1. 補間多項式

Definitions: (区間, 連続関数, abscissas（データ点、格子点、差分点）, 多項式)

$x \in \mathbf{R}$, 実数; $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, 区間; $f : I \to \mathbf{R}$, 連続関数, とする。

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ をn+1 個の相異なる点 (abscissas、格子点)とする.

n 次の多項式 $p_n(x)$ とは、単項式 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ の
線形結合の事である。 $p_n(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

Theorem.（補間多項式の存在と一意性）

各 i = 0, …, n について、$p_n(x_i) = f(x_i)$,
をみたす、次数が高々n の多項式 $p_n(x)$ が一意的に存在する。

この $p_n(x)$ を補間多項式と呼ぶ。

○ 補間多項式のLagrange form。（ラグランジュの公式）
(簡単な形をしていて，誤差評価にも便利。)

$(x_i, f_i),\ i = 0, \cdots n,$ の点を通る補間多項式を導く。 $f_i := f(x_i)$

まず、Lagrange の多項式を次の様に定義する、

$$L_{n,i}(x) := \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

これを用いて，補間多項式の Lagrange form は次の様に書かれる、

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x)\, f_i}$$

なぜなら、 $L_{n,i}(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ for } i = j \\ 0 \text{ for } i \neq j \end{cases}$

Theorem:（補間多項式の誤差）
関数 f が区間 [a,b] 上で連続で、かつ区間（a,b）上で n+1 階連続微分可能ならば、任意の x∈[a,b] に対して,次の様な ξ(x)∈(a,b) が存在する,

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

○ 補間多項式のNewton form（ニュートンの公式）.

$$\begin{aligned} p_{0,\cdots,n}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ &\quad + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) \end{aligned}$$

上の形に書かれた f(x) の補間多項式を導く。ラグランジュの公式と同様に、

$p_{0,\cdots,n}(x)$ は　$p_{0,\cdots,n}(x_k) = f(x_k).$ を満たす。

Definition（差分商）

点　x_i　に対する 0 階の差分商は$f[x_i] = f(x_i).$

点　$x_i,\ x_{i+1}, \cdots, x_{i+k},$ に対する k 階の差分商は

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad 0 < k \le n,$$

★　この差分商を使って補間多項式のNewton form は次の様に書ける。

$$p_{0,\cdots,n}(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i).$$

つまり, $a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$

ニュートン公式のほうがラグランジュ公式より計算効率がよい ― 係数を計算するのに少ない計算量で済む。特に、データが新たに付け加わった時には、ラグランジュ公式では係数を全て再計算する必要があるのに対し、ニュートン公式では付け加わった高次の項の係数だけを計算すればよい。

○ Runge's phenomenon.ー高次補間多項式に対する制限

区間 [a,b] 上の関数 f(x) を補間多項式で近似するとき、多項式の次数を増やしても誤差は必ずしも減少しない。補間した値は区間の端のほうで振動してしまう。

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,1],$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-P_n(x)|\right) = \infty.$$

x = 0 で特異性を持つ関数 $f(x) = \sqrt{|x|},\ x \in [-1,1]$, などとも同様である。

この困難を解消するには

(1)　補間のためのabscissas（データ点）の取り方を最適化する。

Chebyshev 点 (Chebyshev 多項式の根) をとると ℓ_∞ norm，が最小になる。

$$||f(x) - p_n(x)||_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

Legendre polynomial多項式の根をとると ℓ_2 norm，が最小になる。

$$||f(x) - p_n(x)||_2 := \left[\int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx\right]^{1/2}$$

(2)　低次の多項式補間を区分的に用いる。例えば区分的線形補間、スプライン補間、エルミート補間（Cubic Hermite: Interpolation）など。

参考）Cubic Hermite 補間　　$s_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

区間 $[a, b]$ が部分区間 $[x_i, x_{i+1}]$ に分けられ、各 x_i で $f(x)$ と $f'(x)$ のデータが与えられているとする。区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ を３次多項式 $s_i(x)$ で区分的に補間する。$s_i(x)$ の係数 a_i $i = 0, 1, 2, 3$　は各部分区間　$[x_i, x_{i+1}]$ ごとに異なり、次の４つの条件から決定される；

$$f(x_i) = s_i(x_i),\ f'(x_i) = s_i'(x_i) \text{ at } x = x_i,$$

$$f(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1}),\ f'(x_{i+1}) = s_i'(x_{i+1}) \text{ at } x = x_{i+1}.$$

課題 1ー1） 補間多項式の誤差の定理を証明せよ。

課題 1ー2） 補間多項式の Newton form

$$p_{0,\cdots,n}(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i).$$

で、係数が $a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ となることを示せ。

課題 1ー3） Lagrange form の補間多項式のプログラムを作る。

区間を x ∈ [-1, 1]として、次の3種類の関数を補間する。

$$f(x) = \cos(\pi x) \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

補間多項式の次数 n は $n = 2^k$, k =1, …, 4 としてみよ。

データ点には次の2通りを試してみよ。

a) 等間隔のデータ点をとる。

b) Chebyshev 点（チェビシェフ多項式の根）をとる。