha_p \right) \tag{5.34}$$

という解であったが、この場合 x に対応するのは $n\Delta x$ であるから、波数は $\frac{p\pi}{(N+1)\Delta x}$ であり、角振動数は $2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{p\pi}{2(N+1)}$（この式の k は波数ではなくばね定数）である。

波数に K を用いると、

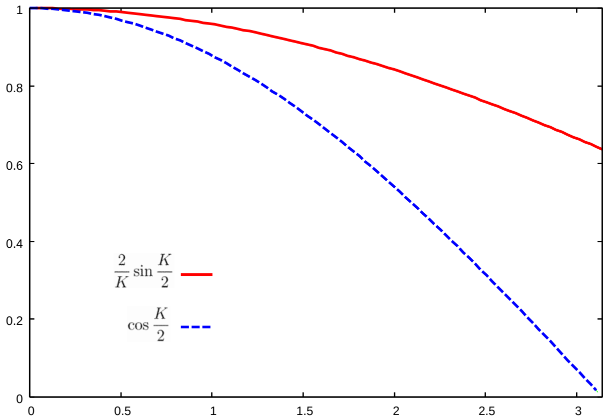
$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{K\Delta x}{2} \tag{5.35}$$

という関係になっている。

位相速度と群速度は

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{K} = \frac{2}{K}\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{K\Delta x}{2}, \\ v_g &= \frac{d\omega}{dK} = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \frac{K\Delta x}{2} \end{aligned} \tag{5.36}$$

となる。$p = 1, 2, \cdots, N$ だったので、波数 K は最大でも $\frac{N\pi}{(N+1)\Delta x}$ であって $\frac{\pi}{\Delta x}$ を越えない。$\Delta x, k, m$ をすべて 1 として、横軸 K、縦軸を v_p および v_g としてグラフを書いたのが右である。波数が大きくなるほど群速度と位相速度は小さくなっていくが、群速度の方がより遅い。



5.7　章末演習問題

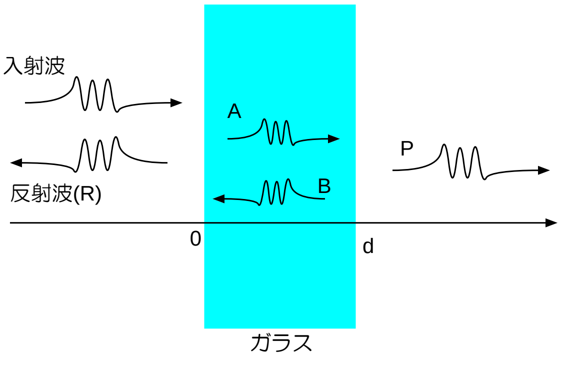
[演習問題 5-1] 5.3 節で考えた問題で入射波、反射波、透過波の運ぶエネルギーをそれぞれ計算し、エネルギー保存則が成立していることを確認せよ。

[演習問題 5-2] 波動方程式が $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ ならば、この波は位相速度も群速度も v となる。では、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u - M^2 u$$

の時は位相速度と群速度はどのようになるか。

[演習問題 5-3] 厚さ d のガラスに、ガラス面と垂直に入射する光を考える（この問題は 1 次元波動として扱うことができる）。光の波長が、空気中では λ、ガラス中では λ' とする（$\lambda > \lambda'$）。図の左から光が入ったとすると、領域 *I*（空気中）と領域 *II*（ガラス中）には左行き、右行き両方の光が存在するが、領域 *III*（空気中）には右行きの光しか存在しない。



[7]量子力学では、全ての物質が波動性を持つことになるが、その時「物質」であるところの粒子の運動速度に対応するのは、群速度の方である。

それぞれの場所での光の変位（実際には光の変位に対応するのは、その場所に存在している電場である）を

$$
\begin{array}{lll}
\text{領域 } I & e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}+Re^{-\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t} & (x<0) \\
\text{領域 } II & Ae^{\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega t}+Be^{-\mathrm{i}k'x-\mathrm{i}\omega t} & (0<x<d) \\
\text{領域 } III & Pe^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t} & (d<x)
\end{array}
$$

のように式で置こう（R,A,B,P は複素定数）。実際に存在する波はこの関数の実部である。波数 k は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$、k' は $\dfrac{2\pi}{\lambda'}$ である。

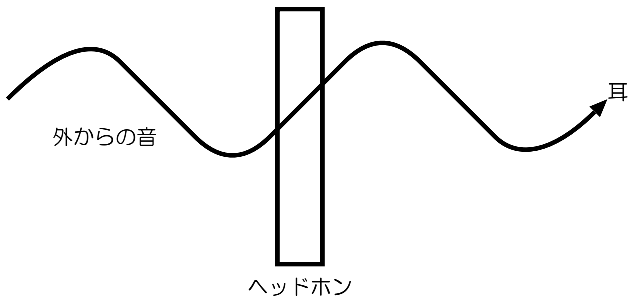
(1) 境界（$x=0, x=d$）で満たすべき条件を求めよ。

(2) 反射がなくなってしまう条件 ($R=0$ になる条件) を求めよ。

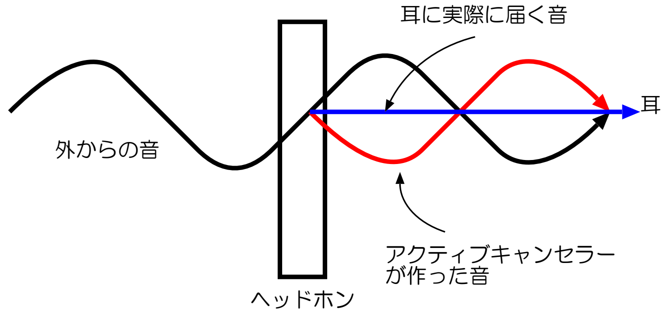
註：このようにして特定の波長の光の反射を軽減する技術は実際に使われている。

[演習問題 5-4] アクティブノイズキャンセラーという雑音を消すシステムがあり、ヘッドホンなどに採用されている。これは、外部から雑音がやってきた時、ヘッドホンがちょうど雑音と逆位相になる音を発生させ、耳に外からの雑音が届かなくするシステムである。

アクティブキャンセラーがない時



アクティブキャンセラーがある時



この話を聞いたA君は次のような疑問を持った。

> **「ヘッドホンが雑音を消すような音を作ったということは、その時エネルギーを消費したことになる。結果として音が消えてしまうということは、外から来た音のエネルギーと、どこかへ消えてしまったことになる。ということは音に関してはエネルギー保存則は成り立たないのだろうか？」**

A君の疑問に答えてください。数式を使って具体的に説明すること。
（註その１：こういう疑問が生まれるのは、実は上の図が不完全だからです）。
（註その２：実際には３次元的に考えなくてはいけない問題ですが、１次元波動として回答してください）

[演習問題 5-5] 波動の持つ運動エネルギーと位置エネルギーを考えると、波動に関する作用は、

$$
I=\int dt\int dx\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)
$$

となり、これに対する変分原理からも波動方程式を導ける。上の I の $u(x,t)$ に $u(x,t)+\delta u(x,t)$ を代入したものと元の I との差を取り、$\delta u(x,t)$ が微小であると近似した上でその差が 0 となる条件が波動方程式になることを示せ。

第6章　２次元・３次元の波動

この章で学ぶ大事なこと

- **２次元、３次元の波動方程式**
- **２次元、３次元波動の反射・屈折**

6.1　２次元・３次元の波動方程式

２次元および３次元に行く前に、もう一度１次元の波動方程式を見直そう。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{6.1}$$

であった。この式の左辺は運動方程式同様、「加速度」を表現する。右辺はしたがって波の媒質にあたる物質の単位質量あたりに働く「力」を表現している。x の二階微分は媒質の「曲がり」を表現する量であり、力は「曲がり」を是正する方向に働く（復元力）。v が大きいほどその単位質量当たりに働く復元力が相対的に強いと考えればよい。

これを素直に２次元に拡張するならば、

$$\frac{\partial}{\partial t^2}u(x,y,t)=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y,t) \tag{6.2}$$

３次元に拡張するならば、

$$\frac{\partial}{\partial t^2}u(x,y,z,t)=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z,t) \tag{6.3}$$

となるだろう。この二階微分演算子

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{6.4}$$

（括弧内は３次元の時のみ付加）は「**ラプラシアン** (Laplacian)」と呼ばれる。ラプラシアンは力学でも電磁気でも量子力学でも、物理のあらゆるところに顔を出すが、それは場所の関数であるような物理量が後で述べる性質を持っていることが多いからである。

また、方程式 (6.3) は

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)u(x,y,z,t)=0 \tag{6.5}$$

と書き直すこともできるが、この演算子 $\Box=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle$ は「**ダランベルシャン** (D'Alenbertian)」と呼ばれる[1]。

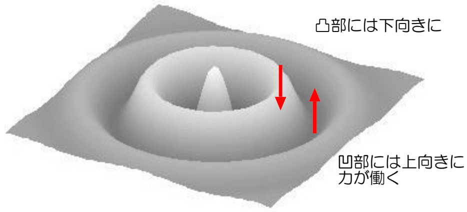
１次元のラプラシアン（つまりは二階微分演算子）は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)+f(x-\Delta)-2f(x)}{(\Delta)^2} \tag{6.6}$$

とも書ける。

[1] ラプラシアンはラプラス (Laplace) の、ダランベルシャンはダランベール (d'Alembert) の名にちなむ。どちらも数学と物理学に大きく貢献したフランス人学者である。

この力は両隣（$f(x+\Delta)$ と $f(x-\Delta)$）の平均 $\dfrac{f(x+\Delta)+f(x-\Delta)}{2}$ と自分 $f(x)$ の差に比例する。これを 0 にするような復元力が働くということは、すなわち「自分は回りの平均でいたい」という傾向を今考えている媒質が持っているということになる。



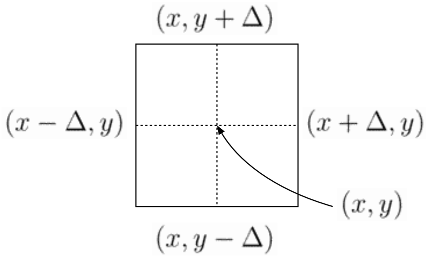
2 次元ではどうだろう。この場合のラプラシアンは x 方向の二階微分と y 方向の二階微分の和であるから、それぞれの方向において平均と中央の値との差をとるという計算がされる。

具体的な計算結果は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta,y)+f(x-\Delta,y)+f(x,y+\Delta)+f(x,y-\Delta)-4f(x,y)}{(\Delta)^2} \tag{6.7}$$

となる。

この式は自分の四方（$f(x+\Delta,y)$ と $f(x-\Delta,y)$ と $f(x,y+\Delta)$ と $f(x,y-\Delta)$）の平均と自分 $f(x,y)$ の差に比例する。これに比例する力が働くということは、やはり「自分は回りの平均でいたい」という方向へと状態を動かそうとする傾向を持つのである。



3 次元でも同様で、ラプラシアンをかけるということは、「上下左右前後の 6 つの場所の平均」と「自分自身」との差を計算することになる。具体的には、

$$\begin{aligned}\triangle f(x,y,z)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{(\Delta)^2}\Big[&f(x+\Delta,y,z)+f(x-\Delta,y,z)+f(x,y+\Delta,z)+f(x,y-\Delta,z)\\&+f(x,y,z+\Delta)+f(x,y,z-\Delta)-6f(x,y,z)\Big]\end{aligned} \tag{6.8}$$

となる。

なお、$u(x,y,z,t)=U(x,y,z)e^{-\mathrm{i}\omega t}$ の形の解を仮定すると波動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t^2}U(x,y,z)e^{-\mathrm{i}\omega t}&=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U(x,y,z)e^{-\mathrm{i}\omega t}\\-\omega^2U(x,y,z)&=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U(x,y,z)\end{aligned} \tag{6.9}$$

という方程式になる。略記すると

$$-\frac{\omega^2}{v^2}U=\triangle U \tag{6.10}$$

となるが、このような形の方程式をヘルムホルツ方程式と呼ぶ[2]。ヘルムホルツ方程式は、特定の振動数をもって振動する波について解析する時の基本方程式となる。

6.1.1　平面波解

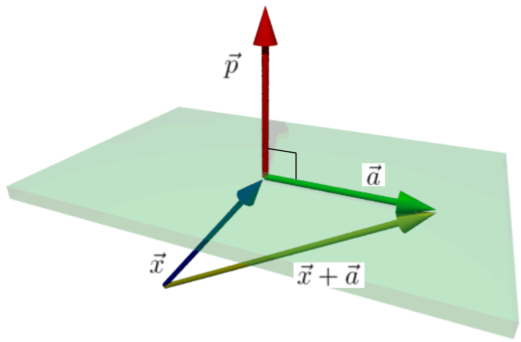
ヘルムホルツ方程式の一般解を出しておこう。やはり定数係数の線型微分方程式なので、$u(x,y,z,t)=e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t}$ と解を仮定することができる（どうせ振動解になるだろう、ということで最初から exp の肩を虚数にした）。これを方程式に代入すると、

$$-\frac{\omega^2}{v^2}e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t}=-(p^2+q^2+r^2)e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} \tag{6.11}$$

となるので、$\omega=\pm v\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ を満たせばこの方程式の解となる。

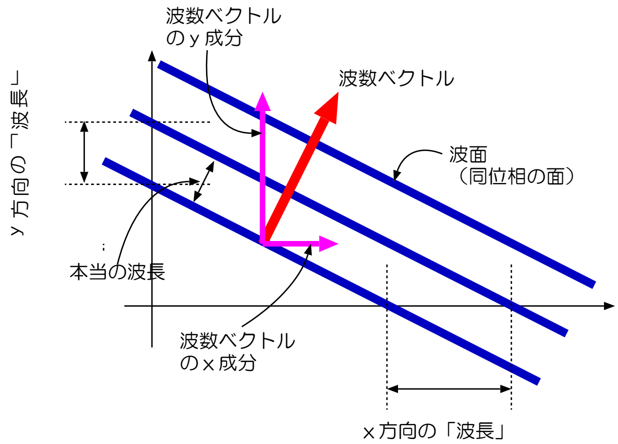
---

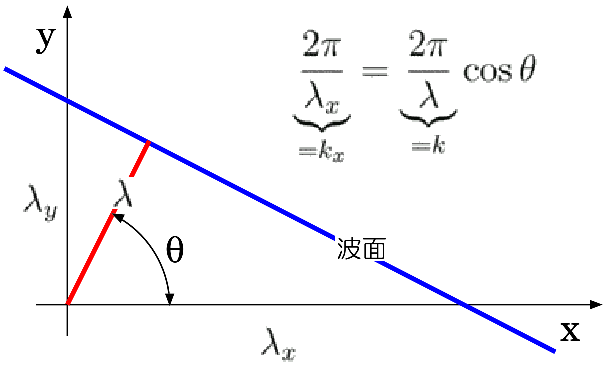
[2]特に $\omega=0$ の場合（$0=\triangle U$）はラプラス方程式と呼ぶ。



この $e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t}$ の形の解を「平面波解」と言う。なぜ「平面」なのかというと、この波の位相に含まれる $px+qy+rz$ はベクトル $\vec{p}=(p,q,r)$ とベクトル $\vec{x}=(x,y,z)$ の内積であり、この位相は、$\vec{p}\cdot\vec{x}$ が同じ値をとる平面の上で同じ値を取るからである。その平面は、法線ベクトルが $\vec{p}$ となるような平面である。たとえば、$\vec{p}$ と直交する任意のベクトルを $\vec{a}$ と書くと、$\vec{p}\cdot(\vec{x}+\vec{a})=\vec{p}\cdot\vec{x}$ である。つまり $\vec{p}\cdot\vec{a}=0$ を満たすベクトル $\vec{a}$ で示される方向に移動しても、位相は変化しない（つまり、$\vec{p}$ が法線ベクトルとなる平面上で、位相は一定の値を取る）。

１次元で波動が $e^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ と書けた時の k を波数と呼んだので、$e^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}-\mathrm{i}\omega t}$ と書いた時のベクトル $\vec{p}$ を「**波数ベクトル**」と呼ぶ。





波数ベクトルは波面（同位相の面）に垂直である。波数ベクトルの x 成分は図に書いた『x 方向の「波長」』[3]を λ_x と書けば、$\frac{2\pi}{\lambda_x}$ と表せる。「位相が 2π 変化」と「波長 λ 分だけ移動」が波において同じ意味を持つ、ということはすでに述べたが、波の進む向きが軸方向とは限らない場合、「x 方向に λ_x だけ移動」が「位相が 2π 変化」に等しいとすれば、この λ_x は、本当の波長である λ より長くなる（波の進む方向とは少し違う方向に移動しているのだから、こうなることは当然である）。

よって、波長の x 成分、y 成分、z 成分を三つ並べて $(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)$ のような組を作っても、これはベクトルとは呼べない（一本のベクトルの x 成分 y 成分 z 成分という意味を持っていない）。もっとも顕著なことには、この $(\lambda_x,\lambda_y,\lambda_z)$ は $(\lambda_x)^2+(\lambda_y)^2+(\lambda_z)^2=\lambda^2$ のような関係を満たしていないのである。そもそも図を見ても、λ_x は λ を射影したものとは全く違う。

波数（$=2\pi\div$波長）の３つ組 (k_x,k_y,k_z) はちゃんとベクトルとなる（右の図参照）。波数ベクトルは波の進む方向を示すベクトルであるとも言える。そして、波数ベクトルの絶対値 $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ は１次元の波数と同様、$\frac{2\pi}{\lambda}$（λ は波長）という意味を持つ[4]。

一般解は、

$$u(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_{-\infty}^{\infty}dr\left(f(p,q,r)e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t}+g(p,q,r)e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{6.12}$$

のように、今求めた平面波解の線形結合をとったものとなる。これは波数 (p,q,r) を持っている波を $f(p,q,r)$ という重みをもって足し合わせるという計算を行っている。

もちろん上の式では、$\omega=v\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ がすでに代入されているものとする（こうでないと解にならない）。

[3]「」つきで「波長」と書いたのは、これはもちろん本当の波長ではないからである。本当の波長は波面から波面の距離である。x 方向だけをみた時、波の山から山までの間隔という意味があるので「波長」と呼ぶのも全く間違いというわけではないが、通常はこういう使い方はしない。

[4]適当に座標軸を回転して、波数ベクトルが $(k,0,0)$ のような成分を持つようにしたとする。この時の k と波長の間には $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ という関係が立つ。回転によってベクトルの長さは変化しないから、$k=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$。

$u(x,y,t)$ が実数であるとすると、$u = u^*$ とならなくてはいけない。

$$u^*(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(f^*(p,q,r) e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy-\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} + g^*(p,q,r) e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy-\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} \right) \tag{6.13}$$

であるが、ここで積分している変数である p,q,r の符号を全部ひっくり返すと、

$$u^*(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(f^*(-p,-q,-r) e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} + g^*(-p,-q,-r) e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} \right) \tag{6.14}$$

となる。$u = u^*$ となるには、$g(p,q,r) = f^*(-p,-q,-r)$（$f(p,q,r) = g^*(-p,-q,-r)$ でも同じこと）が成立しなくてはいけないことになる。結局解は

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) =& \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(f(p,q,r) e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} + f^*(-p,-q,-r) e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} \right) \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(f(p,q,r) e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} + f^*(p,q,r) e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy-\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} \right) \end{aligned} \tag{6.15}$$

となる。１行目から２行目に行く時には、第２項だけを $p \to -p, q \to -q, r \to -r$ という積分変数の置き換えを行った。

最後の表現だと、これが実数であることがわかりやすい（括弧内の第１項の複素共役が第２項になっている）。また、この書き方だと答は $px + qy + rz - \omega t$ という組み合わせの量の関数になっている。これは１次元の波動方程式の解が $F(x + vt)$ という $x + vt$ の関数 (left-moving) と $G(x - vt)$ という $x - vt$ の関数 (right-moving) と、二つの和で書かれたことと同様である。１次元では波の進む方向は二つしかないが、３次元では (p,q,r) で表されるベクトルの分だけ、波の進む方向がある。

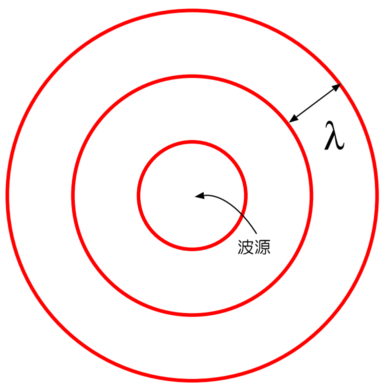
なお、２次元では左行きと右行きが出たのにこの場合は $F(px + qy + rz - \omega t)$ と一種類しかでないようことを変に思うかもしれないが、今の場合 p,q,r という波数ベクトルの成分がプラスもマイナスも取れるので、ちゃんと逆方向の波も入っていることに注意しよう。

なお、$f(p,q,r) = \frac{1}{2}\left(F(p,q,r) - \mathrm{i}G(p,q,r)\right)$ として F,G が実数だとすれば、

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) =& \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(\frac{1}{2} F(p,q,r) \left(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} + e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy-\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\mathrm{i}} G(p,q,r) \left(e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy+\mathrm{i}rz-\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}px-\mathrm{i}qy-\mathrm{i}rz+\mathrm{i}\omega t} \right) \right) \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(F(p,q,r) \cos(px + qy + rz - \omega t) + G(p,q,r) \sin(px + qy + rz - \omega t) \right) \end{aligned} \tag{6.16}$$

と、最初から全部実数の表現で書くこともできる。

6.1.2　球面波解



前節で考えた平面波解は、いわば「まっすぐ進む波」であった。しかし、一カ所にあるアンテナから電磁波を放射するような場合、波はその一点から球面状に「丸く広がる波」になるであろう。そこで、そのような場合の解も書いておこう。

３次元のラプラシアンは、極座標 (r,θ,ϕ) を使って書くと、

$$\triangle = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{6.17}$$

となる。

極座標のラプラシアンがなぜこのようになるかは、ラプラシアンが $\triangle F = \mathrm{div}(\mathrm{grad} F)$ として計算できることを使うと比較的簡単に証明できる。これを使わずに x,y,z の微分を r,θ,ϕ の微分に書き直すという計算をすると、とてもたいへんである。静電気でラプラス方程式 $\triangle V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ を極座標で表した時のことを思い出そう。

忘れている人のために書いておくと、

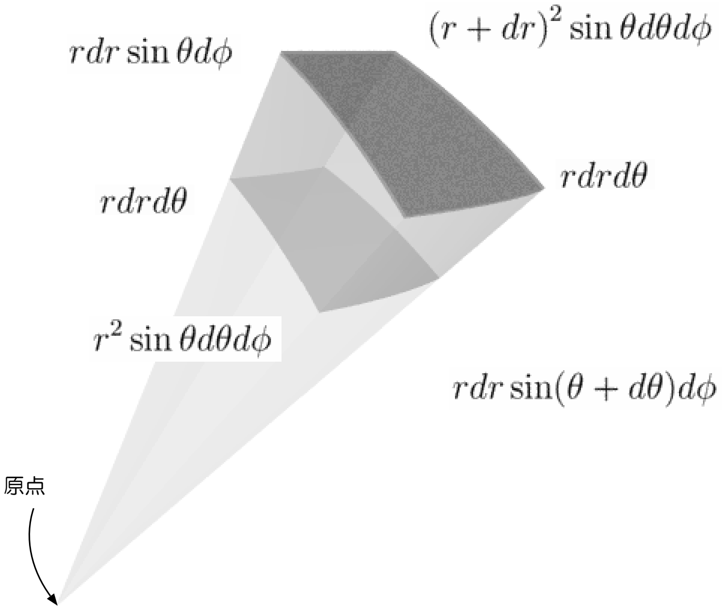
極座標での grad,div, ラプラシアン

$$\mathrm{grad}V=\vec{\mathbf{e}}_r\frac{\partial V}{\partial r}+\vec{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\vec{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{6.18}$$

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{6.19}$$

$$\triangle V=\mathrm{div}(\mathrm{grad}V)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \tag{6.20}$$

である。div の r 微分が r^2 をかけてから微分して後で r^2 で割る形になっているのは、r 方向の流れの断面積が $r^2\sin\theta$ に比例していることに関係している（詳しいことは電磁気のテキストを見よ）。



原点を中心に広がるような波は、r が λ すなわち $\dfrac{2\pi}{k}$ ずつ増えるごとに位相が 2π 変化するような関数であろう。よって、e^{ikr} という形になるだろう。しかし、e^{ikr} を $\triangle u=-\omega^2u$ に代入しても、解にはなっていない。そこで、r^ne^{ikr} と予想して代入してみると、

$$\begin{aligned}\triangle\left(r^ne^{ikr}\right)&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r^ne^{ikr}\right)\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(nr^{n-1}e^{ikr}+ikr^ne^{ikr}\right)\right)\\&=\frac{1}{r^2}\left(2r\left(nr^{n-1}e^{ikr}+ikr^ne^{ikr}\right)+r^2\left(n(n-1)r^{n-2}e^{ikr}+2iknr^{n-1}e^{ikr}-k^2r^ne^{ikr}\right)\right)\\&=2\left(nr^{n-2}e^{ikr}+ikr^{n-1}e^{ikr}\right)+\left(n(n-1)r^{n-2}e^{ikr}+2iknr^{n-1}e^{ikr}-k^2r^ne^{ikr}\right)\\&=r^ne^{ikr}\left(n(n+1)r^{-2}+2ikr^{-1}+2iknr^{-1}-k^2\right)\end{aligned} \tag{6.21}$$

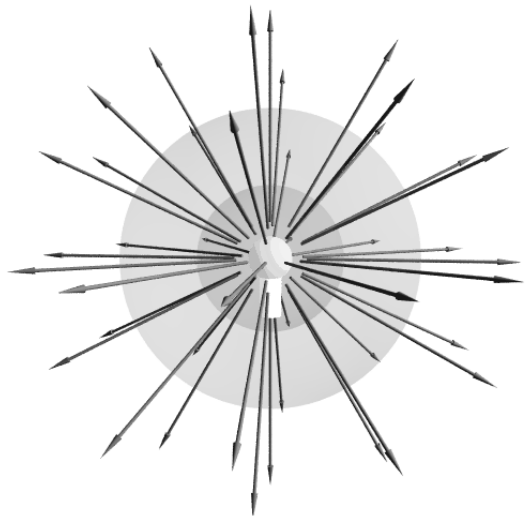
となり、上を見ると $n=-1$ にすると括弧内の第１項も第２　項も消え去り、

$$\triangle\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=-k^2\frac{e^{ikr}}{r} \tag{6.22}$$

となることがわかる。$k^2=\dfrac{\omega^2}{v^2}$ となればこの関数はヘルムホルツ方程式を満たす。解は $\dfrac{e^{ikr}}{r}$ と $\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ （ただし、$k=\dfrac{\omega}{v}$）であることがわかる[5]。

[5]なお、この二つの解はどちらも $r=0$ で発散してしまうので、$r=0$ を除いた場所での解であることに注意。この二つの差に比例する $\dfrac{\sin kr}{r}$ は

つまり、球面波の振幅は距離に反比例するということになる。この結果は、波の運ぶ単位面積あたりのエネルギーが振幅の自乗に比例することを考えると納得できる。これは、波のエネルギーの面積密度は距離の自乗に反比例するということを示している。波源を中心とした半径 r の球から単位時間に外へと流れるエネルギーを考える。面積密度が r^2 に反比例するが面積は $4\pi r^2$ であるから、全エネルギーは r によらなくなる[6]。



ところで、２次元の場合は極座標のヘルムホルツ方程式は

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)V(r,\theta)=-\omega^2V(r,\theta) \tag{6.23}$$

となるが、この式の解を求めるのは、実は３次元よりも少々複雑になる。

解を $V(r,\theta)=R(r)e^{in\theta}$ とおいて、

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{n^2}{r^2}\right)R(r)=-\omega^2R(r) \tag{6.24}$$

と $R(r)$ の式に直した後、$r=\frac{\xi}{\omega}$ と変数変換すると、$\frac{1}{r^2}=\frac{\omega^2}{r^2}$ のように直せるので両辺を ω^2 で割ることができて、$R(r)=J(\xi)$ と書くことにすると

$$\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)J(\xi)=0 \tag{6.25}$$

という式になるが、この式は「ベッセルの微分方程式」と呼ばれる式で、解は初等関数ではなく、級数展開の形で得られている。

なお、ここでは θ,ϕ によらないような関数を考えたが、そうでない場合は θ,ϕ に関しては

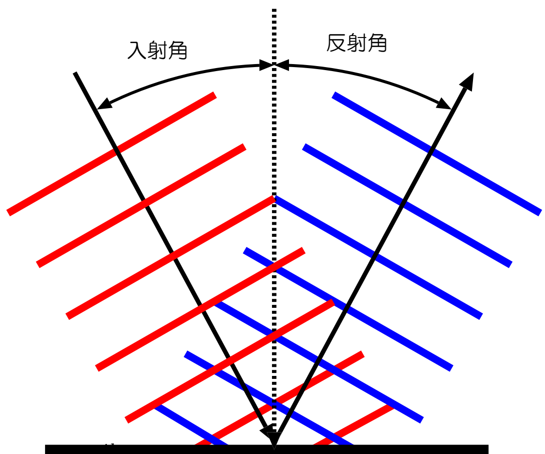
$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)Y(\theta,\phi)=\lambda Y(\theta,\phi) \tag{6.26}$$

という固有値方程式を解いて、その解[7]と r の関数 $R(r)$ の積として解を考えるとよい。この関数の詳細はここでは立ち入らないが、たとえば $\cos\theta,\sin\theta e^{i\phi}$ などがこの方程式の解となる。

6.2　二次元波の反射

１次元の波の場合、右へ進む波 $Ae^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ が $x=0$ という「点」で反射すると $\pm Ae^{-\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}$ という反射波が生まれた（複号プラスは自由端、マイナスは固定端）。これは $x=0$ での条件から来た。

２次元波の場合、反射は点ではなく「面」で起こる。簡単のため、$x=0$ という「面」で反射する場合を考えよう。



面で起こる反射の場合も、その面上においてなんらかの境界条件が満たされなくてはいけない。そして、$x=0$ という面上では y,t が任意の点・時刻においてこれが成立せねばならない。よって入射波を $Ae^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}$ と置いたとすると、反射波も、$x=0$ を代入した時、同じ形の y,t の関数でなくてはならない。この条件と、入射波と反射波は同じ波数を持つべきであるということから、反射波の関数形も決まっ

$r=0$ で発散しない。

[6]実はこんなふうにきれいな形でエネルギー保存が見えるのは３次元の時だけで、２次元波では $\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$ になるかというとそうはいかず、ベッセル関数と呼ばれるちょっと複雑な形の関数になる。

[7]$Y^\ell_m(\theta,\phi)$ と書いて、球面調和関数と言う。

てしまい、$B^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}$ という形にならなくてはいけない。固定端の境界条件であれば、入射波と反射波を足した物が 0 でなくてはいけないから

$$Ae^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{x=0}+Be^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{x=0}=0 \tag{6.27}$$

という条件が出て、これは $B=-A$ を意味する。自由端であれば $B=A$ である。

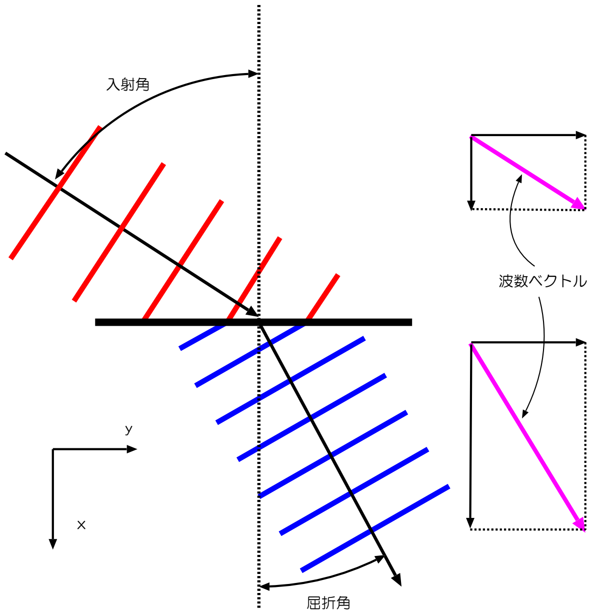
入射波と反射波は、x 方向の波数ベクトルの成分 p のみが $p\to -p$ と変化し、q,ω は変化しない。q と $\omega=v\sqrt{p^2+q^2}$ が変化しないということは、p^2 も変化することができないから、$p\leftrightarrow -p$ という変化しか許されない。

図のように反射が起こっている時、波の入射方向と面の垂線のなす角を「入射角」、波の反射方向と垂線のなす角を「反射角」と呼ぶが、この角度は等しくなければいけないというのが「反射の法則」である。反射の法則は上で述べたように、境界条件の結果として実現する。波数ベクトルが $(p,q,r)\to(-p,q,r)$ というふうに変化することを考えれば、これはすぐに理解できる。

6.3　二次元波の透過—屈折

次に、境界で完全な反射が起こるわけではなく、境界の向こう側にも波が進入していく場合について考えよう。ただし、向こう側では波の速度が変化するような場合を考える。

任意の時刻において波の接続条件が成立するためには、入射波・反射波・屈折波の３つの波の振動数が一致しなくてはいけない。それゆえ、境界の上下で振動数は等しい。ところが速度が違うのだから、上と下では波数（もしくは波長）が違うということになる。上では波数ベクトルの大きさが k_1、下では波数ベクトルの大きさが k_2 になると考えよう。



入射波を（振幅１で考えることにして）$e^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}$ と置こう。反射波は $Re^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}$、透過波は $Pe^{\mathrm{i}p'x+\mathrm{i}qy-\mathrm{i}\omega t}$ とする。ここでも反射の場合と同様、波数ベクトルの y 成分である q についは全く何の変化も起こらないとした。こうしないと、任意の y に対して上の接続条件が成立することはあり得ない。

なお、$k_1=\sqrt{p^2+q^2}, k_2=\sqrt{(p')^2+q^2}$ が成立することはもちろんである。

境界で波の変位とその微分が接続されるという条件を考えると、

$$1+R=P,\qquad p(1-R)=p'P \tag{6.28}$$

という式が出るのは１次元の時と全く同じであり、これから

$$P=\frac{2p}{p+p'},\quad R=\frac{p-p'}{p+p'} \tag{6.29}$$

となる。

図のように屈折が起こっている時、「入射角」を θ_1、「屈折角」を θ_2 とすると、これと入射角の間には関係がある。波数ベクトルの境界面に平行な成分 q が変化しないということから来る関係で、k_1, k_2 と角度を使って表現すると（図からわかるように）、

$$q = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \tag{6.30}$$

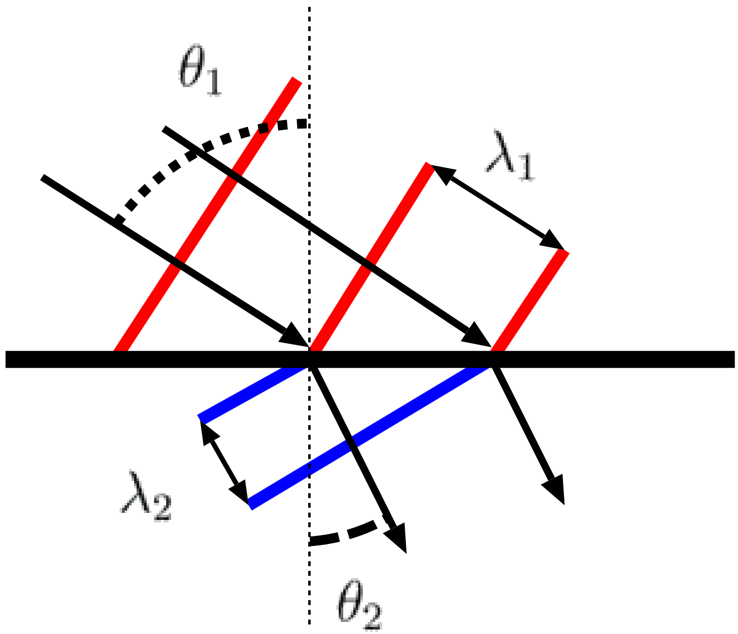
である。つまり、波数ベクトルの、境界面に平行な成分が等しい[8]。波数 k が $\frac{2\pi}{\lambda}$ であることを考えると、

$$\frac{\sin\theta_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_2}{\lambda_2} \tag{6.31}$$

あるいは、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{6.32}$$

という式が成立する。これは「屈折の法則」または「スネルの法則」と呼ばれる。この法則は右の図を見れば幾何学的に納得できる。



なお、反射の法則、屈折の法則は「フェルマーの原理（波は最短距離を通ろうとする）」という法則から導くこともできる。フェルマーの原理を波動として理解する方法については後で述べよう。

屈折はスネルの法則を満たすように起こるわけであるが、$\sin\theta_2$ の大きさは 0 から 1 までという制限があるので、どんな状況でも起こるわけではない。

$$\sin\theta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_1 \tag{6.33}$$

であるから、右辺が 1 以上になってしまう場合、対応する θ_2 が存在せず、その場合は屈折波が存在できなくなる。この場合は反射だけが起こるので「**全反射**」と呼ぶ。

全反射は $\lambda_2 > \lambda_1$、あるいは $k_1 > k_2$ になるような状況でのみ起こる。

6.4　長方形膜の振動

２次元の波の一例として、長方形の形をした膜の振動を考えよう。膜の各部の断面（線）に、単位長さあたり T の張力が与えられている場合を考える。実際にはこの張力は膜が振動すると変動すると考えられるが、ここでは一定値として扱う。

解くべき方程式はやはり１次元の波動方程式を拡張した形となり、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z(x,y,t) \tag{6.34}$$

となる。この方程式を境界条件 $z(x,0,t) = z(x,L,t) = z(0,y,t) = z(L,y,t) = 0$ のもとで解く。この条件により、$x = 0, x = L, y = 0, y = L$ の４辺で固定端反射が起こることになり、結果として右行きの波と左行きの波、上行きの波と下行きの波が均等に重なることになる。よって、平面波解

$$z(x,y,t) = \int dp \int dq \left(f(p,q) e^{\mathrm{i}px + \mathrm{i}qy - \mathrm{i}\omega t} + f^*(p,q) e^{-\mathrm{i}px - \mathrm{i}qy + \mathrm{i}\omega t} \right) \tag{6.35}$$

で、$p \leftrightarrow -p, q \leftrightarrow -q$ と変化させたものを引いていくとよい（固定端なので、符号を反転してから足す）。

e^{ipx} で p の符号を反転させて引く、ということは、その答は $e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i\sin px$ となる。

[8] 量子力学の場合、波数は運動量に比例するから、これは「運動量の境界面に平行な成分が保存する」ということを示している。

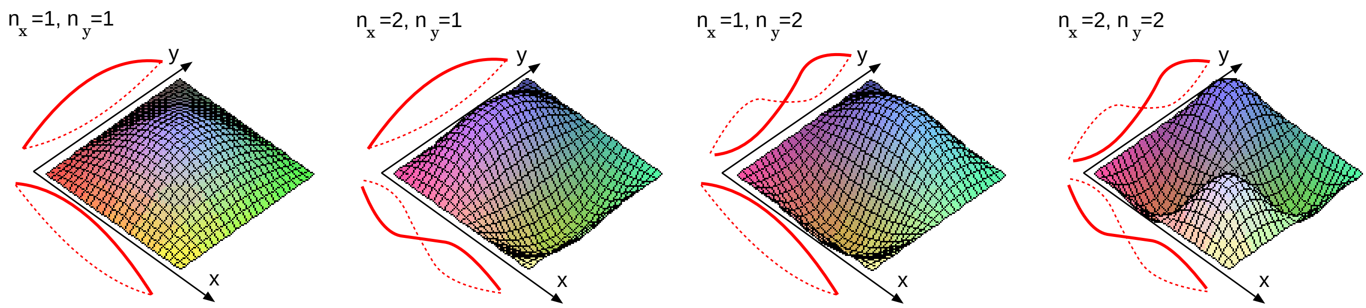
つまり解は

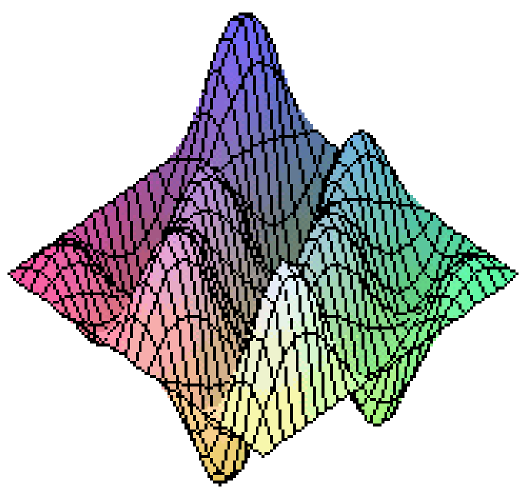
$$z(x,y,t)=\int_0^\infty dp\int_0^\infty dq\left(F(p,q)e^{-\mathrm{i}\omega t}+F^*(p,q)e^{\mathrm{i}\omega t}\right)\sin px\sin qy \tag{6.36}$$

という形になる。この式は $x=0,y=0$ ではちゃんと 0 になるので、境界条件を満たしているが、まだ $x=L,y=L$ での境界条件は満たせていない。そのためには $\sin pL=0$ および $\sin qL=0$ が満たされなくてはいけないから、$p=\frac{n_x\pi}{L},q=\frac{n_y\pi}{L}$ $(n_x,n_y$ は自然数) が満たされなくてはいけない。結局解は

$$z(x,y,t)=\sum_{n_x,n_y}\left(F_{n_x,n_y}e^{-\mathrm{i}\omega_{n_x,n_y}t}+F^*_{n_x,n_y}e^{\mathrm{i}\omega_{n_x,n_y}t}\right)\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L} \tag{6.37}$$

となる。n_x,n_y が小さい場合の振動の様子を描いたものが次の図である。





１次元波動同様、このいろんな (n_x,n_y) の値に対応する振動一つ一つが振動のモードとなる。実際に起こる振動は特定の (n_x,n_y) ではなく、これらの振動モードがいろんな割合で混ざり合った、線形結合状態である。

波動方程式に代入してみるとすぐわかるように、各々の振動モードはそれぞれ、

$$\omega_{n_x,n_y}=\sqrt{\frac{T}{\rho}}\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{L}\right)^2} \tag{6.38}$$

という角振動数で振動する。

右の図は $(n_x,y_y)=(3,5)$ の波と $(n_x,n_y)=(2,4)$ の波の重なった状態である。

重ね合わせはいくつの波を足し算してもいいので、もっともっと複雑な波も実現する。例えば長方形膜の一部を持ち上げて手を離した時、そこには複雑な振動が起こることになるが、それはたくさんの振動モードの重ね合わせとして実現されるのである。

複雑な初期条件が与えられた時、その後の運動をどのように考えればよいかを記しておこう。たとえば、時刻 $t=0$ において、この長方形膜が関数 $z=f_0(x,y)$ で表現されるような形をしていて、かつ静止していたとしよう。この時、時刻 t における膜の様子を計算するにはどうしたらいいであろうか？

まず、(6.37) に $t=0$ を代入した式

$$z(x,y,0)=\sum_{n_x,n_y}\left(F_{n_x,n_y}+F^*_{n_x,n_y}\right)\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L} \tag{6.39}$$

と、(6.37) を時間微分してから $t=0$ を代入した式

$$\frac{\partial}{\partial t}z(x,y,0)=\sum_{n_x,n_y}\left(i\omega_{n_x,n_y}F_{n_x,n_y}-i\omega_{n_x,n_y}F^*_{n_x,n_y}\right)\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L} \tag{6.40}$$

を用意する。今は最初静止している場合を考えたのだから、$F_{n_x,n_y}-F^*_{n_x,n_y}=0$ でなくてはいけないことがわかる。よってこの場合の (6.39) は

$$z(x,y,0)=2\sum_{n_x,n_y}F_{n_x,n_y}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L} \tag{6.41}$$

でよいわけである。よって、後は $f(x,y,0)=f_0(x,y)$ を代入して、逆に F_{n_x,n_y} を求めればよい、ということになる。

求め方は、フーリエ級数の考え方を使う。まず、

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{L}{2}\delta_{mn_x} \tag{6.42}$$

という式に注意しよう。つまり、sin と sin をかけて積分すると、x の係数が同じものだけが生き残り、それ以外は 0 となる。

このことに注意しつつ、(6.41) の両辺に $\sin\frac{m_x\pi x}{L}$ をかけて x を 0 から L まで積分し、さらに $\sin\frac{m_y\pi y}{L}$ をかけて y を 0 から L まで積分すれば、

$$\int_0^L dx\int_0^L dy\sin\frac{m_x\pi x}{L}\sin\frac{m_y\pi y}{L}z(x,y,0)=\frac{L^2}{2}F_{m_x,m_y} \tag{6.43}$$

となって、F_{m_x,m_y} が計算できるというわけである。いったん F_{m_x,m_y} が求まれば、後は全ての時刻における波の振動の様子がわかることになる。

上のように、波動方程式を解く時にはフーリエ級数の考え方が大きな助けになることが多い。

6.5　章末演習問題

[**演習問題 6-1**] 3 次元のヘルムホルツ方程式 $\triangle U=-\omega^2U$ の解の中には、$U=R(r)\cos\theta$ という形をしているものがある。$R(r)$ の方程式を求め、解け。

[**演習問題 6-2**] 6.3 節の最後に「（屈折の法則は）右の図を見れば幾何学的に納得できる。」とあるが、どのように納得できるのか、説明せよ。

[**演習問題 6-3**] 6.3 節では触れなかったが、状況によっては、透過波が存在しないことがある。全反射と呼ばれる現象であるが、それはどのような時に起こるのか ？

(ヒント：$\sin\theta_2$ は 1 を越えてはならない。)

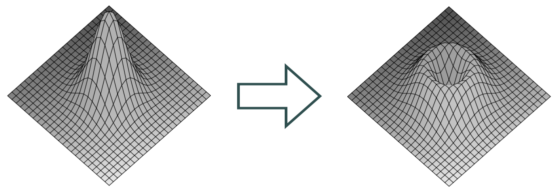
第7章　２次元・３次元波動の進行

２次元以上の波の進行においては１次元とは違って「波が広がる」という現象がある。この章では「波が広がっていく」ということも含めて波の進行をどのように考えていけばよいかを調べる。

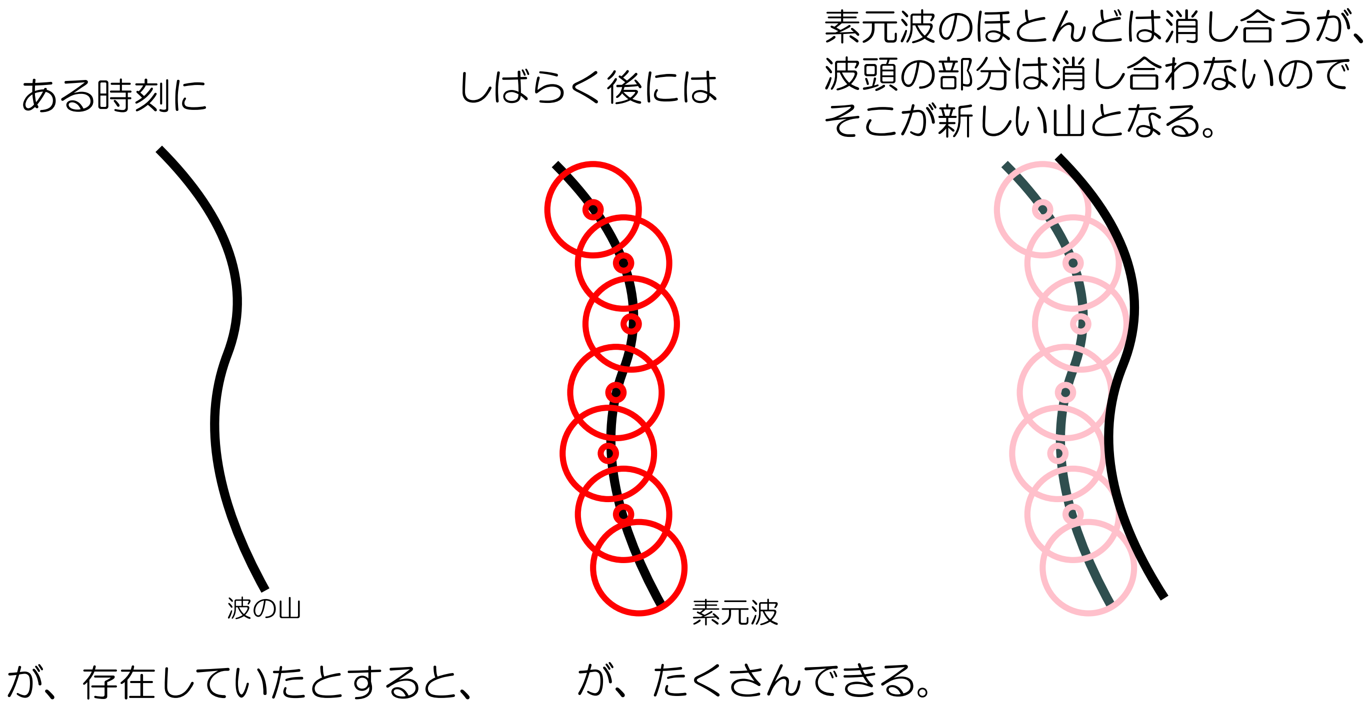
7.1　ホイヘンスの原理

２次元以上の波動の進行については、ホイヘンスの原理と呼ばれる考え方で、進行の様子をおおざっぱに予測することができる。「原理」という名前の割には、厳密な公式に乗っ取った計算方法ではなく、おおざっぱに理解できるだけであり、不備も多いが、波の進行の様子を理解するには有用である。

ホイヘンスの原理の考え方の基本は、重ね合わせの原理である。２次元の波で説明しよう。水面をイメージして、水面のある一点が山になっていたとする。水面にも復元力があるので（その原因は重力と表面張力である）、この山は崩れる。崩れた分、周囲の水面が上がっていくので、上から見ると円形に波が広がっていくことになる。このように点状の山から出る円形（３次元で考える時は球形）の波を「素元波」と呼ぶことにする。



この素元波の集まりで、一般の形をした波が構成されているというがホイヘンスの考え方である。



ホイヘンスの原理には「波が進む方向を特定できない」という弱点がある。図だけ見ていると、古い波の山の左側にも新しい波ができても良さそうであるが、そうはならない。これはホイヘンスの原理が「波の媒質の現在の変位」を元に「次の状態」を予想する原理であり、「波の媒質の現在の速度」を全く考慮していないからである（本来、ニュートン

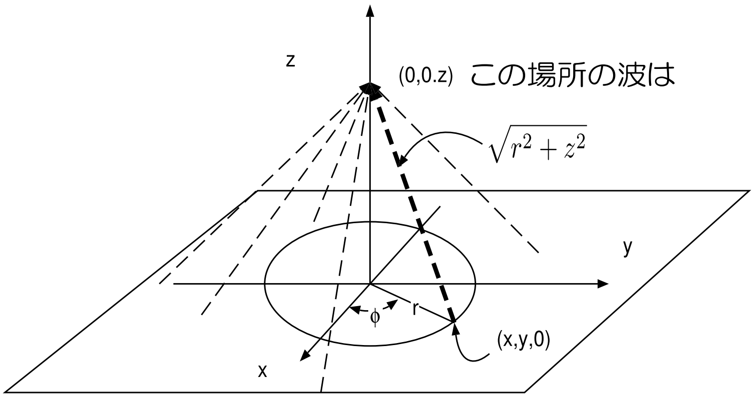
力学では「初期値」と「初速度」がわからないと次の状態を完璧に予言することはできない)。

7.2 ホイヘンスの原理を数式で表現する

ホイヘンスの原理によれば、波面の各点から素元波が出る、ということになっているが、3 次元で考えれば素元波は球面波と考えるべきであろうから、その式は $\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}$ という形をしていることになる。そこで、ある場所 $\vec{x}$ における波を

$$A\int_{\text{ある波面}} d^2\vec{x}'\,\frac{e^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{7.1}$$

という形で表現できるだろうと考えてみよう。この $\vec{x}'$ の積分は 2 次元の積分で、ある瞬間の波面について行うとする。その波面が「位相=0」の場所だったとして、そこから $\vec{x}-\vec{x}'$ 離れた場所では位相が距離に比例して $k|\vec{x}-\vec{x}'|$ だけ変化していて、振幅が $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 倍に減衰しているだろうと考える。



この平面上の波全てが伝播してきた結果だと考える。

z 方向に進む平面波の場合、その「ある波面」を $z=0$ に選ぼう。その場所である時刻に波が 1 という値を取っていたとする ($e^{\mathrm{i}kz}$ に $z=0$ を代入した値)。積分は $\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy$ であるが、円筒座標を使うことにすれば、$\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\phi r$ となる。

これで、$(0,0,z)$ における波を計算する。$(r,\phi,0)$ から $(0,0,z)$ までの距離は $\sqrt{r^2+z^2}$ となるので、$(0,0,z)$ での波は

$$A\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\phi r\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}} \tag{7.2}$$

で計算できることになる。ϕ 積分は定数 2π という結果を出してすぐに終わる。r 積分はいっけんややこしそうだが、

$$\frac{d}{dr}\left(e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}}\right)=\mathrm{i}k\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}}=\mathrm{i}k\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}} \tag{7.3}$$

であることに気づくと積分ができる。これから $\frac{d}{dr}\left(e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}}\right)$ が被積分関数の $\mathrm{i}k$ 倍であることがわかるので積分結果は

$$2\pi A\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^{\infty}=\frac{2\pi A}{\mathrm{i}k}\left[e^{\mathrm{i}\infty}-1\right] \tag{7.4}$$

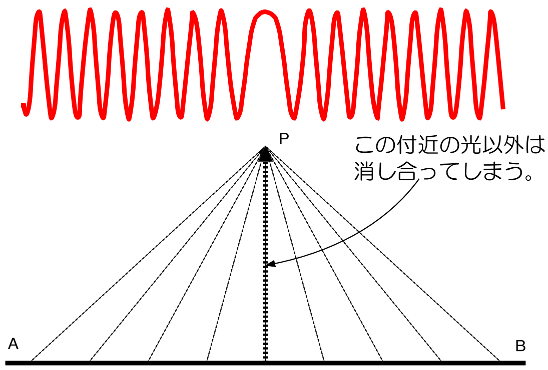
となる。ここで、$r=\infty$ での値は不定となってしまう[1]が、「無限に遠いところの影響がここに現れるはずはない」ということで無視することにする。すると答としては $r=0$ の部分だけが残り、

$$\frac{-2\pi A}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kz} \tag{7.5}$$

という解が出る。ここで、比例定数 A を $\frac{-\mathrm{i}k}{2\pi}$ と選んでおくことにすれば、場所 $(0,0,z)$ での波は $e^{\mathrm{i}kz}$ で表される。なお、この比例定数 $\frac{-\mathrm{i}k}{2\pi}$ は、波長を使って $\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}$ と書くこともできる。

以上の計算では「$z=0$ まで平面波で進んできた波は、この後も平面波で進む」というあたりまえのことを長い積分をやって確認したことになる。結果として求められた $e^{\mathrm{i}kz}$ だけを見れば、波はただ z 方向に進行しただけと見えるかもしれない。しかし、この計算の過程を見ると、$(0,0,z)$ という場所には $(x,y,0)$ で表される場所全てから波がやってきて重なりあった結果として $e^{\mathrm{i}kz}$ という答が生まれたのである。

---
[1] $e^{\mathrm{i}\infty}$ は -1 から 1 までの間の値であることは間違いないが、いったいいくつになるのかさっぱりわからない。



結果だけを見ると、$(0,0,0)$ にあった波が $(0,0,z)$ までまっすぐやってきた、と考えればよい。では、$(0,0,0)$ 以外にあった波は、なぜ関係なくなってしまったのであろうか??

一次元落として平面の波の図で、遠方から来る波が効かない理由の概念をつかんでおこう。

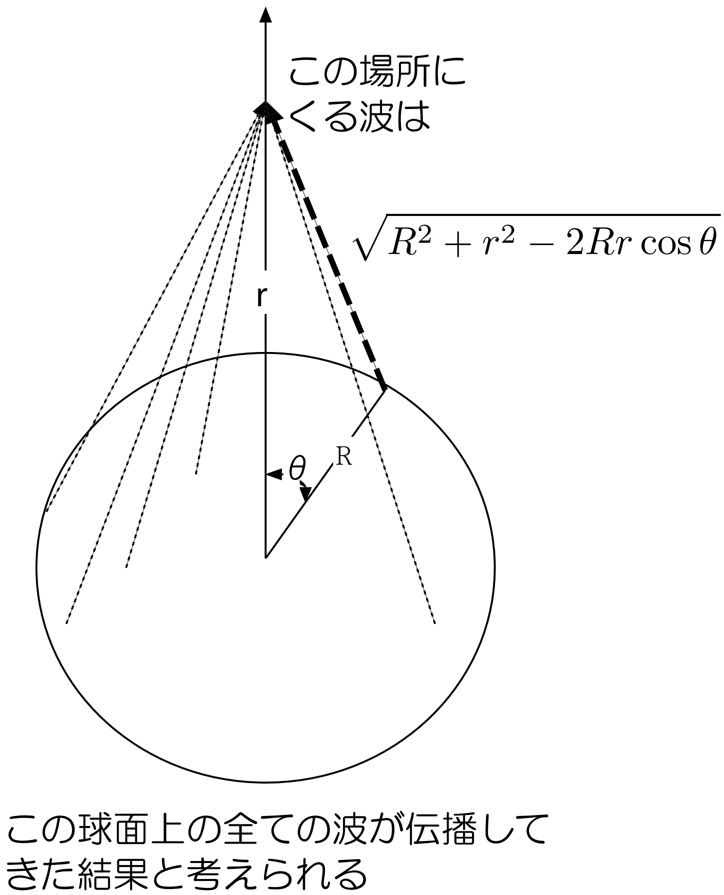
右の図のように、ある直線 AB の上から出発した波が、ある一点 P にやってくるところを考えよう。直線 AB 上では波の位相はそろっている (山なら全部山、谷なら全部谷) が、そこから離れた点にやってきた時、線上から点 P までの距離の違いから、やってくる波の位相にずれが生じている (あるところからきた光は山、別のところからきた光は谷)。図の上の方に書いてある波形は、AB 上から P 点にやってきた波がどのような状態でやってくるかを書いたものである。

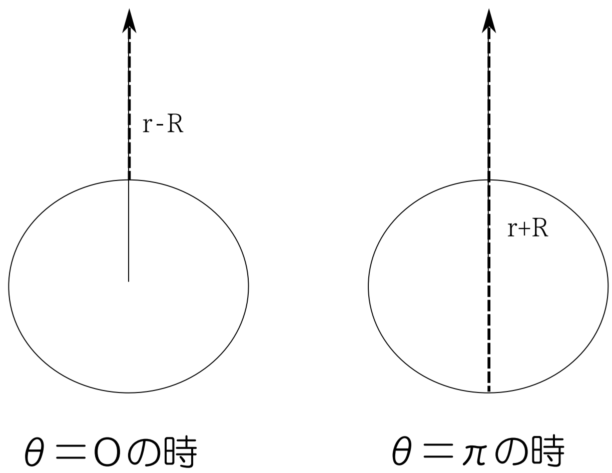
波は干渉するので、山と谷がぶつかると互いに消しあう。上のグラフのようになっていると、真ん中付近をのぞいてはほとんどすべての波が消しあって消えてしまう。真ん中付近は位相 (つまり距離) の変化が比較的緩やかなので足し算しても消されずに残る。特に波長が短いと、この振動がより激しくなり、消しあう可能性がより高くなる。結局、中央付近のあまり消しあわない波だけが、現実にこの場所にやってくる波だということになる。

球面波の場合で同じ計算をやってみよう。最初の波面として、半径 R の場所で $\dfrac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}$ という変位を持っている波を考える。では、座標原点から距離 r のところの波は、その点へと向かう素元波を足し算（積分）していくこと：

$$\frac{-\mathrm{i}k}{2\pi R}e^{\mathrm{i}kR}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\sin\theta R^2\frac{e^{\mathrm{i}k\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} \tag{7.6}$$

によって得られる。





ここで $\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}=x$ とまとめて考えると、$dx=\dfrac{Rr\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}$ となる。また、積分範囲は $\theta=0$

で $x = r - R(r > R$ に注意)、$\theta = \pi$ で $x = r + R$ なので、この積分は

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}ke^{\mathrm{i}kR}\int_{r+R}^{r-R} dx\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kx} &= -\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kR}\left[e^{\mathrm{i}kx}\right]_{r+R}^{r-R} \\ &= -\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kR}\left(e^{\mathrm{i}k(r+R)} - e^{\mathrm{i}k(r-R)}\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(e^{\mathrm{i}kr} - e^{\mathrm{i}k(r+2R)}\right) \end{aligned} \tag{7.7}$$

のように実行できる。

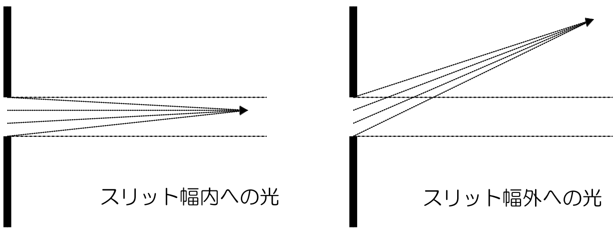
答を見ると $\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}$ はともかく、$\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}k(r+2R)}$ という不思議な波ができているが、これはホイヘンスの原理の弱点である「波の進行方向という情報が入ってない」という点が現れたもので、言わば「裏側から来た波」が入ってしまったのである。

以上のように、ここでの計算は厳密なものではないのだが、これでもある程度、波の進行を予想することができる。厳密な計算方法もちゃんとあるが、ここでは述べずに、以上の考え方で波の進行をどのように考えることができるかを説明していこう。

7.3　穴を通り抜けた光の回折

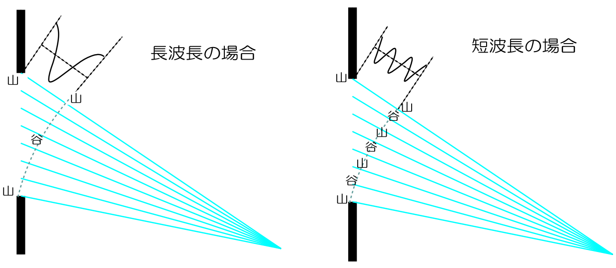
ここで、穴を通り抜けた後の波がどのように広がるかを見積もろう。日常スケールの現象において、光は回折をあまりしない。というより、ほぼ直進するように見える[2]。

では、光は波であるのに、なぜ直進する (ように見える) のだろうか。波動説にしたがえば、光はいろんな方向に広がろうとするはずである。右の図のように、壁に空いた穴から光が抜けて、ある一点にやってくるところを考えよう。



その一点がスリット幅の内側にあると、先に説明した「位相変化が極値になっている場所」があるが、スリットの外側だとその部分がない。つまり位相がそろう波がないので、ほとんどの場所で消し合ってしまい、大きな波ができない。つまり、光の直進の理由は「干渉により、直進しない部分の波は消される（ことが多い)」ということだったのである（後で説明するが、レンズによって光が集められたりするのも、干渉が原因だと言うことができる)。

もちろん、この干渉による「直進しない部分の波の消去」は完璧に起こるわけではない。特に、波長が長いかスリットの幅が非常に小さいかどちらかの場合は、やってくる光の位相の変化が小さいので、波は広い範囲で消されずに残る。



右図は波長が長い場合と短い場合で、単スリットを通り抜けた光がどのように重なるかを描いたものである。短波長の場合、図に示した点にやってくる光はたくさんの山と谷が集まってできたものとなり、必然的に小さな振幅になってしまう。

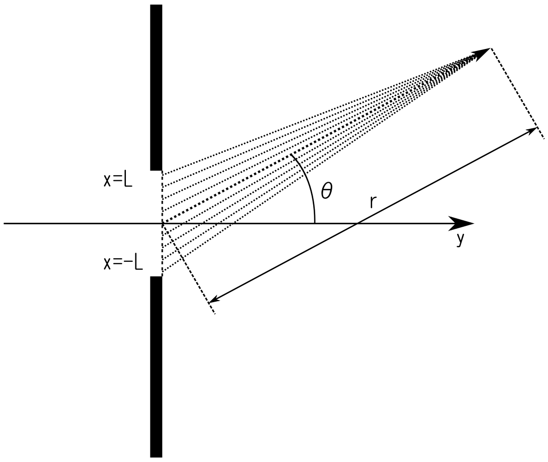
長波長の場合には、光は波として広がることになる。光学の方では「波長とスリット幅が同程度の時よく回折が起こる」と言われるが、それはこういう理由である。

以上のように、各点各点の波は広がろうとするのだが、波全体の進む路から離れたところへ来た波は互いに消しあってしまうので、全体としての波は広がることができないのである。厳密に言うと、少し広がっているのだが、その広がりが小さくて見えない[3]。これは、量子力学で出てくる「**波動関数 (これが何なのかはまだわからなくてよい) で表される、波であるところの粒子が、なぜ直進するように観測されるのか**」という疑問に対する答でもある。覚えておこう。

[2]昔、ホイヘンスらとニュートンらの間で「光は波か、粒子か」という論争があったが、ニュートンは直進することを光が粒子である理由としていた。

[3]この広がり具合は波の波長に比例するが、光の波長は 10^{-7}m のオーダーであるから、日常において広がりはほとんど見えない。一方、音の波長は 1m のオーダーであるから、音の広がりは日常でもよくわかる。扉の陰にいる人でも部屋の中の話し声が聞こえるのは、音の広がりのおかげ。

単純な例について計算を実行してみよう。2次元で考えることにして、図のような単スリットを抜けて、y 軸に対して θ だけ傾いた方向に進行する波を考えよう。スリットにあたるまでは、波が e^{iky} で表せる波だったとする。



図の $y=0$（x 軸上）において、x が $-L$ から L までは穴が空いているので、その場所で発生した素元波の集まりで通り抜けた後の波が表現できる。

θ 方向に r だけ離れた場所にやってくる波を考えるが、r は非常に大きく、その素元波一個一個は平行に進むと近似できるものとすれば、

$$\frac{-\mathrm{i}k}{2\pi}\int_{-L}^{L} dx \frac{e^{\mathrm{i}k(r+x\sin\theta)}}{r} \tag{7.8}$$

という積分をすればよい[4]。

ここで、分母が x によらない r となっている。今、$r >> L$ としているので、分母の変化は重要ではないのである。例えば $r \simeq 1000L$ とすれば、分母は積分の間に 0.1 %程度変化するにすぎない。

分子の exp の肩に乗っている $\mathrm{i}k(r+x\sin\theta)$ では r が大きいにも関わらず $\mathrm{i}kr$ と近似していない。これは、（一見足し算に見えるが）

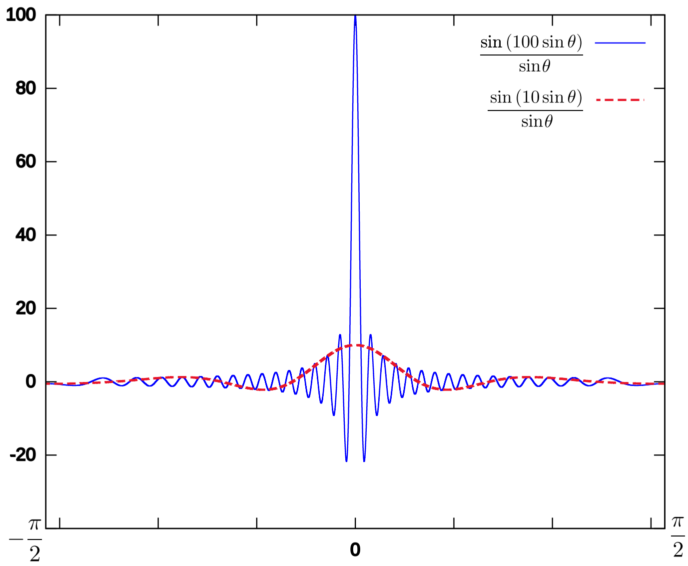
$$e^{\mathrm{i}k(r+x\sin\theta)} = e^{\mathrm{i}kr}e^{\mathrm{i}kx\sin\theta} \tag{7.9}$$

のように r に関係する部分とそうでない部分は積の関係になっており、位相 $kx\sin\theta$ が π 変化すれば、$e^{\mathrm{i}kx\sin\theta}$ は符号が反転するほどの変化を受けることになる。これを無視するわけにはいかない[5]。

では、積分を実行しよう。

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{i}k}{2\pi}e^{\mathrm{i}kr}\int_{-L}^{L} dx \frac{e^{\mathrm{i}kx\sin\theta}}{r} &= \frac{-\mathrm{i}k}{2\pi}e^{\mathrm{i}kr}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k\sin\theta}\frac{e^{\mathrm{i}kx\sin\theta}}{r}\right]_{-L}^{L} \\ &= \frac{-1}{2\pi r}e^{\mathrm{i}kr}\left[\frac{e^{\mathrm{i}kL\sin\theta}-e^{-\mathrm{i}kL\sin\theta}}{\sin\theta}\right] = \frac{-i}{\pi r}e^{\mathrm{i}kr}\frac{\sin(kL\sin\theta)}{\sin\theta}\end{aligned} \tag{7.10}$$

この計算の結果のグラフを出しておこう。下は $kL=10$ の場合と $kL=100$ の場合の $\dfrac{\sin(kL\sin\theta)}{\sin\theta}$ のグラフである。θ は $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ までをプロットしている。



どちらの場合も、$\theta=0$ がピークとなり、$\theta=0$ から離れると振動しつつ弱まっていくのだが、kL が大きくなるに従って $\theta=0$ にできる山は鋭くなる（つまり、$\theta=0$ から離れる方向には波ができにくくなる）。

波数 k は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$（λ は波長）であるから、$kL=2\pi\dfrac{L}{\lambda}$ である。結論として、「**波長 λ とスリットのサイズ L を比較してスリットの方が圧倒的に大きい場合には波は広がらない**」ということが結論できる。光の場合、だいたい波長は 10^{-7}m のオーダーであり、日常的には L は 10^{-3} 程度までであろうから、kL は 10^4 程度となり、非常にシャープなピークを作る（つまり、広がらない）[6]。

なお、ここでは障害物を通り抜けてきた波について「隙間が波長程度より小さければ広がる」ということを確認し

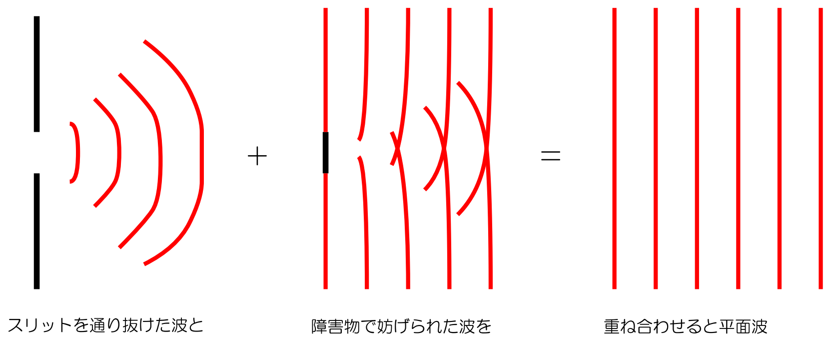
[4]ここでは2次元で考えることにしたにもかかわらず、使う式としては3次元の時の球面波の式を利用している。本当はこれは正しくない計算であるが、ここではおおざっぱな説明のためだと思って欲しい。

[5]x の範囲は $-L$ から L までだから、もし $kL\sin\theta$ が大きな位相でなければ、これも無視していい。その場合は、スリット部分からは球面波が出ると思っていい。スリットが非常に小さければこうなる。

[6]ここでは L が小さいとして近似して考えているので、$kL=1$ 程度の広い隙間を通り抜ける場合は近似が破綻することに注意。

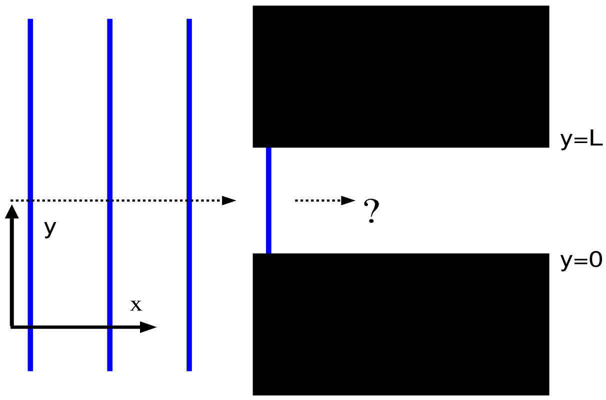
たわけだが、逆にほとんどの場所には障害物がないが、一部に障害物があるような場合にも、障害物のサイズが波長程度かどうかによって障害物は以後の波の状況大きく変わる。

ここでは計算を繰り返さないが、右の図に書いたように考えると、「障害物が波長程度より小さい時は、その影響はほとんど現れない」と結論できるだろう。波長に比べてスリットが大きくはない時に通り抜けた波が大きく広がったということを考えると、逆に障害物が波長に比べて大きくない場合にも、障害物があることの影響が大きく広がり、薄まってしまうと考えられる。逆にスリットが波長より大きい時に波があまり広がらなかった、ということは、波長より大きい障害物はそれだけ「影」を作るということなのである。



7.4　狭いところを通る波の減衰

今度は壁に空いた穴の深さが深い場合を考えてみよう。この場合、その穴の中を波が進んでいくということについても考える必要がある。



ここでは、2次元で考えて、x 方向に伸びた穴（y 方向には制限がついている）を考える。これはつまり、2次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,t) \tag{7.11}$$

を y 方向に特別な境界条件をつけて解け、という問題を考えることに等しい。

左図のように、$x > 0$ の領域では $y = 0$ と $y = L$ に壁があり、ここで波が固定端境界条件を満たしている場合を考える（すなわち $u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0$）。この場合、変数分離で解けば、y 方向の振動は $\sin\dfrac{n\pi y}{L}$ となる（これで上の境界条件を満たす）。$\sin\dfrac{n\pi y}{L} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\frac{\mathrm{i}n\pi y}{L}} - e^{-\frac{\mathrm{i}n\pi y}{L}}\right)$ である。波数ベクトルの y 成分は $\dfrac{\pi}{L}$ という最小値を持っていることがわかる。これは波長で言うと、波長 $2L$ が最大値だということである。今波がいる場所は y 方向には長さ L しかないのだから、その中に半波長（つまり山一つあるいは谷一つ）が入る場合の波長が $2L$ であり、それより長いと固定端条件を満たせない（定常波ができる場合、節と節の間隔が半波長であることに注意しよう）。

x 方向の波数を k、角振動数を ω とすれば、解は

$$u(x,y,t) = Ce^{\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t}\sin\frac{n\pi y}{L} \tag{7.12}$$

となる。波動方程式を満たすためには、$\omega^2 = v^2\left(k^2 + \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\right)$ という関係が満たされなくてはいけない。これを書き直すと、

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \tag{7.13}$$

となる。

この式をよく見ると、角振動数 ω が小さい振動の場合、n に最小値1を代入したとしても上の式の根号の中身が負になる可能性がある。その時、k が虚数になってしまうわけである。

物理的にはどのような時にこのような現象が出現するのかというと、波が小さな穴に入り込むような時である。

以上から、もし $-\dfrac{\omega^2}{v^2}+\left(\dfrac{n_x\pi}{L}\right)^2>0$ だとすると、これは波動方程式の境界条件を満たす解は

$$u(x,y,t)=Ce^{Kx-\mathrm{i}\omega t}\sin\frac{n\pi y}{L}+De^{-Kx-\mathrm{i}\omega t}\sin\frac{n\pi y}{L} \tag{7.14}$$

となる。ただし、

$$K=\pm\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}-\frac{\omega^2}{v^2}} \tag{7.15}$$

である（ルートの中身の引き算の順番がひっくり返っていることに注意！）。

波動方程式を解いたにもかかわらず、答は「波動」ではなく、「指数関数的減衰 (e^{-Kx})」または「指数関数的増大 (e^{Kx})」する関数となったわけである。このうち指数関数的に増大する解は非物理的となって捨てられることが多い。つまりはこの穴に入った波は減衰してしまって遠くまで届かない。

このように波動方程式の解として減衰する関数が出てくる例は、上で示したような隙間に入る波の他、量子力学におけるトンネル効果、屈折で全反射が起こっている時の境界面などでも起こる。

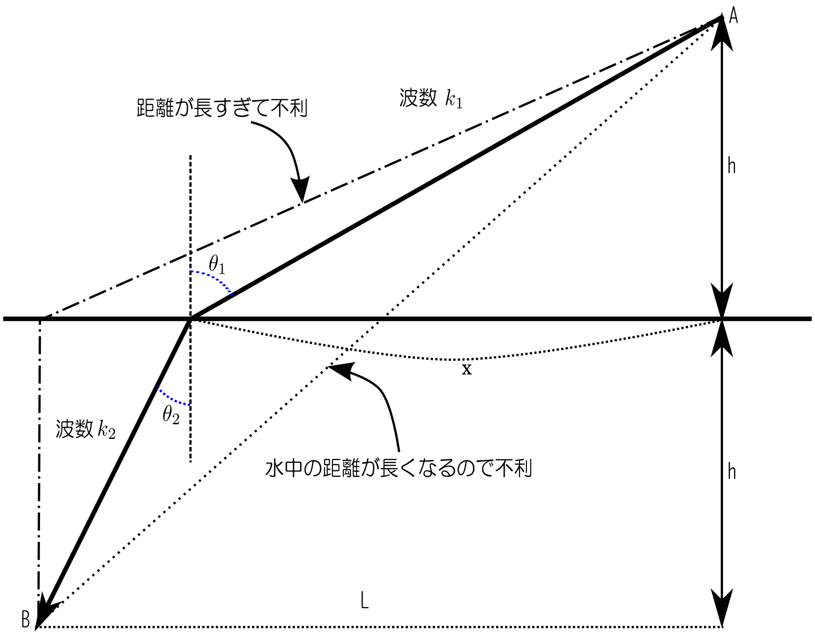
条件 $-\dfrac{\omega^2}{v^2}+\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2>0$ から、$\omega<\dfrac{\pi v}{L}$ でないと波が進行できないことになる。$\dfrac{\pi v}{L}$ を「**遮断周波数** (cut-off frequency)」と呼ぶ。このように、波がどのような振動を行いどのように伝播していくかは、境界条件の影響も大きく受けるのである。

以上のような結果はおおざっぱには、「**波は自分の波長よりも短い隙間を通り抜けることができない**」とまとめることができる。

7.5 干渉の結果として考える屈折の法則

6.3 節で屈折を考えたが、屈折が起こる理由を、波の重ね合わせで考えることもできる。例えば図のように、空気中から水中へと進む光を考えよう。光の場合、水中の方が速度が遅い。振動数は（境界面での接続を考えるとわかるように）空気中でも水中でも同じであるから、速度が違うということは波長が違う（あるいは、波数が違う）。図の上でも、水中の方が波長が短くなるという形で表現されている。

このようにして A 地点から B 地点へと波が進行する際、屈折が起こるわけである。屈折の径路はフェルマーの原理によって計算することができる。



フェルマーの原理は「光は最短時間で到達できる距離を通ろうとする」と表現される。図の A 地点から B 地点へ向かう光を考える。A から B にまっすぐ進む線（図の点線）は距離は最短に見えるが、光が遅くしか進めない水中の距離が長いので、決して「最短時間」ではない。では水中の距離が短い径路ならいいかというと、図の一点鎖線のような径路だと、空気中の距離が長くなりすぎて不利である。

結局、この両極端間のどこか（どこになるかは空気中と水中の速度の比によって決まる）に最短時間で光が到着できる場所がある。それが実現する光の径路となる。

では、それがどこかを計算してみよう。図のように A 地点、B 地点の位置と、光が屈折する点での入射角と屈折角を設定すると、A から光が入る場所までの距離は $\sqrt{h^2+x^2}$、そこから B までの距離は $\sqrt{h^2+(L-x)^2}$ である。空気中と水中での光の波数を k_1,k_2 とし、どちらにお

いても角振動数が ω だとすると、それぞれの場所での光の速度は $\frac{\omega}{k_1}, \frac{\omega}{k_2}$ であるから、A から B までに光が進むのに必要な時間は

$$\frac{k_1}{\omega}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{k_2}{\omega}\sqrt{h^2+(L-x)^2} \tag{7.16}$$

である。これが最小である時を求めればよいのだが、二つの項において ω は共通だから、

$$k_1\sqrt{h^2+x^2}+k_2\sqrt{h^2+(L-x)^2} \tag{7.17}$$

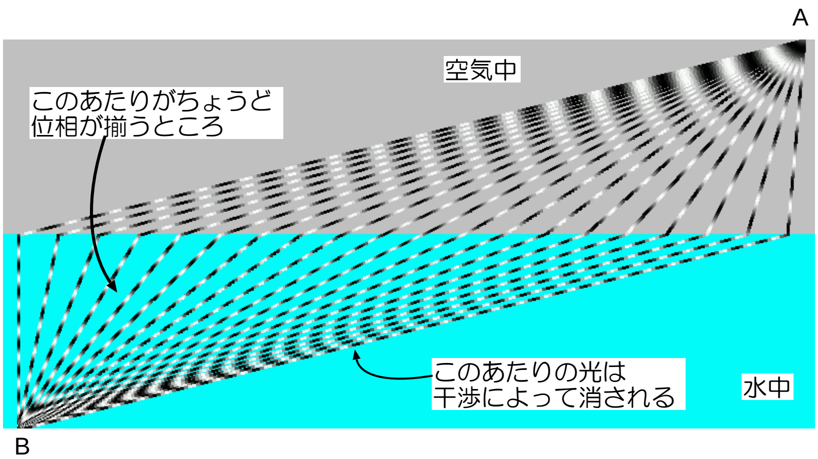
を計算しても結果は一緒である。この量は距離に波数をかけて足し算したものだから、A 点と B 点の位相差となる。フェルマーの原理は「位相差が最小となる径路を光が通る」と言い直しても良い。

位相差が最小である時の x を求めるために、これを x で微分して 0 とおくと、

$$\begin{aligned} k_1\underbrace{\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}}_{=\sin\theta_1}-k_2\underbrace{\frac{L-x}{\sqrt{h^2+(L-x)^2}}}_{=\sin\theta_2} &= 0 \\ \frac{\sin\theta_1}{k_2} &= \frac{\sin\theta_2}{k_1} \\ k_1\sin\theta_1 &= k_2\sin\theta_2 \end{aligned} \tag{7.18}$$

という条件が出る。これは、前に求めた屈折の法則と同じである。

ではなぜ光は最小位相差の径路を通るのだろうか??—実は重要なのは「最小」ではなく、「最小」であるところは「微分が 0」すなわち位相変化が小さくなっている、ということが重要なのである。素元波の考え方からすれば、光（一般に波）は、ありとあらゆる方向に進むのであるが、その素元波を足し算して重ね合わせしていった結果、干渉によって消されることなく残る部分は、足し算される時に似たような位相の光が重なるところである。右の図を見て「水面で曲がる光」がちょうど位相が揃う場所であることを確認しよう。

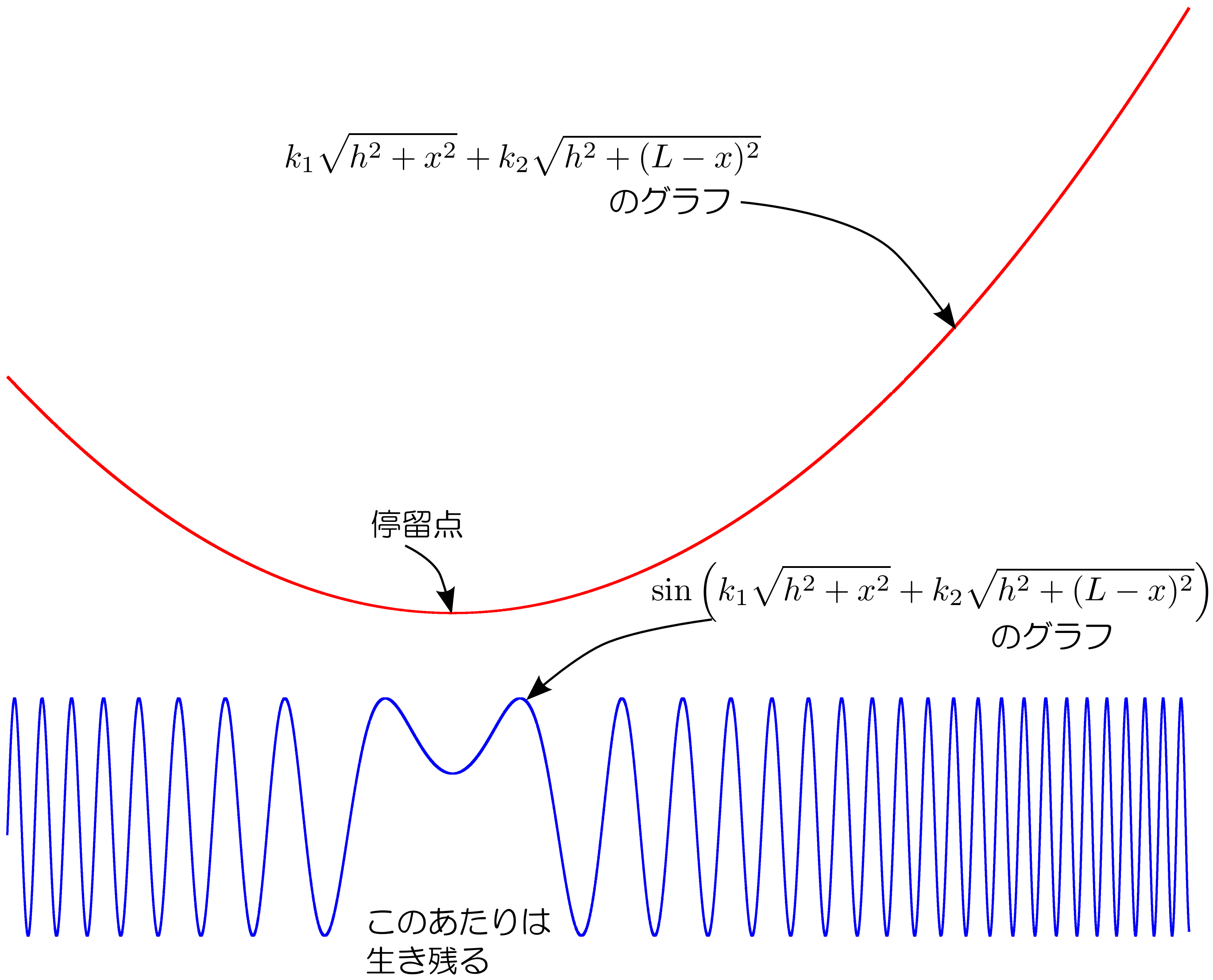


これがすなわち、位相変化が小さい（すなわち、位相が極値[7]を取る）径路が「選ばれる」理由なのである。

次の図は、水中に入る場所と、その時の位相、およびその位相から計算される sin の値のグラフである。

位相 $k_1\sqrt{h^2+x^2}+k_2\sqrt{h^2+(L-x)^2}$ が最小値（停留値）となる場所では波の振動が比較的少なくなっていて、重ね合わされた結果このあたりは残る。一方、位相変化が大きいところでは激しく振動していて、そのあたりの足し算はほぼ 0 となってしまい、最終結果には影響しなくなってしまう。

[7]「微分して 0」が大事なので、位相が最小値を取らなくてもよい。つまり最大値でもいいし、単に停留値であってもよい。



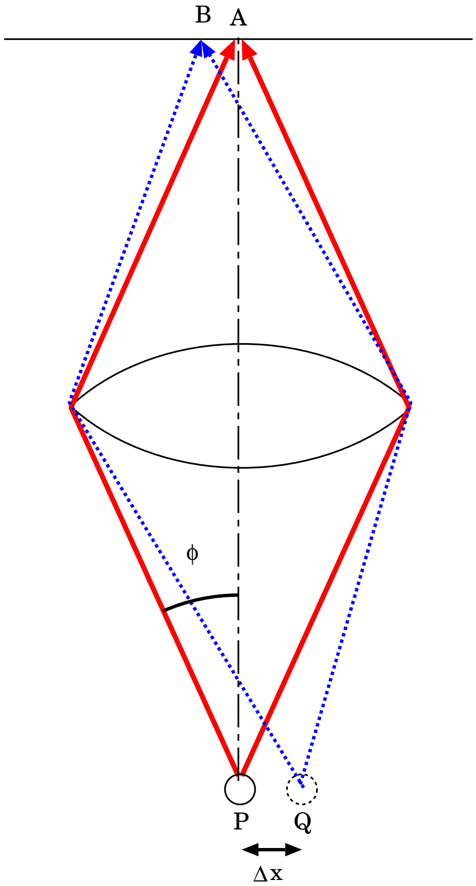
我々は普段光が直進し、時には屈折することを当たり前のように目にしているが、それらの光の振る舞いは全て、光が波であって、いろいろな径路を進むが、特別な径路以外を通る光が干渉によって消されているがゆえなのである。

7.6　最後に—量子力学への橋渡し

「波動論」の締めくくりとして、波動の性質のうち、３年になって量子力学を勉強する時に大きく関係する部分について解説しておく。

7.6.1　分解能と不確定性関係

「波である光が直進する（ようにみえる）のは干渉により直進しないような光が消されてしまうからである」ということを述べた。「直進しないような光が干渉により消される」と言っても、完全に消えてしまうというものではなく、多少は残る。光にも小さいとはいえ有限の波長があるので、ある程度干渉によって消されずに残る部分があるのはしかたがない。日常生活ではそれが目に見えるほどになることはないが、例えば光の波長程度より小さいものを見ようとする時には、この光の広がる性質が邪魔をすることになる。



P 点から出る光をレンズで集め、スクリーンで見るとする。光を直線的に進んでいく光線のように考えるならば (このような考え方を「幾何光学的な考え方」と呼ぶ)、レンズの中心の真下 P 点から出た光はちょうどその真上にあたる A 点に到達する。また、レンズの真下より少し離れた点 Q 点から出発した光は、A より少し離れた B 点に到着する。スクリーン上のどこに光がきたかによって、光がどの場所から発せられたかがわかる (カメラであればこの場所にはフィルムがあり、フィルムに塗られた感光物質が化学変化を起こす。目であれば視覚細胞が反応する)。カメラにしろ人間の目にしろ、このようにして光の到着点から「光がどこから来たか」を判断しているわけである（レンズがなくてただ光を感じるだけであったなら、明るさは判断できても物を見ることはできないのである)。

光を「光線」ではなく「波動」だと考えた場合、P 点から出た波が A 点に到達する理由は上とは違ってくる。波はいろんな方向に伝播する。A 点では P 点から来たいろんな光の位相がぴたりと揃い、互いに強め合う。これが A 点から出た光が P 点に到着する理由である (このような考え方が「波動光学的な考え方」である)。光の位相が揃う理由は、レンズ中では光速が遅くなるからである。一見遠回りしているかに見えるレンズ周辺を通ってきた光と、直進して近道を通ったかに見えるレンズ中心を通ってきた光は同じ時間をかけて伝播している。それゆえ、P 点でこれらの光の位相はぴったり同じになる。逆に、P 点以外の場所にやってくる光は、位相がずれているために消し合ってしまう。

ここで注意すべきことは、P 点より少し離れた Q 点から出発した光も、図に書いた二つの光線 (破線で表した) の光路差が一波長程度までしかなかったなら、A に到達することができることである。この場合も光は干渉によって消し合うが、完全に消えてしまうことはない。このため、A 点に光が到達したとしても、図の Δx 程度はどこから来たのかを判定できなくなる。近似をつかってくわしい計算をするとこの Δx は $\dfrac{\lambda}{2\sin\phi}$ となる。Δx を「離れた 2 点を分離していると認めることができる能力」という意味で、「分解能」と呼ぶわけである。

分解能は光の波長程度の大きさを持つから、光を使って物を見る限り、光の波長より小さいものを見ることはできない。一点から来た光が広がりを見せるので、像がぼやけてしまうのである。分解能を小さくする（小さいものを見る）ためには、波長を小さくするか、$\sin\phi$ を大きくする。

しかし、どんなにがんばっても $\Delta x=\dfrac{\lambda}{2\sin\phi}$ を半波長よりも小さくすることはできない。つまり、光を使って物を見る限り、波長よりも小さいものは見えないと思って良い。これがウィルスが顕微鏡では発見できなかった理由である[8]。原子のサイズは光の波長以下なので、「原子の写真」を取ることも不可能である。

これは「波」というものを使って何かの位置を測定しようとする時、避けられない測定誤差となる。量子力学では全ての物質が波の性質を持つが、それゆえに物体の位置の測定には避けられない不確定性が伴うことになる。量子力学ではこれが「不確定性関係（または不確定性原理)」として出現する。

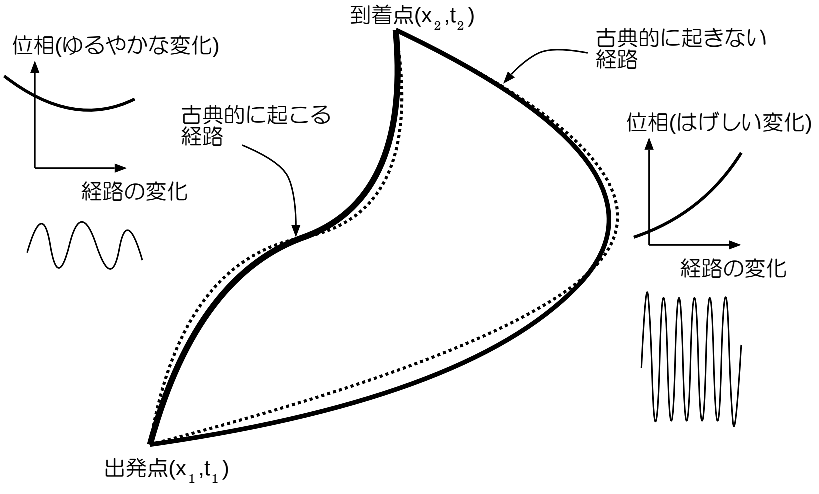
7.6.2　フェルマーの原理と最小作用の原理

波動として光を考えた時、フェルマーの原理すなわち「光が最短距離を通る」という現象は、「光の波の位相が極値を取る」ということに対応していることはすでに述べた。

今、ある時空点 (x_1,t_1) から (x_2,t_2) へ、いろんな経路をたどって波が到達したとする。(x_2,t_2) において観測される波は、そのいろんな経路をたどった波の和である。経路によって、波はいろんな位相を取る。そしてそのいろんな位相の波の足し算が行われることになるが、この時足される波それぞれの位相差が大きすぎると、波が互いに消しあってしま

[8] 光ではない、もっと波長の短いものを使って物を見るという方法はもちろんある。電子顕微鏡は電子を使って物体の形を知る。

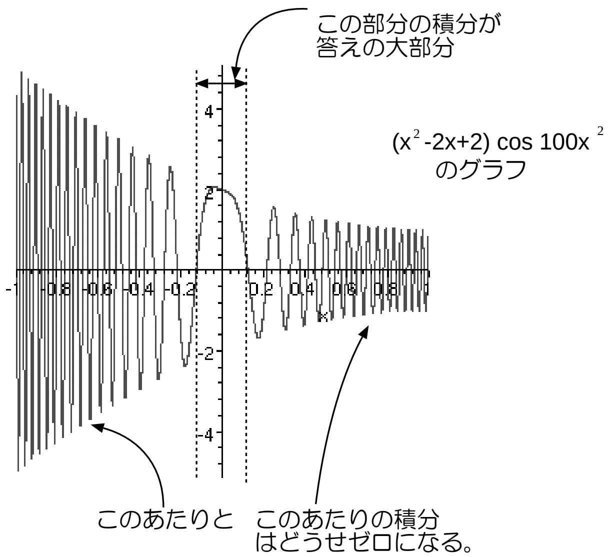
う。位相が極値を取るというのが重要なのではなく、極値を取るところでは変化が小さい、ということが重要なのである。変化が小さいところの足し算は、位相が消し合うことなく残る。それに対して位相が大きく変化しているところの足し算は、足し合わされて消えてしまうのである。



つまり、いろんな経路を伝わって波がやってくるが、実際にその場所にやってきた波の主要部分は、位相が極値を取っているような波だと考えることができる。これは前の章でやったホイヘンスの原理の数式的表現を考えれば納得できるだろう。$e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}$ を積分することで波がどのように進行するかを考えることができたのだが、計算の中で激しく位相（この場合、$k|\vec{x}-\vec{x}'|$）が変化するような部分については、積分してもどうせ答は 0 と考えてよかった。

この波の重なる様子を具体的に考えるのは難しいので、だいたいのところどういう状況なのかを理解するために、簡単な積分の場合で変化のゆるやかな部分だけが生き残る例を示しておく。右のグラフは $(x^2-2x+2)\cos 100x^2$ のグラフである。この関数は、$x=0$ 付近以外では非常に激しく振動している (位相が $100x^2$ という式であることを考えればわかる)。この積分を行うと、ほとんど $x=0$ 付近だけの積分と同じになる。つまり、$x=0$ 付近以外の寄与は、結果にまったくといっていいほど影響されないのである。これと同様のことが、波動力学における波の重ね合わせでも起きている。ゆえに位相が極値となるような経路 (古典力学的には Euler-Lagrange 方程式の解となっているような経路) が主要な波の経路であると考えてよい。古典力学と波動力学はこのようにつながる。

ド・ブロイが物質波というものを考えた背景には光学がある。光学においても幾何光学という立場と、波動光学という立場がある。幾何光学では「光線」を考え、光線がどのように進んでいくかを計算する。一方波動光学では「波」を考え、空間の各点各点に発生する波の重ね合わせによって波の運動を計算する。この二つのどちらを使っても光がどのように進行するかを考えることができる。



さて、光を記述するには、粒子的（光線的）に考えてフェルマーの原理を使う方法と、波動と考えてホイヘンスの原理を使う方法があるが、この二つは実は同じ現象を別の記述をしただけのものであることがわかる。波長の短い波では「粒子的振る舞い」が主に見え、波長の長い波では「波動的振る舞い」が主に見える。

波長の短い光はあまり回折せず、直進する傾向を持っていた (ニュートンが光の本質を波ではなく粒子的なものだと考えた理由はまさにこの直進性にあった)。同じ電磁波でありながら、テレビやラジオなどの電波と光はその進行の仕方において、全く違う性質を持つ。

ここで「波長が長い／短い」を分ける基準は、もちろん状況によって違う。光は日常生活（長さのスケールが数センチから数メートル）ではじゅうぶん粒子的である（直進するように見える）。しかし、顕微鏡でウィルスを発見しようというような時には、波動的な性質が大きくなりすぎて、ウィルスの像を写すということは不可能になってくる。物理現象のスケールによって、波の起こす現象は全く違うのである。

さて、ここまで諸君らが勉強してきたのは「古典力学」と呼ばれる「量子力学以前」の力学である[9]。古典力学において、波動論におけるフェルマーの原理に対応するのは、解析力学における最小作用の原理である。

フェルマーの原理では「光が進むのにかかる時間」あるいは「光の位相」が極値を取るが、解析力学において極値を取るのは「作用」である。

波動（光など）がどのように進行するかは、フェルマーの原理で考える（幾何光学）こともできるし、波の重ね合わせを使って考える（波動光学）こともできる。考えているスケールに比べて波長が短い場合（日常現象における可視光の場合など）は幾何光学を使う方が簡単である。逆に考えているスケールに比べ波長が comparable[10]であるか大きい場合は、波動光学を使わねばならない。

力学でも粒子の進行を、最小作用の原理を使って考えることができる。最小作用の原理に対応するのがフェルマーの原理すなわち幾何光学である。では波動光学に対応するものは何か ??? —ド・ブロイはこのような考え方から物質の波動説に到達し、自身のこの考え方を「波動力学」と呼んだ。

	波長が短い場合	波長が長い場合
光学の世界	幾何光学 （フェルマーの原理）	波動光学
力学の世界	古典力学 （最小作用の原理）	波動力学

ド・ブロイは解析力学を作っていた段階では、ただ「作用が極値を取るような運動が実現する」としか考えられていなかった「作用」という量に「物質波であると考えた時の位相に対応するもの」という意味を与えたのである。位相が極値を取るような経路の波は干渉で消えずに残る。同様に作用が極値をとるような運動が実現する。これが、我々がこの世界で古典力学が成立している (そして、最小作用の原理という物理法則がある) と '**錯覚**' した理由なのである。

ド・ブロイの大胆な考えは、やがて実験的支持を受けて、現代物理の根幹であるところの量子力学の基礎となる。

電子に波動性があると言ったが、その波動性はなかなか発見されなかった。それはもちろん、電子の波の波長があまりに小さく、（昔ニュートンが光を粒子と見誤ってしまったように）粒子的振る舞いばかりを顕著に示すからである。電子の波長は光よりもさらに短いのである。

それが電子をあてて電子の反射を調べることで物体の形をさぐる機械、いわゆる「電子顕微鏡」が光よりも小さいスケールを見ることができる理由である。そのあまりに短い波長ゆえ、電子の波動性はなかなか発見されなかった。

「光は粒子なのか波なのか」という論争は物理の中で何度も繰り返されてきた。それに「波と粒子の性質を両方持つ」という結論が与えられた直後「電子のような物質もやはり波と粒子の性質を持つ」ことがわかった。

このような意味で、波動現象を理解することは現代物理を理解するのに欠くことができないのである。

[9]物理の世界で「古典 (classical)」というのは「古い」という意味ではない。「量子力学ではない」という意味である。

[10]comparable は「比較することができる」という意味。つまり同程度の大きさであることを表す言葉。